МАТЕМАТИКА

УДК 519.999

А.В. Дюжева[1]

ЗАДАЧА С ДИНАМИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В статье рассматривается начально-краевая задача с нелокальными динамическими граничными условиями для гиперболического уравнения, содержащими производную по времени первого и второго порядков. Такие условия могут возникать при изучении колебаний стержня, если его концы закреплены упруго с помощью пружин и масс, а также испытывают сопротивление среды, пропорциональное скорости их движения. Данная работа явяется продолжением работ [4; 5]. Доказаны существование и единственность обобщенного решения поставленной задачи. Доказательство базируется на полученных в работе априорных оценках и методе Галеркина.

Ключевые слова: нелокальная задача, динамические граничные условия, гиперболическое уравнение, обобщенное решение.

1. Предварительные сведения

В статье рассмотрена нелокальная задача для гиперболического уравнения, к которой может привести математическое моделирование процесса, связанного с колебаниями механической системы, в которой присутствуют демпфирующие устройства. Возникновение колебательных процессов в системе обусловленно многими причинами, а их наличие может привести к нарушению функционирования, а в некоторых случаях и к разрушению механической системы. Одним из способов уменьшить нежелательные эффекты колебаний является демпфирование. В случае, если размеры объекта, колебания которого исследуются, невелики, то режим на одном из его концов может оказывать существенное влияние на поведение объекта на другом конце. Этот эффект был замечен еще Стекловым В.А. в его работе [11]. Математически это выражается в том, что граничные условия становятся нелокальными. Именно этот случай рассмотрен в предлагаемой работе. Для параболического уравнения задача с подобными условиями была рассмотрена в работе [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{2.1}$$

в области $Q_T = (0,l)\times(0,T)$, где $l,T<\infty$ и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (2.1) в области Q_T, удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \tag{2.2}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} a(0,t)u_x(0,t) &= (\alpha_1(t)u(0,t))_t + (\beta_1(t)u(l,t))_t + \gamma_1 u_{tt}(0,t),\\ a(l,t)u_x(l,t) &= (\alpha_2(t)u(0,t))_t + (\beta_2(t)u(l,t))_t + \gamma_2 u_{tt}(l,t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где γ_1 и γ_2 постоянные, $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ -известные функции, причем будем предполагать, что выполняются следующие условия:

$$H1.\ a\in C(\bar{Q}_T),\ \ c\in C(\bar{Q}_T), a(x,t)\geqslant a_0, \forall (x,t)\in Q_T,$$
$$\varphi\in W_2^1(0,l),\ \ \psi\in L_2(0,l),\ \ f\in L_2(Q_T),$$
$$H2.\ \alpha_i,\beta_i\in C^1[0,T],$$
$$H3.\ \gamma_1\geqslant 0,\ \ \gamma_2\leqslant 0.$$

Дюжева Александра Владимировна (aduzheva@rambler.ru), кафедра математической физики, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

3. Разрешимость задачи

Обозначим
$$W(Q_T)=\{u: u\in W_2^1(Q_T),\ \ u_t(0,t)\in L_2(0,T),\ \ u_t(l,t)\in L_2(0,T),$$
$$\hat{W}(Q_T)=\{v: v\in W(Q_T), v(x,T)=0\}.$$
Введем понятие обобщенного решения, используя известную процедуру [3]: умножим (2.1) на функцю $v(x,t)\in\hat{W}(Q_T)$ и, после интегрирования по области Q_T, получаем равенство:
$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+ \tag{3.1}$$
$$+\int_0^T v_t(0,t)[\alpha_1(t)u(0,t)+\beta_1(t)u(l,t)-\gamma_1u_t(0,t)dt-$$
$$-\int_0^T v_t(l,t)[\alpha_2(t)u(0,t)+\beta_2(t)u(l,t)-\gamma_2(t)u_t(l,t)dt=\int_0^T\int_0^l fvdxdt.$$
Определение. Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $u\in W(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(x,0)=\varphi(x)$ и тождеству (3.1) для любой функции $v\in\hat{W}(Q_T)$.

