УДК 530.145 + 535.14

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СПОНТАННОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА И КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА[1]

© 2011 А.В. Горохов, Д.И. Умов[2]

Работа посвящена приложениям теоретико-групповых когерентных состояний к описанию нелинейных оптических эффектов. Изучен важный в современной квантовой информатике процесс спонтанного параметрического рассеяния. Показано, что использование суперпозиций когерентных состояний группы $SU(1,1)$ позволяет увеличить сжатие генерируемых фотонных пар.

Ключевые слова: квантовая оптика, когерентные состояния, группа Лоренца, сжатие.

Введение

Спонтанное параметрическое рассеяние света (СПР) представляет собой оптический параметрический процесс спонтанного распада фотонов, падающего на нелинейный кристалл лазерного излучения (накачки) с частотой ω_0 на пары фотонов: сигнальный (частоты ω_1) и холостой (частоты ω_2). При этом сумма частот родившихся фотонов равна частоте накачки (закон сохранения энергии):

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \tag{1}$$

Также должен выполняться закон сохранения импульса

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2,$$

поэтому сигнальный и холостой фотоны распространяются под некоторыми углами к фотону накачки.

Со времени предсказания и открытия СПР прошло уже около полвека, но интерес к исследованию и применению этого явления не ослабевает. Особый интерес представляет применение уникальных характеристик, рождаемых в СПР скоррелированных пар фотонов (бифотонов), в квантовой информатике (квантовая телепортация, квантовые вычисления). Как было показано Д.Н. Клышко (см. [1; 2]), СПР может быть описано только в рамках последовательной квантовой теории.

[1]Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 годы (Государственный контракт № 14.740.11.0063).

[2]Горохов Александр Викторович (gorokhov@ssu.samara.ru), Умов Дмитрий Иванович (udi-88@mail.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

В этой работе мы рассмотрим применение теоретико-групповых когерентных состояний, связанных с динамической симметрией задачи.

1. Квантовый параметрический усилитель и когерентные состояния

Изучим вначале модель, в которой лазерное поле накачки квантованное и имеется вырождение по частоте для сигнальной и холостой мод ($\omega_1 = \omega_2$). Гамильтониан такой системы имеет вид [3]:

$$\hat{H} = \hbar \left\{ \omega_0(\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 + 1/2) + \omega_1(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + 1/2) + g \left(\hat{a}_0^+ \hat{a}_1^2 + \hat{a}_0 \hat{a}_1^{+2} \right) \right\}, \tag{2}$$

где g — константа взаимодействия, $\hat{a}_i^+$ и $\hat{a}_i$ — операторы рождения и уничтожения фотонов в i-й моде ($i = 0, 1$).

Легко видеть, что гамильтониан (2) может быть выражен через генераторы группы Гейзенберга — Вейля W_1–$(\hat{a}_0^+, \hat{a}_0)$ и группы $SU(1,1)$:

$$\hat{K}_0 = (1/2) \left(\hat{a}_1^+ \hat{a}_1 + 1/2 \right), \quad \hat{K}_+ = (1/2) \hat{a}_1^{+2}, \quad \hat{K}_- = (1/2) \hat{a}_1^2. \tag{3}$$

Динамику системы будем описывать при помощи когерентных состояний (КС) группы $W_1 \otimes SU(1,1)$ — прямого произведения группы Гейзенберга — Вейля W_1 и группы $SU(1,1)$ — квантово-механического аналога трехмерной группы Лоренца [4].

Алгебру Ли группы W_1 свяжем с операторами рождения и уничтожения фотонов моды накачки. В результате (см., например [4; 5]) когерентные состояния, связанные с группой W_1, имеют вид:

$$|z_0 >= \exp\left(-|z_0|^2/2\right) \cdot \exp\left(z_0 \, \hat{a}^+\right) |0> . \tag{4}$$

Алгебра Ли группы $SU(1,1)$ порождается билинейными комбинациями операторов рождения и уничтожения параметрической моды. Напомним также основные сведения о когерентных состояниях для группы $SU(1,1)$. Эта группа имеет несколько серий унитарных неприводимых представлений, и, следовательно, для нее можно построить несколько систем когерентных состояний. Для нас в дальнейшем будут представлять интерес представления так называемой положительной дискретной серии, которые можно реализовать с помощью бозонных операторов рождения и уничтожения.

