

## ВЛИЯНИЕ ДИПОЛЬ-ДИПОЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА МГНОВЕННУЮ СМЕРТЬ ПЕРЕПУТЫВАНИЯ СОСТОЯНИЙ ДВУХ АТОМОВ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ДВУХФОТОННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

© 2011 Е.К. Башкиров, А.М. Евдокимова, М.С. Мастюгин<sup>1</sup>

Исследовано влияние диполь-дипольного взаимодействия на перепутывание состояний двух атомов в различных начальных  $W$ -состояниях в модели Тависа-Каммингса с вырожденными двухфотонными переходами. Найдено, что степень перепутывания между атомами может увеличиваться благодаря диполь-дипольному взаимодействию между атомами. Показано также, что для некоторых начальных состояний такое взаимодействие может приводить к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

**Ключевые слова:** двухатомная модель, вырожденные двухфотонные переходы, диполь-дипольное взаимодействие, перепутывание, мгновенная смерть перепутывания.

Как хорошо известно, любая технология в физике квантовых вычислений базируется на перепутанных состояниях. Поэтому в настоящее время большое внимание уделяется исследованию различных схем генерации и механизмов сохранения перепутанных состояний. Для практических целей квантовых вычислений пригодны лишь долгоживущие атомные перепутанные состояния. Такие состояния наблюдались в последнее время в ряде экспериментов с ионами и атомами в магнитных и оптических ловушках [1]. Однако во многих случаях возникающие атомные перепутанные состояния оказываются нестабильными. В частности, в случае атомов, взаимодействующих с электромагнитным полем в высокочастотных резонаторах и ловушках, нестабильность атомных перепутанных состояний обусловлена осцилляциями Раби. Исчезновение квантовых корреляций между атомами за счет взаимодействия с окружением получило название мгновенной смерти перепутывания. В ряде недавних работ было показано, что эффект мгновенной смерти перепутывания можем быть ослаблен или полностью сведен на нет за счет включения диполь-дипольного взаимодействия для определенных перепутанных начальных состояний системы [2; 3]. При этом в работе [2] исследована модель двух двухуровневых атомов с невырожденными двухфотонными переходами, а в работе [3] — двухатомная модель с однофотонными переходами. Физически диполь-дипольное взаимодействие можно увеличить, уменьшая относительное

<sup>1</sup>Башкиров Евгений Константинович ([bash@ssu.samara.ru](mailto:bash@ssu.samara.ru)), Евдокимова Анна Михайловна, Мастюгин Михаил Сергеевич ([mast12basket@rambler.ru](mailto:mast12basket@rambler.ru)), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

расстояние между атомами в резонаторе или ионами в магнитной ловушке Пауля. Преимущество такой схемы заключается в том, что относительное расстояние между атомами или ионами можно легко контролировать. В настоящее время в современных магнитных ловушках Пауля охлажденные атомы могут быть заперты на расстояниях порядка длины волны излучения. В этом случае параметр диполь-дипольного взаимодействия становится сравнимым с константой диполь-фотонного взаимодействия. В связи с вышесказанным представляет интерес продолжить исследования эффекта мгновенной смерти перепутывания в системах дипольно связанных атомов. В настоящей работе рассмотрено влияние диполь-дипольного взаимодействия на перепутывание атомных состояний в двухатомной модели с вырожденными двухфотонными переходами.

Рассмотрим два идентичных двухуровневых атома, резонансно взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе посредством вырожденных двухфотонных переходов, при наличии прямого диполь-дипольного взаимодействия между атомами. В представлении взаимодействия и приближении вращающейся волны гамильтониан такой модели можно представить в виде:

$$H_I = \hbar g \sum_{i=1}^2 (a^{+2} \sigma_i^- + \sigma_i^+ a^2) + \hbar \Omega (\sigma_1^+ \sigma_2^- + \sigma_2^+ \sigma_1^-). \quad (1)$$

где  $a^+$  и  $a$  — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды,  $\sigma_i^+$  и  $\sigma_i^-$  — повышающий и понижающий оператор в  $i$ -ом атоме ( $i = 1, 2$ ),  $g$  — константа взаимодействия атомов с полем и  $\Omega$  — константа диполь-дипольного взаимодействия атомов.

