УДК 517.956

В.А. Киричек, Л.С. Пулькина[1]

ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается начально-краевая задача с динамическим граничным условием для гиперболического уравнения в прямоугольнике. Динамическое граничное условие представляет собой соотношение, в которое помимо значений производных искомого решения по пространственным переменным входят производные первого порядка по переменной времени. Основной результат статьи состоит в обосновании разрешимости поставленной задачи. Доказано существование единственного обобщенного решения. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках, методе Галёркина и свойствах пространств Соболева.

Ключевые слова: динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение.

Введение

Математическое моделирование колебательных процессов различной природы обычно приводит к краевым задачам для гиперболический уравнений, граничные условия в которых отражают способы закрепления. Если требуется учесть сопротивление среды, например, при наличии некоторого демпфирующего устройства, то граничные условия должны содержать производную по переменной времени. Такие условия принято называть динамическими граничными условиями. Постановка простейшей задачи с динамическим условием приведена в [1]. Эта задача состоит в нахождении решения уравнения колебаний струны, конец которой испытывает сопротивление среды, пропорциональной скорости ее движения [1]. При этом возникает динамическое граничное условие $ku_x(l,t) = -\alpha u_t(l,t)$. Задачи с динамическими граничными условиями позволяют резрешить вопросы в таких областях, как генетика, медицина, физика, особенно в задачах, свзяанных с акустикой [2]. Задачи с динамическими граничными условиями возникают при изучении различных процессов: процесса переноса газа сквозь мембраны с учетом физико-химических процессов на поверхности [2], распространения волн в стратифицированных и вращающихся жидкостях [3], различных колебательных процессов [4–6]

В работе рассмотрена задача для гиперболического уравнения с динамическими условиями, содержащими производную по времени первого порядка, и доказано существование единственного обобщенного решения. Ранее эта задача изучалась в [8], но в предлагаемой работе удалось существенно ослабить условия на входные данные, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1.1}$$

где $a(x,t) > 0$ всюду в $Q_T = (0,l) \times (0,T)$, и поставим задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$u_x(0,t) = \alpha(t)u_t(0,t), \quad u_x(l,t) = \beta(t)u_t(l,t). \tag{1.3}$$

Киричек Виталия Александровна (Vitalya@gmail.com), *Пулькина Людмила Степановна* (louise@samdiff.ru), кафедра уравнений математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Обозначим

$$\Gamma_0 = \{(x,t) : x = 0, t \in [0,T]\},\ \ \Gamma_l = \{(x,t) : x = l,\ \ t \in [0,T]\},$$
$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_l,$$
$$W(Q_T) = \{u : u \in W_2^1(Q_T),\ \ u_t \in L_2(\Gamma)\},$$
$$\hat{W}(Q_T) = \{v : v \in W(Q_T),\ \ v(x,T) = 0\}.$$

Введем понятие обобщенного решения, для чего, следуя известной процедуре [7], сначала выведем равенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-u_tv_t - au_xv_x + cuv)dxdt = \int\limits_0^l \psi(x)v(x,0)dx+$$
$$+\int\limits_0^T a(0,t)\alpha(t)u_t(0,t)v(0,t)dt - \int\limits_0^T a(l,t)\beta(t)u_t(l,t)v(l,t)dt+$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l f(x,t)vdxdt, \tag{1.4}$$

которое является результатом интегрирования соотношения $vLu = fv$ по области Q_T.

Определение. Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) будем называть функцию $u(x,t) \in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0) = \varphi(x)$ и интегральному тождеству (1.4) для любой функции $v(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$

2. Разрешимость задачи

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

$$c \in C(\bar{Q}_T), a_t \in C(\bar{Q}_T), a \in C(\bar{Q}_T),\ \ f \in L_2(Q_T),$$
$$\alpha, \beta \in C^2[0,T], \alpha(t) > 0, \beta(t) < 0 \quad \forall t \in [0,T].$$

Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3).

Доказательство

Для доказательства единственности покажем, что функция $u(x,t)$, которая представляет собой разность двух обобщенных решений задачи $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$, всюду в области Q_T равна нулю. Очевидно, что $u(x,0) = 0$ и выполняется тождество

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l (-u_tv_t - au_xv_x + cuv)dxdt =$$
$$= \int\limits_0^T a(0,t)\alpha(t)u_t(0,t)v(0,t)dt - \int\limits_0^T a(l,t)\beta(t)u_t(l,t)v(l,t)dt.$$

Выберем в качестве $v(x,t)$ в этом тождестве функцию

$$v(x,t) = \begin{cases} \int\limits_\tau^t u(x,\eta)d\eta; & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0; & \tau \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\tau \in [0,T]$ и произвольно. Легко видно, что эта функция принадлежит пространству $\hat{W}_2^1(Q_T)$ и $v_t = u$.