Коммутационные соотношения группы $SU(1,1)$ определены следующим образом:

$$\left[\hat{K}_0, \hat{K}_\pm\right] = \pm \hat{K}_\pm, \quad \left[\hat{K}_+, \hat{K}_-\right] = -2\hat{K}_0.$$

Инвариантный оператор:

$$\hat{K}^2 = \hat{K}_0 \left(\hat{K}_0 - \hat{I} \right) - \hat{K}_+ \hat{K}_- = k(k-1)\hat{I},$$

где $\hat{I}$ — единичный оператор. Принципиальным моментом для группы $SU(1,1)$ является то, что она неодносвязна, т. е. в этой группе не всякий замкнутый путь может быть стянутым в одну точку. Поэтому для подобных групп переходят к рассмотрению их односвязных универсальных накрывающих, получаемых "склеиванием" необходимого количества экземпляров исходных групп, число которых определяется рангом фундаментальной группы топологического пространства исходной группы Ли G. Фундаментальная группа $\pi_1(SU(1,1))$ изоморфна группе всех целых чисел Z, поэтому накрывающая группа $\widetilde{SU}(1,1)$ — квантово-механическая трехмерная группа Лоренца – содержит бесконечный центр Z и не является матричной группой. В результате для положительной дискретной серии T_k^+ группы $\widetilde{SU}(1,1)$ число k меняется непрерывно от нуля до бесконечности: $0 < k < \infty$, в отличие от $SU(1,1)$, где $k = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2, \ldots$.

Когерентное состояние для этой серии имеет вид:

$$|z_1> = \left(1 - |z_1|^2\right)^k \exp\left(z_1 \hat{K}_+\right) |k, 0>, \tag{5}$$

где $|k, 0> \equiv |0>$ — собственный вектор оператора $\hat{K}_0$, соответствующий его минимальному собственному значению k. Комплексный параметр z_1 принадлежит внутренности круга единичного радиуса ($|z_1| < 1$), стереографической проекции двумерного двухполостного гиперболоида, вложенного в трехмерное псевдоевклидово пространство.

Разложение единицы:

$$\hat{I} = \frac{2k-1}{\pi} \int\limits_{|z_1|<1} \frac{dRe(z_1) dIm(z_1)}{(1 - |z_1|^2)^2} |z_1>< z_1|$$

существует для $k > 1/2$.

Вычисляя инвариантный оператор алгебры Ли $SU(1,1)$, можно установить, что для реализации генераторов $SU(1,1)$ через бозонные операторы рождения и уничтожения одной моды возможны два значения $k = 1/4$ — четные фотонные состояния (т. е. КС группы $SU(1,1)$ разлагается в ряд по фотонным состояниям с четными значениями чисел квантов: $n_1 = 0,\ 2, \ldots$) и $3/4$ — нечетные состояния ($n_1 = 1,\ 3, \ldots$).

2. Динамика когерентных состояний

С использованием генераторов $SU(1,1)$ гамильтониан (2) представлен в виде:

$$\hat{H} = \hbar \left\{ \omega_0 (\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 + 1/2) + 2\omega_1 \hat{K}_0 + 2g \left(\hat{a}_0^+ \hat{K}_- + \hat{a}_0 \hat{K}_+ \right) \right\}. \tag{6}$$

Будем искать эволюцию соответствующих КС следующим образом [6]:

- Вычислим диагональный матричный элемент оператора Гамильтона в представлении КС:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(z, \bar{z}; t) = < z|\hat{H}|z>, \tag{7}$$

  где $\bar{z}$ — обозначение для комплексно-сопряженного z.