Обозначим через  $|+\rangle$  и  $|-\rangle$  — возбужденное и основное состояние двухуровневого атома. Тогда двухатомная волновая функция может быть представлена в виде комбинации волновых векторов вида  $|\alpha, \beta\rangle = |\alpha\rangle |\beta\rangle$ , где  $\alpha, \beta = +, -$ . Атом-полевая система в идеальном резонаторе обладает унитарной динамикой, которая в представлении взаимодействия описывается оператором эволюции вида  $U_I(t) = \exp(-iH_I t/\hbar)$ . Если система, включающая атомы и поле, находится в начальный момент времени в чистом состоянии, то ее вектор состояния в любой момент времени в представлении взаимодействия может быть представлен в виде

$$|\Psi(t)\rangle = U_I(t)|\Psi\rangle(0). \quad (2)$$

В двухатомном базисе  $|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$  оператор эволюции  $U_I(t)$  для рассматриваемой модели может быть записан как [4]

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_{11} &= 1 + 2a^2 \frac{A}{\lambda} a^{+2}, & U_{14} &= 2a^2 \frac{A}{\lambda} a^2, & U_{41} &= 2a^{+2} \frac{A}{\lambda} a^{+2}, & U_{44} &= 1 + 2a^{+2} \frac{A}{\lambda} a^2, \\ U_{12} &= U_{13} = a^2 \frac{B}{\theta}, & U_{21} &= U_{31} = \frac{B}{\theta} a^{+2}, & U_{24} &= U_{34} = \frac{B}{\theta} a^2, & U_{42} &= U_{43} = a^{+2} \frac{B}{\theta}, \\ & & & & & & U_{22} &= U_{33} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\exp \left[ -i \frac{g}{2} (\alpha + \theta) t \right]}{4\theta} \left\{ [1 - \exp(i g \theta t)] \alpha + 2\theta \exp(i \frac{g}{2} (3\alpha + \theta) t) + \theta [1 + \exp(i g \theta t)] \right\},$$

$$U_{23} = U_{32} =$$

$$= \frac{\exp \left[ -i \frac{g}{2} (\alpha + \theta) t \right]}{4\theta} \left\{ [1 - \exp(i g \theta t)] \alpha - 2\theta \exp(i \frac{g}{2} (3\alpha + \theta) t) + \theta [1 + \exp(i g \theta t)] \right\},$$

где

$$A = \exp \left[ -i \frac{g\alpha}{2} t \right] \left\{ \cos \left( \frac{g\theta}{2} t \right) + i \frac{\alpha}{\theta} \sin \left( \frac{g\theta}{2} t \right) \right\} - 1,$$

$$B = \exp \left[ -i \frac{g}{2} (\alpha + \theta) t \right] [1 - \exp(i g \theta t)]$$

и  $\alpha = \frac{\Omega}{g}$ ,  $\lambda = 2(2a^{+2}a^2 + a^2a^{+2})$ ,  $\theta = \sqrt{8(a^{+2}a^2 + a^2a^{+2}) + \alpha^2}$ .

Предположим, что атом-полевая система приготовлена в начальный момент времени в перепутанном состоянии  $W$ -типа вида

$$|\Psi(0)\rangle = a|+, -, 0\rangle + b|-, +, 0\rangle + c|-, -, 2\rangle, \quad (4)$$

где коэффициенты удовлетворяют условию нормировки  $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$ . Заметим, что в настоящее время предложено большое число схем реализации таких перепутанных состояний (см. ссылки в [3]).

Используя соотношения (2)–(4), можно представить временную волновую функцию системы в виде

$$|\Psi(t)\rangle = X_1|+, -, 0\rangle + X_2|-, +, 0\rangle + X_3|-, -, 2\rangle, \quad (5),$$

где

$$X_1 = (U_{22})_0 a + (U_{23})_0 b + \sqrt{2} \frac{B_0}{\theta_0} c,$$

$$X_2 = (U_{23})_0 a + (U_{23})_0 b + \sqrt{2} \frac{B_0}{\theta_0} c,$$

$$X_3 = \sqrt{2} \frac{B_0}{\theta_0} a + \sqrt{2} \frac{B_0}{\theta_0} b + (1 + 4 \frac{A_0}{\lambda_0}) c.$$

Здесь мы ввели обозначение  $O_+ = \langle n|O|n\rangle$ , где  $O$  – произвольный оператор, зависящий от переменных поля и  $|n\rangle$  – полевое состояние с определенным числом фотонов.