В результате итегрирования по частям получим

$$\int\limits_0^l (v_t^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0))dx+$$
$$+2\int\limits_0^\tau a(0,t)\alpha(t)v_t^2(0,t)a(0,t)dt - 2\int\limits_0^\tau a(l,t)\beta(t)v_t^2(l,t)dt =$$
$$= \int\limits_0^\tau (a(0,t)\alpha(t))_{tt}v^2(0,t)dt - \int\limits_0^\tau (a(l,t)\beta(t))_{tt}v^2(l,t)dt-$$

$$-\int_0^\tau\int_0^l a_t v_x^2 dxdt + 2\int_0^\tau\int_0^l c v_t v dxdt+$$

$$+v^2(0,0)(a(0,t)\alpha(t))_t|_{t=0} - v^2(l,0)(a(l,t)\beta(t))_t|_{t=0}. \tag{2.2}$$

Сделаем некоторые оценки. Заметим, что в силу условий теоремы существует такое положительное число c_0, что $\max\limits_{\bar{Q}_T}|c(x,t)| \leqslant c_0$ Применяя неравенство Коши, получим

$$2|\int_0^\tau\int_0^l c v_t v dxdt| \leqslant c_0\int_0^\tau\int_0^l (v^2+v_t^2)dxdt.$$

Рассмотрим теперь два первых слагаемых правой части равенства (2.2). Для того, чтобы их оценить, воспользуемся неравенствами

$$v^2(0,t) \leqslant 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,$$

$$v^2(l,t) \leqslant 2l\int_0^l v_x^2(x,t)dx + \frac{2}{l}\int_0^l v^2(x,t)dx,$$

которые легко следуют из представлений [6]

$$v(0,t) = \int_x^0 v_\xi(\xi,t)d\xi + v(x,t), \quad v(l,t) = \int_x^l v_\xi(\xi,t)d\xi + v(x,t).$$

С помощью этих неравенств, учитывая также условия теоремы, гарантирующие существование положительных чисел A_0, B_0 таких, что $|(a(0,t)\alpha(t))_{tt}| \leqslant A_0, \quad |(a(l,t)\beta(t))_{tt}| \leqslant B_0$, получим

$$|\int_0^\tau v^2(0,t)(a(0,t)\alpha(t))_{tt}dt| \leqslant A_0(2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2 dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt),$$

$$|\int_0^\tau v^2(l,t)(a(l,t)\beta(t))_{tt}dt| \leqslant B_0(2l\int_0^\tau\int_0^l v_x^2 dxdt + \frac{2}{l}\int_0^\tau\int_0^l v^2(x,t)dxdt).$$

Используя условия теоремы и неравенства [7]

$$v^2(0,0) \leqslant \int_0^l (\varepsilon v_x^2(x,0) + c(\varepsilon)v^2(x,0))dx,$$

$$v^2(l,0) \leqslant \int_0^l (\varepsilon v_x^2(x,0) + c(\varepsilon)v^2(x,0))dx,$$

получим оценки внеинтегральных слагаемых

$$|v^2(0,0)(a(0,t)\alpha(t))_t|_{t=0}| \leqslant A(\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx + c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,0)dx),$$

$$|v^2(l,0)(a(l,t)\beta(t))_t|_{t=0}| \leqslant B(\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx + c(\varepsilon)\int_0^l v^2(x,0)dx).$$

Благодаря полученным оценкам придем к неравенству

$$\int_0^l (u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0))dx \leqslant c_1\int_0^\tau\int_0^l (u^2+v_x^2)dxdt+$$

$$+c_2\varepsilon\int_0^l v_x^2(x,0)dx + c_3\int_0^l v^2(x,0)dx,$$

где $c_1 = max\{2l(A_0+B_0), \frac{2(A_0+B_0)}{l}, c_0\}, c_2 = (A+B), c_3 = c_2 c(\varepsilon)$.