- Найдем решение дифференциального уравнения Гамильтона

$$\dot{z} = \{z, \mathcal{H}\}, \tag{8}$$

  определяющего траекторию в пространстве параметров КС, для заданных начальных условий.

Здесь символом $\{z, \mathcal{H}\}$ обозначена скобка Пуассона. Для функций F_1 и F_2 скобка равна [5]:

$$\{F_1, F_2\} = -\frac{i}{\hbar}\sum_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z^\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \bar{z}^\beta} - \frac{\partial F_1}{\partial \bar{z}^\beta}\frac{\partial F_2}{\partial z^\alpha}\right), \tag{9}$$

а величина $g_{\alpha\beta}$ вычисляется по формуле:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \ln K(z,\bar{z})}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \quad g_{\alpha\eta} g^{\eta\beta} = \delta_\alpha^\beta, \tag{10}$$

где

$$K(z,\bar{w}) =< z|w > / (< z|\,0 >< 0|w >)$$

является величиной в пространстве голоморфных функций, аналогичной δ-функции Дирака [5].

В последнем выражении и в формулах (7)–(9) под $z \equiv (z_0, z_1)$ и $w \equiv (w_0, w_1)$ понимаются комплексные параметры КС групп W_1 и $SU(1,1)$.

Вычисляя явный вид функции $\mathcal{H}$ и соответствующие скобки Пуассона и подставляя результат в (8), получим уравнения для параметров КС:

$$\dot{z}_0 = -\frac{i}{\hbar}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_0}, \quad \dot{z}_1 = -\frac{i\left(1-|z_1|^2\right)^2}{2\hbar k}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \bar{z}_1}, \tag{11}$$

где

$$\mathcal{H} = \hbar\left(\omega_0(z_0\bar{z}_0 + 1/2) + 2k\frac{\omega_1(z_1\bar{z}_1+1) + 2g(z_0\bar{z}_1 + \bar{z}_0 z_1)}{1 - z_1\bar{z}_1}\right). \tag{12}$$

В явном виде уравнения (11) следующие:

$$\dot{z}_0 = -i\left(\omega_0 z_0 + 2gkz_1/(1 - z_1\bar{z}_1)\right), \quad \dot{z}_1 = -i\left(\omega_1 z_1 + g\bar{z}_0 z_1^2\right). \tag{13}$$

Находя (численно) решения выведенных уравнений, можно рассчитать временную динамику средних значений чисел фотонов в лазерной $< n_0 >=< \hat{a}_0^+\hat{a}_0 >$ и параметрической модах $< n_1 >=< \hat{a}_1^+\hat{a}_1 >$.

Для нахождения сжатия в фотонной моде используется квадратурная величина, которая определена следующим образом [7]:

$$V = \left\langle X_1^2\right\rangle - \left\langle X_1\right\rangle^2, \tag{14}$$

где

$$X_1 = \frac{1}{4}\left(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^+\right), \quad X_1^2 = \frac{1}{16}\left(\hat{a}_1^2 + \hat{a}_1^{+2} + \hat{a}_1\hat{a}_1^+ + \hat{a}_1^+\hat{a}_1\right).$$

Фотонная мода считается сжатой, если $V < 1/4$.

Для КС группы SU(1,1) получим:

$$V = \left\langle X_1^2\right\rangle = \frac{k}{4}(1 + z_1 + \bar{z}_1 + z_1\bar{z}_1)/(1 - z_1\bar{z}_1). \tag{15}$$

Для модели СПР без вырождения ($\omega_1 \neq \omega_2$) с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hbar\left\{\omega_0(\hat{a}_0^+\hat{a}_0 + 1/2) + \omega_1(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2 + 1) + g\left(\hat{a}_0^+\hat{a}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_0\hat{a}_1^+\hat{a}_2^+\right)\right\} \tag{16}$$

легко видеть, что уравнения (13) сохраняют свой вид, но теперь они описывают динамику лазерной моды и бифотонов с частотами ω_1 и ω_2. Однако отличие от вырожденного случая состоит в том, что инвариантное квантовое число k здесь пробегает бесконечный ряд значений и равно $k = \frac{|\Delta n|+1}{2}$, где $\Delta n = n_1 - n_2$ — разность чисел квантов с частотами ω_1 и ω_2.