Информация относительно перепутывания состояний атомов содержится в редуцированной атомной матрице плотности  $\rho_A(t)$ , которая может быть получена при усреднении полной матрицы системы "атомы+поле"  $\rho_{AF}(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$  по переменным резонаторного поля

$$\rho_A(t) = Tr_F \rho_{AF}(t). \quad (6)$$

В двуатомном базисе  $|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle$  редуцированная матрица плотности (6) может быть записана в виде

$$\rho_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |X_1|^2 & X_1 X_2^* & 0 \\ 0 & X_2 X_1^* & |X_2|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |X_3|^2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

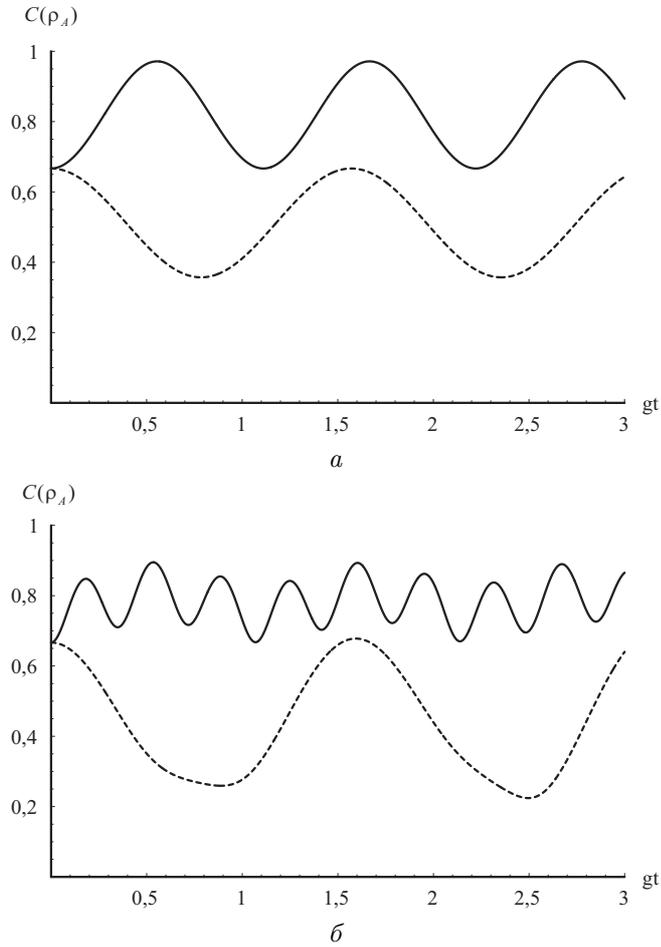


Рис. 1. Временная зависимость параметра перепутывания  $C(\rho_A)$  для двухатомной системы начальным состоянием (4) и значениями коэффициентов:  $a = b = c = 1/\sqrt{3}$  (а) и  $a = \sqrt{2}/3, b = c = 1/\sqrt{3}$  (б). Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = \Omega/g = 4$  (сплошные линии) и  $\alpha = \Omega/g = 0$  (штриховые линии)

Для количественной оценки степени перепутывания двух двухуровневых атомов воспользуемся критерием перепутанности двух кубитов Вуутерса [5]. Для редуцированной атомной матрицы плотности (8) соответствующий параметр перепутывания дается выражением

$$C(\rho_A) = 2 \max\{0, |X_1 X_2|\}. \quad (9)$$

На рис. 1 представлены результаты численного моделирования параметра перепутывания (9) для различного значения параметра диполь-дипольной связи и начального состояния системы вида (4).

Из рисунка хорошо видно, что для обоих начальных состояний эффект мгновенной смерти перепутывания атомов отсутствует, и диполь-дипольное взаимодействие приводит к увеличению степени перепутывания атомов. Зависимость максимального значения параметра перепутывания от параметра диполь-дипольной связи  $\alpha$  представлена на рис. 2. Максимальная степень перепутывания достига-

ется для рассматриваемого начального состояния системы ( $a = b = c = 1/\sqrt{3}$ ) в случае, когда параметр дипольного взаимодействия атомов  $\alpha = 5, 5$ .