Будем считать, не ограничивая общности, что $a(x,t) \geqslant a_0 > 0$, и выберем $\varepsilon = \frac{a_0}{2c_2}$. Тогда $a_0 - c_2\varepsilon = \frac{a_0}{2} > 0$. Перенеся теперь второе слагаемое правой части в левую, получим

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + \frac{a_0}{2} v_x^2(x,0))dx \leqslant c_1 \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (u^2+v_x^2)dxdt + c_3 \int\limits_0^l v^2(x,0)dx.$$

В силу представления (2.1)

$$v^2(x,0) \leqslant \tau \int\limits_0^\tau u^2(x,t)dt,$$

мы приходим к неравенству

$$\int\limits_0^l (u^2(x,\tau) + \frac{a_0}{2} v_x^2(x,0))dx \leqslant c_4 \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (u^2+v_x^2)dxdt, \tag{2.3}$$

где $c_4 = c_1 + c_3\tau^2$.

Введем вспомогательную функцию

$$w(x,t) = \int\limits_0^t u_x(x,\eta)d\eta.$$

Из этого представления следует, что

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau), v_x(x,0) = -w(x,\tau).$$

Тогда

$$v_x^2(x,t) \leqslant 2w^2(x,t) + 2w^2(x,\tau).$$

Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $\frac{a_0}{2} - 2c_4\tau > 0$ Пусть для определенности $\frac{a_0}{2} - 2c_4\tau \geqslant \frac{a_0}{4}$. Тогда для любого $\tau \in [0, \frac{a_0}{8c_4}]$

$$\int\limits_0^l (u^2+w^2)dx \leqslant c_5 \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l (u^2+w^2)dxdt,$$

где $_5 = 2c_4/\min\{1, \frac{a_0}{4}\}$. Применив лемму Гронуолла, получим, что $u(x,\tau) = 0$ для любого $\tau \in [0; \frac{a_0}{8c_4}]$. Если рассмотреть теперь задачу с начальными данными на $t = \frac{a_0}{8c_4}$, то в результате тех же рассуждений, что и выше, докажем, что $u(x,\tau) = 0$ при $\tau \in [0; \frac{a_0}{2c_4}]$. Продолжив этот процесс, за конечное число шагов получим, что $u = 0$ во всем цилиндре Q_T.

Для доказательства существования обобщенного решения применим метод компактности. Начнем с построения последовательности приближенных решений поставленной задачи методом Галеркина. Рассмотрим последовательность $\{w_n(x)\}$, где $w_n \in C^2(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$, которая является линейно независимой и образует полную систему в $W_2^1(\Omega)$. Будем искать приближенные решения задачи в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m d_k(t) w_k(x) \tag{2.4}$$

из соотношений

$$\int\limits_0^l (u_{tt}^m w_j + a u_x^m w_j' + c u^m w_j)dx + a(0,t)\alpha(t)u_t^m(0,t)w_j -$$

$$-a(l,t)\beta(t)u_t^m(l,t)w_j = \int\limits_0^l f w_j dx, \tag{2.5}$$

которые представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно $d_k(t)$:

$$\sum_{k=1}^m d_k''(t)A_{kj} + \sum_{k=1}^m (t)B_{kj}d_k' + \sum_{k=1}^m d_k(t)C_{kj} =$$
$$= f_j(t), \tag{2.6}$$

где $A_{kj} = \int\limits_0^l w_k(x)w_j(x)dx$,

$B_{kj} = \alpha(t)a(0,t)w_k(0)w_j(0) - \beta(t)a(l,t)w_k(l)w_j(l)$

$C_{kj} = \int\limits_0^l [a(x,t)w'_k(x)w'_j(x) + c(x,t)w_k(x)w_j(x)]dx,$

и $f_j(t) = \int\limits_0^l f w_j(x)dx.$

Добавим начальные условия

$$d_k(0) = \gamma_k, \quad d'_k(0) = \delta_k,$$

где γ_k и δ_k — коэффициенты сумм $\varphi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^m \gamma_k w_k(x)$, $\psi^m(x) = \sum\limits_{k=1}^m \delta_k w_k(x)$, аппроксимирующих при $m \to \infty$ эти суммы аппроксимируют $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в нормах $W_2^1(0,l)$ и $L_2(0,l)$ соответственно: $\varphi^m(x) \to \varphi(x)$ и $\psi^m(x) \to \psi(x)$. Таким образом, мы получили задачу Коши. Так как матрица A_{kj} является обратимой в силу выбора $w_k(x)$, то, учитывая условия теоремы, гарантирующие ограниченность коэффициентов системы, задача Коши однозначно разрешима и $d''_k \in L_1(0,T)$. Следовательно, последовательность приближенных решений $\{u^m\}$ построена.