3. Суперпозиции, смеси и сжатие

В предыдущем параграфе мы изучали динамику поведения во времени когерентных состояний, которые являются частным случаем квантово-механических чистых состояний. Однако хорошо известно, что наиболее общие состояния в квантовой теории описываются с помощью матрицы плотности $\hat{\rho}$.

Для чистого состояния $|\Psi>$ матрица плотности имеет вид проектора

$$\hat{\rho} = |\Psi >< \Psi|,$$

тогда как смесь состояний задается как

$$\hat{\rho} = \sum_n |c_n|^2 \Psi_n >< \Psi_n|, \; \sum_n |c_n|^2 = 1.$$

Коэффициенты $|c_n|^2$ определяют вероятность реализации чистого состояния $|\Psi_n >$.

В этом параграфе мы изучим различие в поведении суперпозиций и смесей КС, соответствующих разным представлениям трехмерной группы Лоренца для вырожденного параметрического усилителя (гамильтониан вида (2)). Оказалось, что среднее число фотонов не различает статистическую смесь и чистую суперпозицию таких состояний. Сжатие же ведет себя по-разному в этих двух случаях.

Действительно, рассмотрим два типа начальных состояний:

1) чистую суперпозицию вида

$$|\Psi >= c_+|z_+ > + c_-|z_- >,$$

2) статистическую смесь

$$\hat{\rho} = |c_+|^2 |z_+ >< z_+| + |c_-|^2 |z_- >< z_-|$$

с одинаковыми коэффициентами $c_\pm$. Через $|z_\pm >$ обозначены КС в четном ($+$, $k = 1/4$) и нечетном ($-$, $k = 3/4$) случаях.

Легко видеть, что в том и другом случаях зависимость среднего числа фотонов в моде определяется одинаковыми выражениями

$$< n_1(t) >= |c_+|^2 < n_+(t) > + |c_-|^2 < n_-(t) > .$$

В то же время поведение сжатия во времени различает эти начальные состояния. Объяснение легко находится, если вспомнить, что оператор числа фотонов является четным, а квадратурный оператор X_1 не имеет определенной четности и обладает ненулевыми матричными элементами между состояниями с разной четностью.

Опуская детали вычислений, приведем выражения для параметра сжатия V для суперпозиции V_s и смеси V_m:

$$V_s = \frac{1}{16}\left(\frac{|c_+|^2(1 + z_+ + \bar{z}_+ + z_+\bar{z}_+)}{1 - z_+\bar{z}_+} + \frac{3|c_-|^2(1 + z_- + \bar{z}_- + z_-\bar{z}_-)}{1 - z_-\bar{z}_-}\right) -$$
$$-\frac{1}{2} Re \left(c_+\bar{c}_- \frac{(1 + z_+)(1 - |z_+|^2)^{1/4}(1 - |z_-|^2)^{3/2}}{(1 - z_+\bar{z}_-)^{3/2}}\right), \qquad (17)$$

$$V_m = \frac{1}{16}\left(\frac{|c_+|^2(1 + z_+ + \bar{z}_+ + z_+\bar{z}_+)}{1 - z_+\bar{z}_+} + \frac{3|c_-|^2(1 + z_- + \bar{z}_- + z_-\bar{z}_-)}{1 - z_-\bar{z}_-}\right). \qquad (18)$$

В формуле (17) последнее слагаемое соответствует интерференции КС с разной четностью, которая отсутствует в формуле (18) для смеси. Видно, что для суперпозиции чистых когерентных состояний параметр сжатия уменьшается.