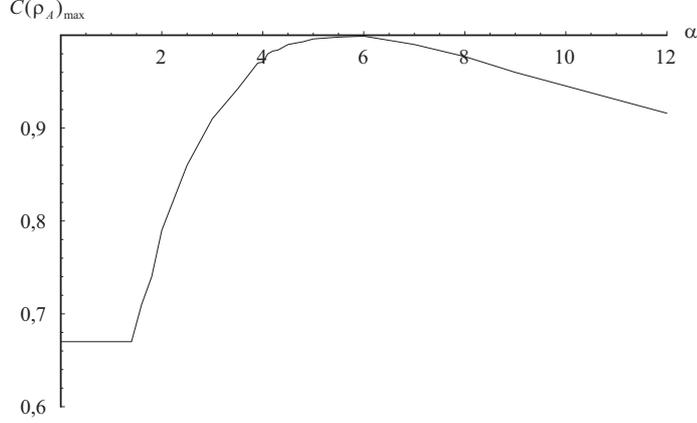


Рис. 2. Зависимость максимального значения параметра перепутывания  $C(\rho_A)_{max}$  от параметра диполь-дипольной связи  $\alpha = \Omega/g$ . Начальное состояние двухатомной системы имеет вид (4) для  $a = b = c = 1/\sqrt{3}$

Рассмотрим теперь другое начальное перепутанное состояние  $W$ -типа:

$$|\Psi(0)\rangle = a|+, +, 0\rangle + b|+, -, 2\rangle + c|-, +, 2\rangle.$$

В этом случае временная волновая функция системы может быть записана в виде

$$|\Psi(0)\rangle = X_1|+, +, 0\rangle + X_2|+, -, 2\rangle + X_3|-, +, 2\rangle + X_4|-, -, 4\rangle, \quad (10)$$

$$X_1 = \left(1 + 4\frac{A_2}{\lambda_2}\right) a + \sqrt{2}\frac{B_2}{\theta_2} b + \sqrt{2}\frac{B_2}{\theta_2} c,$$

$$X_2 = \sqrt{2}\frac{B_2}{\theta_2} a + (U_{22})_2 b + (U_{23})_2 c,$$

$$X_3 = \sqrt{2}\frac{B_2}{\theta_2} a + (U_{23})_2 b + (U_{22})_2 c,$$

$$X_4 = 4\sqrt{6}\frac{A_2}{\lambda_2} a + \sqrt{12}\frac{B_2}{\theta_2} b + \sqrt{12}\frac{B_2}{\theta_2} c.$$

В двухатомном базисе соответствующая редуцированная атомная матрица плотности есть

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |X_1|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |X_2|^2 & X_2 X_3^* & 0 \\ 0 & X_3 X_2^* & |X_3|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |X_4|^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Параметр перепутывания, соответствующий атомной матрице плотности (11), дается выражением

$$C(\rho_A) = 2\max\{0, |X_2 X_3| - |X_1 X_4|\}. \quad (12)$$

На рис. 3 представлены результаты численного моделирования параметра перепутывания (12) для различного значения параметра диполь-дипольной связи и начального состояния системы вида (10) с коэффициентами:  $a = b = c = 1/\sqrt{3}$  ( $a$ )

и  $a = \sqrt{2/3}, b = c = 1/\sqrt{6}$  (б). В этом случае в отсутствие диполь-дипольного взаимодействия атомов в системе за счет наличия осцилляций Раби имеет место мгновенная смерть перепутывания. Для первого состояния (рис. 3, а) при достаточно больших значениях параметра диполь-дипольного взаимодействия эффект мгновенной смерти перепутывания исчезает, для второго состояния включение диполь-дипольного взаимодействия не приводит к исчезновению указанного эффекта.