Теперь докажем ограниченность этой последовательности в $W_2^1(Q_T)$. Для этого нужно получить априорные оценки. Умножим (2.5) на $d'_j(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. Получим

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l u^m_{tt}u^m_t dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a u^m_x u^m_{xt} dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l c u^m u^m_t dxdt +$$
$$+ \int\limits_0^\tau \alpha a (u^m_t(0,t))^2 dt - \int\limits_0^\tau \beta a (u^m_t(l,t))^2 dt = \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f u^m_t dt. \tag{2.7}$$

Проинтегрировав по частям последнее равенство, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l ((u^m_t(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u^m_x(x,\tau))^2)dx + \int\limits_0^\tau \alpha a(u^m_t(0,t))^2 dt -$$
$$- \int\limits_0^\tau \beta a(u^m_t(l,t))^2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^l (u^m_t(x,0))^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t(u^m_x)^2 dxdt +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^l a(u^m_x(x,0))^2 dx - \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l c u^m u^m_t dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l f u^m_t dxdt. \tag{2.8}$$

Применяя представление

$$u^m(x,\tau) = \int\limits_0^\tau u^m_t dt + u^m(x,0),$$

получим

$$\int\limits_0^l (u^m(x,\tau))^2 dx \leqslant 2\tau \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m_t)^2 dxdt + 2\int\limits_0^l (u^m(x,0))^2 dx.$$

Так как в силу условий теоремы

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l a_t(u^m_x)^2 dxdt \leqslant a_1 \int\limits_0^\tau\int\limits_0^l (u^m_x)^2 dxdt,$$

то приходим к неравенству

$$\int\limits_0^l ((u^m(x,\tau))^2 + (u^m_t(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u^m_x(x,\tau))^2)dx + 2\int\limits_0^\tau a(0,t)\alpha(t)(u^m_t(0,t))^2 dt -$$
$$-2\int\limits_0^\tau a(l,t)\beta(t)(u^m_t(l,t))^2 dt \leqslant \int\limits_0^l (u^m_t(x,0))^2 dx + \int\limits_0^l a(u^m_x(x,0))^2 dx +$$

$$+2\int_0^l (u^m(x,0))^2dx + M\int_0^\tau\int_0^l [(u_x^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2]dxdt + \int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt.$$

Учитывая свойства норм в пространствах L_2 и W_2^1 и выбор начальных условий задачи Коши, получим

$$\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+a(u_x^m)^2)dx + 2\int_0^\tau a\alpha(t)(u_t^m(0,t))^2dt-$$

$$-2\int_0^\tau a\beta(t)(u_t^m(l,t))^2dt \leqslant M\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+$$

$$+(u_x^m)^2)dxdt + ||f||_{L_2}^2 + N(||\psi||_{L_2}^2 + m||\varphi||_{W_2^1}^2).$$

Так как f является ограниченной функцией в $L_2(Q_T)$, φ в $W_2^1(Q_T)$, а ψ в $L_2(Q_T)$,то $||f||_{L_2}^2+$ $+||\varphi||_{W_2^1}^2+$ $+\,||\psi||_{L_2}^2 \leqslant K$, где K положительная константа. Тогда последнее неравенство примет вид

$$\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)_{t=\tau}dx \leqslant M\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)dxdt + K.$$

К этому неравенству применима лемма Гронуола, после ее применения и интегрирования по t от 0 до T получим

$$\int_0^\tau\int_0^l ((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)_{t=\tau}dxdt \leqslant \frac{1}{M}K(e^{MT}-1).$$

Пусть $\frac{1}{M}K(e^{MT}-1)=N$, тогда $||u^m||_{W_2^1}^2 \leqslant N$. Значит, последовательность функций ограничена в W_2^1, следовательно, можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу из этого же пространства, то есть к $u\in W_2^1(Q_T)$. Покажем, что этот предел и есть обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3).