4. Результаты численного моделирования

Численное решение системы выведенных комплексных дифференциальных уравнений находилось с использованием пакета Mathematica 6.0. На основании полученных численных решений мы строили траектории КС на комплексных плоскостях; графики зависимости среднего числа фотонов в модах от времени; временные зависимости вероятностей n- квантовых возбуждений; зависимости сжатия от времени в параметрической моде. При расчете учитывалось пространственное разбегание лазерной и параметрической мод и их затухание.

Разбегание моделировалось убыванием со временем константы взаимодействия g, которая была выбрана в виде

$$g = g(t) = g_0 \exp\left(-t^2/\tau^2\right),$$

здесь g_0 — начальное значение константы взаимодействия, пропорциональное величине нелинейной восприимчивости процесса [7], а параметр τ определяет длительность взаимодействия. Затухание учитывалось добавлением к частотам фотонов в гамильтониане и в уравнениях (13) малых мнимых добавок, имитирующих поглощение фотонов в среде.

Параметры модели обезразмеривались и варьировались в широких пределах. Здесь на рис. 1–3 приведены результаты одного из таких расчетов.

На рис. 1 показаны траектории когерентных состояний, при этом траектория КС параметрической моды (КС группы $SU(1,1)$) расположена внутри круга единичного радиуса — плоскости Лобачевского ($|z_1| < 1$). Рисунок 2 показывает перекачку энергии из лазерной моды в параметрическую моду, рис. 3 иллюстрирует временную динамику параметра сжатия для параметрической моды. В случае (a) начальным состоянием является суперпозиция КС фотонов с четными и нечетными числами квантов, а вариант ($б$) показывает расчет сжатия для статистической смеси таких состояний. Поскольку $V < 1/4$ параметрическая мода является сжатой, но для суперпозиции сжатие заметно сильнее.

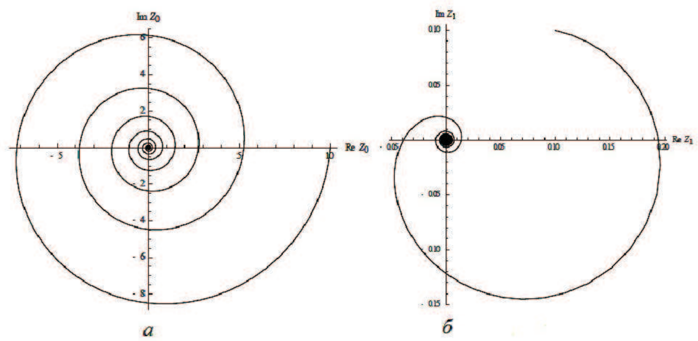

Рис 1. Траектории КС для лазерной моды (a) и для параметрической моды ($б$)$|z_1| < 1$. $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = 0,5$, $g_0 = 0,2$, $\tau = 5$, $z_0(0) = 10$, $z_1(0) = 0,1(1 + i)$

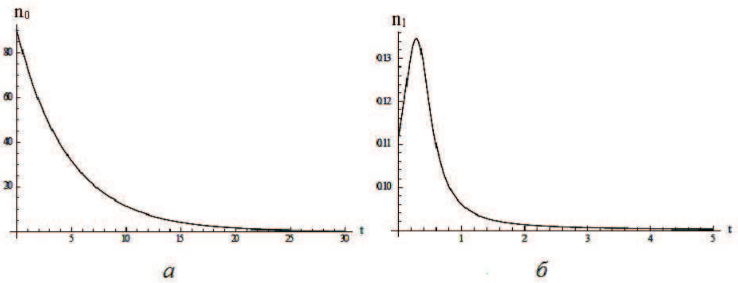

Рис 2. Временные зависимости средних чисел квантов в лазерной моде (*а*) и в моде, рождаемой в процессе параметрической генерации (*б*) (параметры те же, что и на рис. 1)

