

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ,  
УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ  
С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ<sup>1</sup>**© 2011 Н.В. Абрамов<sup>2</sup> Р.Г. Мухарлямов<sup>3</sup>

Приводятся результаты исследований по моделированию динамики сложных систем, содержащих элементы различной физической природы, решению задач динамики и управления твердым телом и робототехническими системами. Определяются необходимые условия устойчивости решений уравнений динамики, и предлагается алгоритм построения уравнений возмущений связей, гарантирующий стабилизацию связей при численном решении. Некоторые результаты решения прикладных задач иллюстрируют эффективность описываемых методов.

**Ключевые слова:** механика, программные связи, реакция, устойчивость, численное решение, стабилизация, динамика, уравнение, построение, система.

**Введение**

Современные методы моделирования динамики сложных систем предполагают обеспечение выполнения требуемых свойств функционирования на этапе составления уравнений динамики. Динамические аналогии позволяют использовать уравнения и методы классической механики для составления уравнений динамики управляемых систем, содержащих элементы различной физической природы, и исследования ее кинематических и динамических свойств.

Существенной проблемой в решении систем дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений динамики и уравнений связей, является стабилизация связей [1; 2]. Уравнения связей, наложенных на систему, задаются функциями, принимающими нулевые значения на ее решениях, совместимых со связями. Если считать значения этих функций за параметры, оценивающие отклонения от связей, то задача стабилизации связей ставится как проблема ограничения этих параметров за счет дополнительных сил или соответствующей модификации реакций связей.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 10-01-00381.

<sup>2</sup>Абрамов Николай Васильевич (abramoff@mail.ru), кафедра прикладной математики и вычислительной техники Самарского государственного строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

<sup>3</sup>Мухарлямов Роберт Гарабшевич (rmuharliamov@sci.pfu.edu.ru), кафедра теоретической механики Российского университета дружбы народов, 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6.

Значения параметров, отличные от нуля, можно рассматривать как возмущения связей, и изменение их во времени происходит в соответствии с решением системы дифференциальных уравнений возмущений связей, правые части которых определяются дополнительными силами. Если уравнения динамики исходной системы и уравнения возмущений связей рассматривать как систему дифференциальных уравнений расширенной системы, то необходимым условием стабилизации связей является асимптотическая устойчивость решения расширенной системы по отношению к части переменных, соответствующей возмущениям связей. Таким образом, моделирование процессов управления сложными динамическими системами с учетом стабилизации связей одновременно с построением уравнений динамики сложных систем требует также определения реакций связей, обеспечивающих устойчивость решений по отношению к уравнениям связей, стабилизацию при численном решении и инвариантность по отношению к возмущениям. Решение задачи управления динамикой твердого тела, систем твердых тел, задач небесной механики, космической баллистики и ракетодинамики, транспортных и других систем с учетом стабилизации связей может быть получено с необходимой точностью при использовании простых численных методов.

## 1. Построение уравнений динамики сложных систем

Синтез управления современными динамическими объектами связан с исследованием многомерных нелинейных нестационарных систем, которые могут содержать элементы различной физической природы: механические, электрические, электронные, гидравлические, пневматические и другие устройства. Для моделирования динамики таких систем вводится унифицированный набор переменных, через которые определяются динамические показатели системы и уравнения классической механики [3; 4].

Требуемые свойства системы и цели управления выражаются уравнениями связей, реакции которых могут быть рассмотрены как управляющие силы, действующие на рассматриваемую систему. Задача управления динамикой сводится к определению управляющих воздействий посредством решения системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), составленных из уравнений динамики и уравнений связей:

$$\frac{dq^i}{dt} = \nu^i \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \nu^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = Q_i - \frac{\partial D}{\partial \nu^i} + f_i + \sum_{k=1}^M b_{ik} u^k, \quad (1.1)$$