Умножим каждое из соотношений (2.5) на свою функцию $D_j(t)$, $D_j(T)=0$, полученные равенства просуммируем по j от 1 до m, а затем проинтегрируем от 0 до T. Обозначим $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^m D_j(t)w_j(x)$. После интегрирования по частям получим тождество

$$\int_0^T\int_0^l (u_t^m\eta_t^m + au_x^m\eta_x^m + cu^m\eta^m)dxdt+$$

$$+\int_0^T \alpha a u_t^m(0,t)\eta^m dt - \int_0^T \beta a u_t^m(l,t)\eta^m dt =$$

$$=\int_0^T\int_0^l f\eta^m dxdt,$$

справедливое для любых $\eta(x,t)=\sum\limits_{j=1}^m D_j(t)w_j(x)$. Переходя к пределу при $m\to\infty$, получим тождество (1.4). Заметим, что это тождество выполняется пока лишь для функций $\eta(x,t)$. Однако известно [7], что множество всех функций такого вида плотно в $W(\hat{Q}_T)$, тождество для предельной функции $u(x,t)$ выполняется для любых функций $v(x,t)\in\hat{W}(Q_T)$.

Следовательно, теорема полностью доказана.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

[2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave mation with internal and boundary damping // Journal of applied physics, 111,014702 (2012).

[3] Корпусов М.О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: URSS, 2010.

[4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping // EJDE, 28, 1–10 (1998).

[5] Бейлин А.Б., Пулькина Л.С. Задача о продольных колебаниях стержня с динамическими граничными условиями // Вестник СамГУ. 2014. № 3(114). С. 9–19.

[6] Пулькина Л.С. Задача с динамическим нелокальным условием для псевдогиперболического уравнения // Известия вузов. Математика. 2016. № 9. С. 42–50.

[7] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

[8] Бейлин С.А. Об одной краевой задаче для волнового уравнения // Вестник СамГУ. 2011. № 5(86). С. 12–17.

References

[1] Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977 [in Russian].

[2] Tobias Louw, Scott Whitney, Anu Subramanian, and Hendrik Viljoen. Forced wave motion with internal and boundary damping. *Journal of applied physics*, 111,014702 (2012) [in English].

[3] Korpusov M.O. *Razrushenie v neklassicheskikh volnovykh uravneniiakh* [Destruction in nonclassical wave equations]. M.: URSS, 2010 [in Russian].

[4] Doronin G.G., Lar'kin N.A., Souza A.J. A hyperbolic problem with nonlinear second-order boundary damping. *EJDE*, 28, 1–10 (1998) [in English].

[5] Beylin A.B., Pulkina L.S. *Zadacha o prodol'nykh kolebaniiakh sterzhnia s dinamicheskimi granichnymi usloviiami* [A problem on longitudinal vibrations of a rod with dynamic boundary conditions]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2014, no. 3(114), pp. 9–19 [in Russian].

[6] Pulkina L.S. *Zadacha s dinamicheskim nelokal'nym usloviem dlia psevdogiperbolicheskogo uravneniia* [A problem with dynamic nonlocal condition for pseudohyperbolic equation]. *Izvestiia vuzov. Matematika* [Russian Mathematics. (Iz. VUZ)], 2016, no. 9, pp. 42–50 [in Russian].

[7] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973 [in Russian].

[8] Beylin S.A. *Ob odnoi kraevoi zadache dlia volnovogo uravneniia* [On a certain boundary problem for a wave equation]. *Vestnik SamGU* [Vestnik of Samara State University], 2011, no. 5(86), pp. 12–17 [in Russian].

V.A. Kirichek, L.S. Pulkina[2]

PROBLEM WITH DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS FOR A HYPERBOLIC EQUATION

We consider an initial-boundary problem with dynamic boundary condition for a hyperbolic equation in a rectangle. Dynamic boundary condition represents a relation between values of derivatives with respect of spacial variables of a required solution and first-order derivatives with respect to time variable. The main result lies in substantiation of solvability of this problem. We prove the existence and uniqueness of a generalized solution. The proof is based on the a priori estimates obtained in this paper, Galyorkin's procedure and the properties of Sobolev spaces.

Key words: dynamic boundary conditions, hyperbolic equation, generalized solution.

Статья поступила в редакцию 22/I/2017.
The article received 22/I/2017.

[2] *Kirichek Vitaliia Alexandrovna* (Vitalya29@gmail.com), *Pulkina Ludmila Stepanovna* (louise@samdiff.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, Samara, 34, Moskovskoye shosse, 443086, Russian Federation.