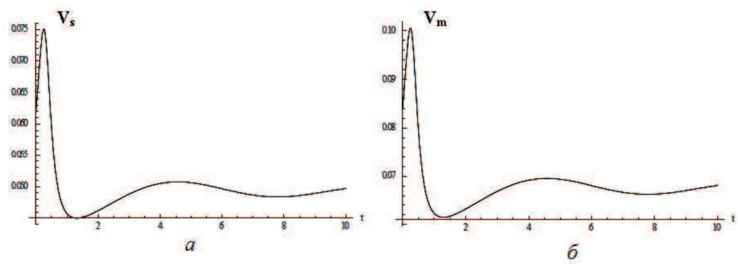

Рис 3. Временная зависимость параметра сжатия $V = V_s$ (*а*) и $V = V_m$ (*б*) $|c_+|^2 = |c_-|^2 = 1$

Заключение

В статье выведены уравнения, описывающие динамику фотонных мод как в модели вырожденного параметрического усилителя, так и без вырождения по частоте. Рассчитаны временные эволюции среднего числа фотонов и параметров сжатия. Учитывалось разбегание лазерной и параметрической мод, которое неизбежно есть в силу пространственного синхронизма этих мод. Расчеты наглядно свидетельствуют о генерации сжатия в параметрической моде. Расчет параметра сжатия также свидетельствует о том, что сжатие генерируемых пар фотонов можно увеличить, используя суперпозиции когерентных состояний соответствующих разным унитарным представлениям группы $SU(1,1)$ – четных и нечетных состояний для вырожденной модели СПР.

Более общий случай мы планируем исследовать отдельно. Кроме того, учет потерь в системе необходимо провести на основе исследования решений кинетических уравнений [6] для различных начальных состояний для матрицы плотности.

Литература

[1] Генерация бифотонного света в поляризационно-частотных Белловских состояниях / А.В. Бурлаков [и др.] // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. С. 738–745.

[2] Китаева Г.Х., Пенин А.Н. Спонтанное параметрическое рассеяние света // Письма в ЖЭТФ. 2005. Т. 82. Вып. 6. С. 388–394.

[3] Шляйх В.П. Квантовая оптика в фазовом пространстве / пер. с англ.; под ред. В.П. Яковлева. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2005. 760 с.

[4] Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1977. 272 с.

[5] Горохов А.В. Методы теории групп в задачах квантовой физики. Куйбышев: Изд-во КГУ, 1983. Ч. 3. 96 с.

[6] Горохов А.В. Алгебры Ли в квантовой оптике и молекулярной спектроскопии // Известия Ран. Сер. Физическая. 2011. Т. 75. № 2. С. 168–174.

[7] Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика / пер. с англ.; под ред. В.В. Самарцева. М.: Физматлит, 2000. 896 с.

[8] Умов Д.И., Горохов А.В. Квантовые нелинейные эффекты и когерентные состояния трехмерной группы Лоренца: сборник докладов VIII Всероссийского молодежного Самарского конкурса-конференции научных работ по оптике и лазерной физике. Самара, 2010. С. 140–145.

Поступила в редакцию 29/*IX*/2010;
в окончательном варианте — 5/*VI*/2011.

QUANTUM THEORY OF SPONTANEOUS SCATTERING OF LIGHT AND COHERENT STATES OF THREE-DIMENSIONAL LORENTZ GROUP

© 2011 A.V. Gorokhov, D.I. Umov[3]

The work is devoted to applications of group-theoretic coherent states to describe the nonlinear optical effects. Important in modern quantum information process of parametric down — conversion is studied. It is shown that the use of superpositions of coherent states of $SU(1,1)$ allows to increase the squeezing of generated photon pairs.

Key words: quantum optics, coherent states, Lorentz group, squeezing.

Paper received 29/*IX*/2010.
Paper accepted 5/*VI*/2011.

[3]Gorokhov Alexander Viktorovich (`gorokhov@ssu.samara.ru`), Umov Dmitriy Ivanovich (`udi-88@mail.ru`), the Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.