Теорема. Пусть выполняются условия $H1-H3$, а также
$$\alpha_1(t)\xi_1^2+(\beta_1(t)-\alpha_2(t))\xi_1\xi_2-\beta_2(t)\xi_2^2\geqslant 0,\ \ \forall t\in[0,T],$$
$$\alpha_1'(t)\xi_1^2+2\alpha_2'(t)\xi_1\xi_2-\beta_2'(t)\xi_2^2\geqslant 0,\ \ \forall t\in[0,T],$$
$$\alpha_2'=\beta_1'.$$
Тогда существует единственное обобщенное решение задачи (2.1)-(2.3).

Заметим, что в силу условий теоремы найдутся числа $K>0$, $c_0>0$, $a_1>0$ такие, что
$$\max_{[0,T]}|\alpha_i(t),\ \ \beta_i(t)|\leqslant K,\ \ i=1,2,$$
$$\max_{\bar{Q}_T}|a(x,t)|\leqslant a_1,\ \ \max_{\bar{Q}_T}|c(x,t)|\leqslant c_0,.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в несколько этапов. Единственность докажем от противного, предполагая, что существует два решения поставленной задачи. Для доказательства существования сначала методом Галеркина построим приближенное решение задачи, получим априорные оценки, позволяющие выделить слабо сходящуюся последоватедьность и покажем, что ее предел и есть обобщенное решение задачи (2.1)–(2.3).

Единственность. Предположим, что существует два различных решения, $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (2.1)–(2.3). Тогда $u=u_1-u_2$ — решение соответствующей однородной задачи. Это означает, что $u(x,0)=0$ и выполняется тождество (3.1) с $f(x,t)=0$:
$$\int_0^T\int_0^l(-u_tv_t+au_xv_x+cuv)dxdt+$$
$$+\int_0^T v_t(0,t)[\alpha_1(t)u(0,t)+\beta_1(t)u(l,t)-\gamma_1u_t(0,t)]dt-$$
$$-\int_0^T v_t(l,t)[\alpha_2(t)u(0,t)+\beta_2(t)u(l,t)-\gamma_2u_t(l,t)]dt=0. \tag{3.2}$$
Положим в тождестве (3.2)
$$v(x,t)=\begin{cases}\int_\tau^t u(x,t)d\eta, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ 0, & \tau\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$
Выбранная таким образом функция принадлежит пространству $\hat{W}(Q)$. Заметим, что $v_t(x,t)=u(x,t)$.

Сделаем некоторые преобразования, интегрируя по частям в (3.2), после чего получим:
$$\frac{1}{2}\int_0^l[u^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)]dx= \tag{3.3}$$
$$=-\frac{\gamma_1}{2}u^2(0,\tau)+\frac{\gamma_2}{2}u^2(l,\tau)+\frac{1}{2}\int_0^\tau a_tv_x^2dt-\int_0^\tau\int_0^l cuvdxdt-$$
$$-\int_0^\tau\alpha_1(t)u^2(0,t)dt+\int_0^\tau\beta_2(t)u^2(l,t)dt+\int_0^\tau\int_0^l(\alpha_2-\beta_1)u(0,t)u(l,t)dxdt.$$

Сделаем некоторые оценки:

$$|\int_0^\tau \int_0^l cuvdxdt - \frac{1}{2}\int_0^\tau \int_0^l a_t v_x^2 dxdt| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_0}{2}(1+\tau^2)\int_0^\tau \int_0^l u^2 dxdt + \frac{a_1}{2}\int_0^\tau \int_0^l v_x^2 dxdt,$$

В силу условия H4, H3 теоремы и полученных оценок, имеем:

$$\frac{1}{2}\int_0^l [u^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)]dx \leqslant c_1 \int_0^T \int_0^l u^2 dxdt + a_1 \int_0^T \int_0^l v_x^2 dxdt, \tag{3.4}$$

где $c_1 = c_0(1+\tau^2)$. Введем теперь функцию $w(x,t) = \int_0^t u_x(x,\eta)d\eta$.