$$f^l(q^i, t) = 0, \quad \varphi^s(q^i, \nu^j, t) = 0, \quad (1.2)$$

где  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, r$ ,  $s = r+1, \dots, m$ . В частности, уравнения связей могут описывать требуемый закон движения системы  $q^i = f^i(t)$ . Здесь  $q^i, \nu^i, Q_i, f_i, u^k$  — соответственно обобщенные координаты, скорости, силы, внешние возмущения и управляющие воздействия,  $L$  — лагранжиан,  $D$  — диссипативная функция. Выражение целей управления уравнениями связей оказывается предпочтительным, так как обычно цель управления накладывает ограничения на фазовые координаты объекта, но не на координаты управляющих устройств. Если число  $M$  управлений равно числу  $m$  уравнений связей и  $b_{ik} = \partial \varphi^k / \partial \nu^i$ ,  $\partial \varphi^l / \partial \nu^i = \partial f^l / \partial q^i$ , то управления  $u^k$  соответствуют реакциям связей, и приложенные силы обеспечивают движение по многообразию, соответствующему уравнениям связей или по

траектории. В случае  $M > m$  остается возможность управления движением по многообразию или вдоль траектории.

Известный способ определения реакций связей в случае  $M = m$  или управляющих воздействий в общем случае приводит к неустойчивости решения уравнений динамики по отношению к уравнениям связей, так как множители Лагранжа определяются из условий

$$\frac{df^l}{dt} = \varphi^l, \quad \frac{d\varphi^k}{dt} = 0 \quad (1.3)$$

с вычислением производных  $d\varphi^k/dt$  в силу уравнений динамики (1.1).

Очевидно, система уравнений (1.3) имеет решение

$$f^l = c_1^l t + c_0^l, \quad \varphi^k = c^k,$$

что неизбежно приводит к неустойчивости численного решения уравнений динамики по отношению к уравнениям связей, вызванных погрешностями задания начальных условий и метода решения. Поэтому основной проблемой численного решения ДАУ, является стабилизация связей [1; 2; 5].

В результате исследований было установлено, что стабилизация связей может быть обеспечена заменой уравнений связей (1.2) уравнениями программных связей

$$f^l(q^i, t) = f^l, \quad \varphi^s(q^i, \nu^j, t) = \varphi^s, \quad (1.4)$$

При этом множители Лагранжа  $\lambda_k$  определяются из уравнений

$$\frac{df^l}{dt} = \varphi^l, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^k}{\partial q^i} \nu^i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^k}{\partial \nu^i} \frac{d\nu^i}{dt} + \frac{\partial \varphi^k}{\partial t} = F^k(f^l, \varphi^p, q^i, \nu^j, t), \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \nu^i} \nu^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \nu^j \partial \nu^i} \frac{d\nu^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial \nu^i \partial t} = \frac{\partial L}{\partial q^i} + Q_i - \frac{\partial D}{\partial \nu^i} + f_i + \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi^k}{\partial \nu^i} \lambda_k, \quad (1.6)$$

где  $p = 1, \dots, m$ ,

$$F^k(0, 0, q^i, \nu^j, t) = 0, \quad (1.7)$$

правые части которых  $F^k$  должны быть выбраны соответствующим образом. При выполнении условий (1.7) уравнения связей (1.2) соответствуют инвариантным множествам [6; 7] или частным интегралам системы дифференциальных уравнений динамики (1.1) [8; 9]. Надлежащий выбор правых частей  $F^k$  уравнений (1.5) позволяет обеспечить устойчивость и стабилизацию численного решения, оптимальность по заданному критерию качества [10], инвариантность по отношению к внешним возмущениям [11], устойчивость при случайных воздействиях [12] и другие свойства решений уравнений динамики.

## 2. Управление динамикой, инвариантность, устойчивость и стабилизация

Управляющие воздействия  $u^k$  определяются из уравнений (1.5) с заменой выражений  $\frac{d\nu^i}{dt}$  из уравнений (1.6). Для осуществления движения в соответствии с уравнениями связей (1.2) необходимо обеспечить устойчивость решений уравнений системы (1.1) по отношению к уравнениям (1.2), что соответствует устойчивости тривиального решения  $f^l = 0, \varphi^p = 0$  системы уравнений (1.5).