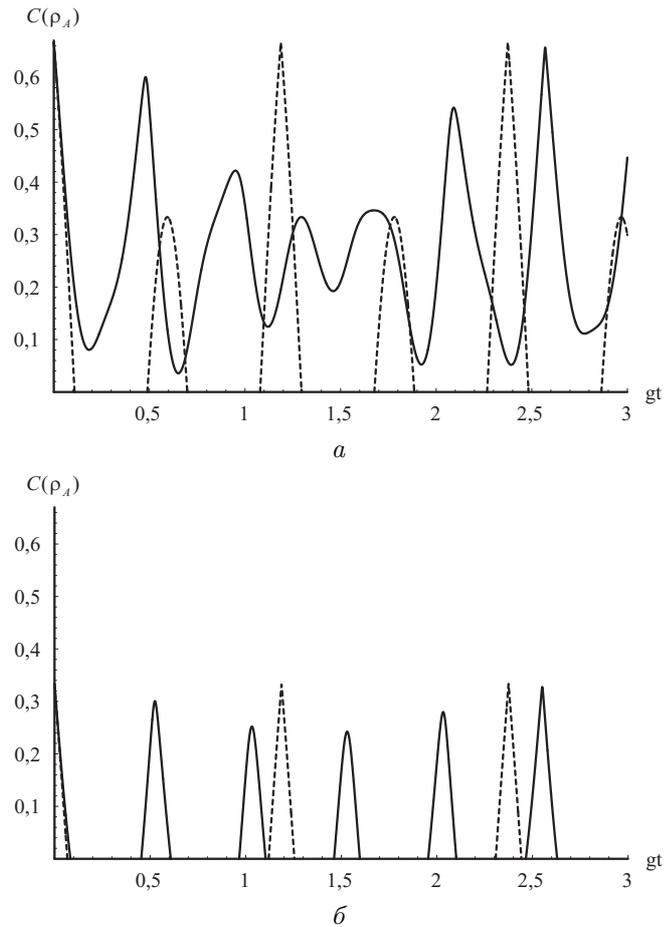


Рис. 3. Временная зависимость параметра перепутывания  $C(\rho_A)$  для двухатомной системы с начальным состоянием (10) и значениями коэффициентов:  $a = b = c = 1/\sqrt{3}$  (а) и  $a = \sqrt{2/3}, b = c = 1/\sqrt{6}$ . Параметр диполь-дипольного взаимодействия  $\alpha = \Omega/g = 10$  (сплошные линии) и  $\alpha = \Omega/g = 0$  (штриховые линии)

Таким образом, в настоящей работе мы исследовали влияние прямого диполь-дипольного взаимодействия двухуровневых атомов на динамику их перепутывания при взаимодействии с одномодовым электромагнитным полем в идеальном резонаторе посредством вырожденных двухфотонных взаимодействий. В качестве начального состояния системы "атомы+поле" выбирались различные перепутанные состояния W-типа. Показано, что для некоторых начальных состояний диполь-дипольное взаимодействие может приводить к исчезновению эффекта мгновенной смерти перепутывания.

## Литература

- [1] Schumacker D., Westmoreland M.D. Quantum Processes, Systems, and Information. New York: Oxford University Press, 2010. 469 p.
- [2] Zhang G-feng, Chen Zi-yu. The entanglement character between atoms in the non-degenerate two photons Tavis–Cummings model Optics Communications. 2007, V. 275. P. 274–277.
- [3] Li Chen, Shao Xiao-Qiang, Zhang Shou. The influence of dipole-dipole interaction and detuning on the sudden death of entanglement between two atoms in the Tavis-Cummings model // Chinese Physics B. 2009. V. 18. № 3. P. 888–893.
- [4] Bashkirov E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise // Laser Phys. Lett. 2006. V. 3. № 3. P. 145–150.
- [5] Wootters W.K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 10. P. 2245–2248.

Поступила в редакцию 18/X/2010;  
в окончательном варианте — 18/X/2010.

## THE INFLUENCE OF DIPOLE-DIPOLE INTERACTION ON THE SUDDEN DEATH OF ENTANGLEMENT OF TWO ATOMS WITH DEGENERATE TWO-PHOTON TRANSITIONS

© 2011 E.K. Bashkirov, A.M. Evdokimova, M.S. Mastuygin<sup>2</sup>

The influence of dipole-dipole interaction on the entanglement between two atoms with different initial W-like states in Tavis-Cummings model with degenerate two-photon transitions has been investigated. The results show that the entanglement between two atoms can be increased by means of dipole-dipole interaction and for some initial states the sudden death effect can be weakened.

**Key words:** two-atom model, degenerate two-photon transitions, dipole-dipole interaction, entanglement, sudden death of entanglement.

Paper received 18/X/2010.

Paper accepted 18/X/2010.

---

<sup>2</sup>Bashkirov Evgeniy Konstantinovich ([bash@ssu.samara.ru](mailto:bash@ssu.samara.ru)), Evdokimova Anna Mihailovna, Mastuygin Mihail Sergeevich ([mast12basket@rambler.ru](mailto:mast12basket@rambler.ru)), the Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.