Из представления функции $v(x,t)$ получим:

$$v_x(x,t) = w(x,t) - w(x,\tau);$$
$$v_x(x,0) = -w(x,\tau).$$

Тогда

$$m_0 \int_0^l [u^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^2(x,t) + (w(x,t) - w(x,\tau))^2)dxdt,$$

где $m_0 = \min\{1, a_0\}$, $c_2 = \max\{c_1, a_1\}$. Отсюда получим, после преобразования $(w(x,t) - w(x,\tau))^2$ и оценки $2w(x,t)w(x,\tau)$ с помощью неравенства Коши:

$$\int_0^l [u_t^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx \leqslant$$
$$\leqslant 2c_3 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^2(x,t) + w^2(x,t))dxdt + 2c_3\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dx,$$

где $c_3 = \frac{c_2}{m_0}$. Пользуясь произволом, выберем τ так, чтобы $1 - 2c_3\tau \geqslant \delta > 0$. Пусть $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда для всех $\tau \in [0, \frac{1}{4c_3}]$

$$\int_0^l [u_t^2(x,\tau) + w^2(x,\tau)]dx \leqslant$$
$$\leqslant 2c_3 \int_0^\tau \int_0^l (u_t^2(x,t) + w^2(x,t))dxdt.$$

Применив к этому неравенству лемму Гронуолла [1], приходим к утверждению: $u(x,t) \equiv 0$ для $t \in [0, \frac{1}{4c_3}]$. Повторяя рассуждения для $t \in [\frac{1}{4c_3}, \frac{1}{2c_3}]$ и продолжая этот процесс, убедимся, что $u(x,t) \equiv 0$ во всей области Q_T. Это означает, что существует не более одного решения задачи (2.1)–(2.3).

Существование Для доказательства существования обобщенного решения построим сначала последовательность приближенных решений при помощи метода Галеркина.

Будем искать приближенное решение поставленной задачи (2.1)–(2.3)в виде

$$u^m(x,t) = \sum_{k=1}^m d_k(t)w_k(x), \tag{3.5}$$

где $\{w_k(x)\}_1^\infty$ — линейно независимая и полная в $W_2^1(0,l)$ система функций, в которой $w_k(x) \in C^2[0,l]$, из соотношений

$$\begin{gathered}\int_0^l (u_{tt}^m w_j(x) + a(x,t)u_x^m w_j'(x) + c(x,t)u^m w_j)dx + \\ + w_j(0)[(\alpha_1(t)u^m(0,t))_t + (\beta_1(t)u^m(l,t))_t + \gamma_1 u_{tt}^m(0,t)] - \\ - w_j(l)[(\alpha_2(t)u^m(0,t))_t + (\beta_2(t)u^m(l,t))_t + \gamma_2 u_{tt}(l,t)]dt = \\ = \int_0^l f(x,t)w_j dx.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Дополнительно потребуем, чтобы $(w_k, w_l)_{L_2} = \delta_{kl}$. Это условие не ограничиват общности, но упрощает выкладки. Подставим (3.5) в (3.6) и получим

$$(1 - \gamma_1 + \gamma_2)d_j''(t) + \sum_{k=1}^m d_k(t)\int_0^l [w_k'(x)w_j'(x) + cw_k(x)w_j(x)]dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{m} d_k(t)[\alpha_1(t)w_j(0)w_k(0)+\beta_1(t)w_j(0)w_k(l)]- \tag{3.7}$$
$$-\sum_{k=1}^{m} d_k(t)[\alpha_2(t)w_j(l)w_k(0)+\beta_2(t)w_j(l)w_k(l)]+$$
$$+\sum_{k=1}^{m} d_k'(t)[\gamma_1 w_j(l)w_k(0)-\gamma_2 w_j(0)w_k(l)]=f_j(t),$$

где $f_j(t)=\int_0^l f(x,t)w_j(x)dx$.

Обозначим:
$A_{kj}(t)=\int_0^l[w_k'(x)w_j'(x)+c(x,t)w_k(x)w_j(x)]dx+\alpha_1(t)w_k(0)w_j(0)+$
$+\beta_1(t)w_k(l)w_j(0)-\alpha_2(t)w_k(0)w_j(l)-\beta_2(t)w_k(l)w_j(l)$,
$B_{kj}=\gamma_1 w_j(l)w_k(0)-\gamma_2 w_j(0)w_k(l)$.