Полагая возмущения  $f^l, \varphi^p$  малыми и разлагая функции  $F^\kappa$  в ряд по степеням этих переменных, систему уравнений (1.5) можно представить в виде

$$\frac{dx^\kappa}{dt} = \sum_{\mu=1}^{r+m} a_\mu^\kappa x^\mu + X^\kappa, \quad \mu = 1, \dots, r+m, \quad x^l = f^l, \quad x^p = \varphi^p, \quad (2.1)$$

где через  $X^\kappa$  обозначены члены, содержащие  $x^\kappa$  в степени выше первой, и суждение об устойчивости делать по уравнениям первого приближения

$$\frac{dx^\kappa}{dt} = \sum_{\mu=1}^{r+m} a_\mu^\kappa x^\mu, \quad \mu = 1, \dots, r+m, \quad x^l = f^l, \quad x^p = \varphi^p. \quad (2.2)$$

Если коэффициенты уравнений системы (2.2) постоянны и корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, то тривиальное решение  $x^\kappa = 0$  асимптотически устойчиво. В случае, когда матрица коэффициентов  $A = (a_\mu^\kappa)$  является плохо обусловленной, для решения задачи управления программным движением системы могут быть использованы методы [13] решения некорректных задач.

Исследованию колебаний и устойчивости линейных систем с постоянными и периодическими коэффициентами, нелинейных систем, содержащих малый параметр, устойчивости движения спутника относительно центра масс посвящены монографии А.П. Маркеева [14] и О.В. Холостовой [15]. В резонансном случае построены границы областей устойчивости, рассмотрены случаи кратного резонанса. Определены условия устойчивости плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите, условия равновесия и колебаний на эллиптической орбите, исследованы прецессионные движения спутника на орбите малого эксцентриситета и на орбите произвольного эксцентриситета. Исследованы некоторые задачи управления угловыми движениями спутника с помощью инерционных масс [16–17].

Разработаны алгоритмы построения уравнений управляемых систем с вектором управления минимальной размерности, обеспечивающих инвариантность по отношению к случайным возмущениям уравнений связей и квазиинвариантность применительно к динамическим свойствам переходного процесса [18]. Построен универсальный алгоритм приведения фазового состояния механической системы и твердого тела в заданное многообразие состояний за конечный промежуток времени при случайных возмущающих силах и случайных изменениях параметров системы.

Для успешного численного моделирования динамики управляемых систем оказывается недостаточно асимптотической устойчивости движения по отношению к функциям, задающим уравнения связей, траекторию движения или закон движения. Решение задачи стабилизации будет удовлетворительным только в том случае, когда результаты численного решения уравнений динамики будут соответствовать требуемому движению с необходимой точностью.

Пусть, например, для решения уравнений динамики (1.1) используется простейшая разностная схема

$$q^{k+1} = q^k + \nu^k \tau, \quad \nu^{k+1} = \nu^k + w^k \tau, \\ q^k = q(t_k), \quad \tau = t_{k+1} - t_k \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $q, \nu, w = w(q, \nu, t)$  — векторы фазовых координат и правых частей уравнений динамики, разрешенных относительно обобщенных ускорений. Справедливо следующее утверждение [10].

**Теорема.** Если выполнено условие  $\|x^k\| \leq \varepsilon$ , матрица  $\tau A^k$  и остаточный член  $(\tau^2/2) x^{(2)}$  разложения  $x^{k+1}$  в ряд ограничены величинами  $\|E + A\tau\|^k \leq \beta < 1$ ,  $(\tau^2/2) \|x^{(2)}\| \leq (1 - \beta) \varepsilon$ , то выполняется неравенство  $\|x^{k+1}\| \leq \varepsilon$ .