Тогда (3.7) можно переписать так:

$$(1-\gamma_1+\gamma_2)d_j''+\sum_{k=1}^{m} B_{kj}d_k'(t)+\sum_{k=1}^{m} A_{kj}(t)d_k(t)=f_j(t). \tag{3.8}$$

Это соотношение представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенную относительно старших производных, так как в силу H3 теоремы $(1-\gamma_1+\gamma_2)\neq 0$.

Добавив начальные условия

$$d_j(0)=\varphi_k; \qquad d_j'(0)=(\psi(x),w_k(x))_{L_2(0,l)}, \tag{3.9}$$

получаем задачу Коши. В начальных условиях φ_k подбираются так, что суммы $\varphi^m(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\varphi_k w_k(x)$ аппроксимируют при $m\to\infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(0,l)$. В силу условий теоремы коэффициенты системы (3.8) — ограниченные функции, а свободные члены $f_j(t)\in L_1(0,l)$. Поэтому задача Коши (3.8), (3.9) однозначно разрешима и $d_k''(t)\in L_1(0,T)$. Таким образом, последовательность приближенных решений $\{u^m(x,t)\}$ построена.

На следующем шаге доказательства покажем, что из построенной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся слабо к некоторой функции из $W(Q_T)$. Для этого нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и переходим.

Умножим (3.6) на $d_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до m и проинтегрируем по t от 0 до τ. В результате получим:

$$\int_0^\tau\int_0^l(u_{tt}^m u_t^m+a(x,t)u_{tx}^m u_x^m+c(x,t)u^m u_t^m)dxdt+$$
$$+\int_0^\tau u_t^m(0,t)[(\alpha_1(t)u^m(0,t))_t+(\beta_1(t)u^m(l,t))_t-\gamma_1 u_{tt}^m(0,t)]dt-$$
$$-\int_0^\tau u_t^m(l,t)[(\alpha_2(t)u^m(0,t))_t+(\beta_2(t)u^m(l,t))_t-\gamma_2 u_{tt}(l,t)]dt=$$
$$=\int_0^\tau\int_0^l f(x,t)u_t^m dxdt.$$

Проинтегрируем по частям: 1) $\int_0^\tau\int_0^l u_{tt}^m u_t^m dxdt=\frac{1}{2}\int_0^l(u_t^m(x,\tau))^2dx-\frac{1}{2}\int_0^l(u_t^m(x,0))^2dx$. 2) $\int_0^\tau\int_0^l a u_x^m u_{xt}^m dxdt=$ $=-\frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l a_t(u_x^m)^2dxdt+$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2dx-\frac{1}{2}\int_0^l a(x,0)(u_x^m(x,0))^2dx.$$

$$3)\int_0^\tau u_t^m(0,t)(\alpha_1(t)u^m(0,t))_t dt=\frac{1}{2}\alpha_1'(\tau)(u^m(0,\tau))^2-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1''(t)(u^m(0,t))^2dt+\int_0^\tau \alpha_1(t)(u_t^m(0,t))^2dt.$$

$$4)\int_0^\tau u_t^m(0,t)(\beta_1(t)u^m(l,t))_t dt=$$
$$=\int_0^\tau \beta_1'(t)u_t^m(0,t)u^m(l,t)dt+\int_0^\tau \beta_1(t)u_t^m(0,t)u_t^m(l,t)dt.$$

$$5) -\int_0^\tau u_t^m(l,t)(\alpha_2(t)u^m(0,t))_t dt =$$

$$= -\int_0^\tau \alpha_2(t)u_t^m(l,t)u_t^m(0,t)dt - \int_0^\tau \alpha_2'(t)u^m(l,t)u_t^m(0,t)dt +$$

$$+\int_0^\tau \alpha_2''(t)u^m(l,t)u^m(0,t)dt - \alpha_2'(\tau)u_t^m(l,\tau)u^m(0,\tau).$$

$$6) -\int_0^\tau u_t^m(l,t)(\beta_2(t)u^m(l,t))_t dt = -\frac{1}{2}\beta_2'(\tau)(u^m(l,\tau))^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\tau (u^m(l,t))^2\beta_2''(t)dt - \int_0^\tau \beta_2(t)(u_t^m(l,t))^2 dt.$$

$$7) -\int_0^\tau \gamma_2 u_t^m(l,t)u_{tt}^m(l,t)dt = -\frac{\gamma_2}{2}(u_t^m(l,\tau))^2.$$

$$8) \int_0^\tau \gamma_1 u_t^m(0,t)u_{tt}^m(0,t)dt = \frac{\gamma_1}{2}(u_t^m(0,\tau))^2.$$

Часть слагаемых в 3), 4), 5), 6), 7) и 8) содержат значения искомого решения и его производной в различных точках границы, и мы не можем освободиться от производной путем интегрирования, как это сделано в других слагаемых 3), 4) и 6). В подобных ситуациях мы обычно применяем представление функции через интеграл от производной, чтобы оценить значение функции на границе через значение производной во внутренних точках. Однако, в нашем случае это приведет к производной второго порядка, которая отсутствует под знаком интегралов в 1) и 2). Возникнет ситуация, когда в левой части под знаком интеграла производные не выше первого порядка, а в правой — есть производные второго порядка. Неравенство, которое может получиться, бесполезно для оценки решения, а возникшую ситуацию принято называть эффектом "потери гладкости".

Для преодаления этой трудности, заметим, что слагаемые в 3), 4), 5), 6) в силу условия H4 теоремы удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\tau \alpha_1(t)(u_t^m(0,t))^2 - \int_0^\tau \beta_2(t)(u_t^m(l,t))^2 dt +$$

$$\int_0^\tau (\beta_1(t) - \alpha_2(t))u_t^m(l,t)u_t^m(0,t)dt \geqslant 0.$$

К слагаемым 7) и 8) применим условие H3 нашей теоремы. В силу условия H6 сумма слагаемых в 4) и 5) равна нулю:

$$\int_0^\tau \beta_1'(t)u_t^m(0,t)u^m(l,t)dt - \int_0^\tau \alpha_2'(t)u^m(l,t)u_t^m(0,t)dt = 0.$$

Из условия H5 теоремы следует, что

$$\frac{1}{2}\alpha_1'(\tau)(u^m(0,\tau))^2 - \alpha_2'(\tau)u_t^m(l,\tau)u^m(0,\tau) - \frac{1}{2}\beta_2'(\tau)(u^m(l,\tau))^2 \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\tau \alpha_1''(t)(u^m(0,t))^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^\tau \beta_2''(t)(u^m(l,t))^2 dt -$$

$$-\int_0^\tau \alpha_2''(t)u^m(l,t)u^m(0,t)dt \geqslant 0.$$

Таким образом, мы приходим к неравенству:

$$\frac{1}{2}\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2 + a(x,\tau)(u_x^m(x,\tau))^2]dx \leqslant \tag{3.10}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_0^l [(u_t^m(x,0))^2 + a(x,0)(u_x^m(x,0))^2]dx + \int_0^\tau\int_0^l f u_t^m dxdt -$$

$$-\int_0^\tau\int_0^l c u^m u_t^m dxdt + \int_0^\tau\int_0^l a_t(u_x^m)^2 dxdt.$$

Используя неравенства Коши и Коши-Буняковского получим:

$$\int_0^\tau\int_0^l |f u_t^m| dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l f^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^l (u_t^m)^2 dxdt;$$

$$\int_0^\tau\int_0^l |c u^m u_t^m| dxdt \leqslant \frac{c_0}{2}\int_0^\tau\int_0^l [(u^m)^2 + (u_t^m)^2] dxdt.$$

Применяя полученные оценки к (3.10) и учитывая начальные условия задачи, имеем:

$$\frac{1}{2}\int_0^l [(u_t^m(x,\tau))^2+(u_x^m(x,\tau))^2]dx \leqslant$$

$$\leqslant \bar{L}||f||^2_{L_2(Q_T)}+||\phi||^2_{L_2(0,l)})+M\int_0^\tau\int_0^l((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)dxdt+ \tag{3.11}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l[(u_t^m(x,0))^2+a(x,0)(u_x^m(x,0))^2]dx.$$

Получим ещё одно неравенство. Возведем в квадрат обе части равенства

$$u^m(x,\tau)=\int_0^\tau u_\eta^m(x,\eta)d\eta+u^m(x,0),$$

а затем применим неравенство Коши-Буняковского. Получим

$$(u^m(x,\tau))^2\leqslant 2\tau\int_0^\tau(u_t^m(x,t))^2dt+2(u^m(x,0))^2.$$

Интегрируя это неравенство, получим:

$$\int_0^l(u^m(x,\tau))^2dx\leqslant 2\tau\int_0^\tau\int_0^l(u_t^m(x,t))^2dxdt+2\int_0^l(u^m(x,0))^2dx. \tag{**}$$

Добавим к (3.11) полученное неравенство (**). Тогда

$$\int_0^l[(u_t^m(x,\tau))^2+(u_x^m(x,\tau)+(u^m(x,\tau))^2)^2]dx\leqslant \tag{3.12}$$

$$\leqslant \bar{L}(||\phi||^2_{W_2^1(0,l)}+||\psi||^2_{L_2(0,l)}+||f||^2_{L_2(Q_T)})+$$

$$+\bar{M}\int_0^\tau\int_0^l((u^m(x,t))^2+(u_t^m(x,t))^2+(u_x^m(x,t))^2)dxdt.$$

Так как по условию теоремы $\varphi(x)\in W_2^1(0,l)$, $\psi(x)\in L_2(0,l)$, $f(x,t)\in L_2(Q_T)$, то нормы этих функций в правой части (3.12) ограничены. Это означает, что из (3.12) следует:

$$\int_0^l[(u_t^m(x,\tau)^2+(u_x^m(x,\tau))^2+(u^m(x,\tau))^2]dx\leqslant\ \leqslant M\int_0^\tau\int_0^l((u^m)^2+(u_t^m)^2+(u_x^m)^2)dxdt+K. \tag{3.13}$$

К (3.13) применим лемму Гронуолла, что приводит к неравенству

$$||u^m(x,t)||^2_{W_2^1(Q_t)}\leqslant C, \tag{3.14}$$

где C не зависит от m. Благодаря (3.14) и в силу компактности ограниченного множества в гильбертовом пространстве из последовательности $\{u^m(x,t)\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q_T)$ и равномерно по $t\in[0,T]$ в норме $L_2(0,l)$ к некоторому элементу $u(x,t)\in W(Q_T)$. Покажем, что этот предел и есть обобщенное решение задачи (2.1), (2.2), (2.3). За выделенной последовательностью сохраним то же обозначение во избежание излишней громоздскости.

Начальное условие $u(x,0)=\varphi(x)$ выполняется в силу сходимости подпоследовательности $u^m(x,t)$ к $u(x,t)$ в $L_2(0,l)$ и того, что $u^m(x,0)\to\varphi(x)$ в $L_2(0,l)$.

Докажем, что предел последовательности приближенных решений удовлетворяет тождеству (3.1). Для этого умножим каждое из соотношений (3.6) на $\delta_l(t)\in W_2^1(0,t),\delta_l(T)=0$; обозначим $\eta(x,t)=\sum_{l=1}^m\delta_l(t)w_l(x)$. Полученные равенства просуммируем по l от 1 до m и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T\int_0^l(u_{tt}^m\eta+u_x^m\eta_x+cu^m\eta)dxdt+$$

$$+\int_0^T\eta(0,t)[(\alpha_1(t)u^m(0,t))_t+(\beta_1(t)u^m(l,t))_t-\gamma_1(t)u_{tt}^m(0,t)]dt-$$

$$-\int_0^T\eta(l,t)[(\alpha_2(t)u^m(0,t))_t+(\beta_2(t)u^m(l,t))_t-\gamma_2(t)u_{tt}^m(l,t)]dt=$$

$$=\int_0^T\int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt.$$

Проинтегрируем первое слагаемое в интеграле слева, получим

$$\int_0^T\int_0^l(-u_t^m\eta_t(x,t)+u_x^m\eta_x+cu^m\eta)dxdt+\int_0^l u_t^m(x,0)\eta(x,0)dx+$$

$$+\int_0^T \eta(0,t)[(\alpha_1(t)u^m(0,t))_t + (\beta_1(t)u^m(l,t))_t - \gamma_1(t)u^m_{tt}(0,t)]dt-$$
$$-\int_0^T \eta(l,t)[(\alpha_2(t)u^m(0,t))_t + (\beta_2(t)u^m(l,t))_t - \gamma_2(t)u^m_{tt}(l,t)]dt = \tag{3.15}$$
$$= \int_0^T \int_0^l f(x,t)\eta(x,t)dxdt.$$

Зафиксировав в (3.15) $\eta(x,t)$, перейдем к пределу и увидим, что тождество (3.1) выполняется для предельной функции $u(x,t)$. Однако еще нельзя утверждать, что $u(x,t)-$ искомое обобщенное решение, так как тождество (3.1) пока выполняется не для всех функций $v(x,t) \in \hat{W}(Q_T)$, а только для функций вида $\eta(x,t) = = \sum\limits_{j=1}^{m} \delta_j(t)w_j(x)$. Но множество всех таких функций плотно в $\hat{W}(Q_T)$ (см.[3], с. 215), поэтому утверждение о существовании решения задачи из пространства $W(Q_T)$ доказано полностью.

Литература

[1] Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. с. 120.

[2] Кожанов А.И. Нелокальные задачи для линейных гиперболических уравнений с граничными условиями, содержащими временную производную // Доклады АМАН. 2010. Т. 12. № 1. С. 40–52

[3] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.

[4] Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1072–1077.

[5] Пулькина Л.С., Дюжева А.В. Нелокальная задача с переменными по времени краевыми условиями Стеклова для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2010. № 4(86). С. 56–64.

[11] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.

[12] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

References

[1] Gording L. *Zadacha Koshi dlia giperbolicheskikh uravnenii* [The Cauchy problem for hyperbolic equations]. M.: Iz-vo inostrannoi literatury, 1961, 120 p. [in Russian].

[2] Kozhanov A.I. *Nelokal'nye zadachi dlia lineinykh giperbolicheskikh uravnenii s granichnymi usloviiami, soderzhashchimi vremennuiu proizvodnuiu* [Nonlocal problems for linear hyperbolic equations with boundary conditions containing time-derivative]. In: *Doklady AMAN*, 2010, Vol. 12, no. 1б, pp. 40–52 [in Russian].

[3] Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1973, 407 p. [in Russian].

[4] Lazhetych N.L. *O klassicheskoi razreshimosti smeshannoi zadachi dlia odnomernogo giperbolicheskogo uravneniia vtorogo poriadka* [About the classical solvability of a mixed problem for a one-dimensional hyperbolic equation of the second order]. *Differents. uravneniia* [Differential equations], 2006, Vol. 42, No. 8, pp. 1072–1077 [in Russian].

[5] Pulkina L.S., Dyuzheva A.V. *Nelokal'naia zadacha s peremennymi po vremeni kraevymi usloviiami Steklova dlia giperbolicheskogo uravneniia* [Nonlocal problem with Steklov's time-varying boundary conditions for a hyperbolic equation]. [Vestnik of Samara State University. Natural science series], 2010, no. 4(86), pp. 56–64 [in Russian].

[11] Steklov V.A. *Osnovnye zadachi matematicheskoi fiziki* [Basic problems of mathematical physics]. M.: Nauka, 1983 [in Russian].

[12] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1977 [in Russian].

A.V. Dyuzheva[2]

PROBLEM WITH TIME-DEPENDENT BOUNDARY CONDITIONS FOR HYPERBOLIC EQUATION

In this paper, we consider a problem for hyperbolic equation with standard initial data and nonlocal dynamic conditions. Such conditions may arise when a thick short bar fixed by point forces and springs. The existence and uniqueness of the problem are proved. The proof is mainly based on a priori estimates and Galerkin procedure.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal conditions, generalized solution, dynamic conditions.

Статья поступила в редакцию 28/*II*/2017.
The article received 28/*II*/2017.

[2] *Dyuzheva Alexandra Vladimirovna* (aduzheva@rambler.ru), Department of Equations of Mathematical Physics, Samara National Research University, 34, Moskovskoye shosse, Samara, 443086, Russian Federation.