**Пример.** Построим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = 4cx_2 - \frac{\lambda x_1 (x_1^2 + 4x_2^2 - 4)}{x_1^2 + 16x_2^2}, \quad \dot{x}_2 = -cx_1 - \frac{\lambda x_1 (x_1^2 + 4x_2^2 - 4)}{x_1^2 + 16x_2^2},$$

относительно переменных  $x_1, x_2$ , удовлетворяющих уравнению связи  $f(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2}(x_1^2 + 4x_2^2 - 4) = 0$ . Решение системы асимптотически устойчиво по отношению к уравнению связи. Действительно, если  $V = f^2$ , то производная  $\dot{V}$ , вычисленная с учетом дифференциальных уравнений, равна  $\dot{V} = -\lambda V$  и является определенно отрицательной при  $\lambda > 0$ .

Положим  $|x_1| \leq 2, 1, |x_2| \leq 1, 1, x_1^2 + x_2^2 \geq 0, 81, c = 1, \lambda = 3, \varepsilon = 10^{-4}, t_0 = 0, x_1^0 = 2, x_2^0 = 0$ . Очевидно,  $|f(x_1^0, x_2^0)| = 0 < \varepsilon$ . Построим численное решение системы, используя разностную схему:

$$x^{k+1} = x^k + \tau \nu^k, \quad x^k = x(t_k), \quad \nu^k = \nu(x^k, t_k), \quad x = (x_1, x_2), \\ t_{k+1} = t_k + \tau, \quad \tau = 0, 0025.$$

Непосредственные вычисления показывают, что при  $k = 5$  условие устойчивости численного решения нарушается:  $f(x_1^5, x_2^5) = 0, 00015 > \varepsilon$ . График изменения величины  $f = f(x_1, x_2)$  представлен на рис. 1.

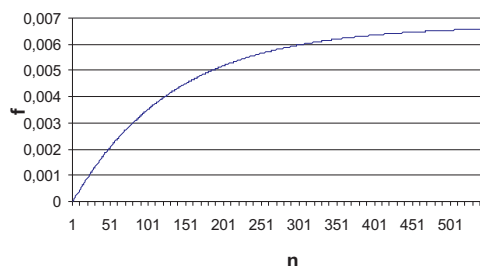


Рис. 1. Изменение погрешности при  $\lambda = 1$

Пусть  $\lambda = 900$ . Тогда условие устойчивости численного решения нарушается при  $k = 9$ :  $f(x_1^9, x_2^9) = 0, 128 \cdot 10^{-3} > \varepsilon$ . На рис. 2 представлен график изменения величины  $f = f(x_1, x_2)$  при  $\lambda = 900$ .

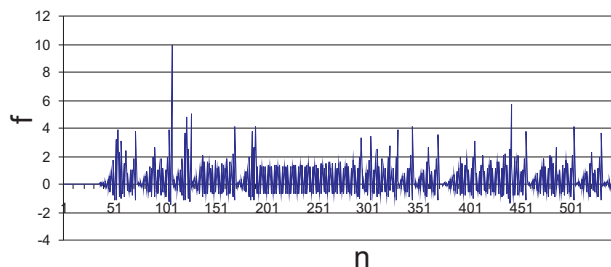


Рис. 2. Изменение погрешности при  $\lambda = 900$

Из условий точности численного решения следуют неравенства, накладываемые на  $\lambda$ :

$$4 \leq \lambda \leq 796.$$

Положим  $\lambda = 300$ .

На рис. 3 и 4 представлены кривая  $f(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{2}(x_1^2 + 4x_2^2 - 4) = 0$  и график изменения величины  $f$ , соответствующей значению  $\lambda = 300$ .

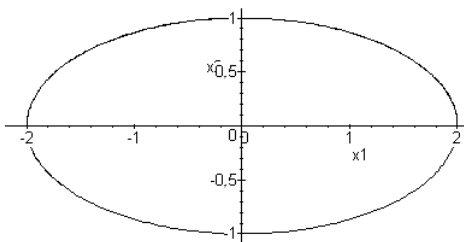


Рис. 3. Траектория движения точки

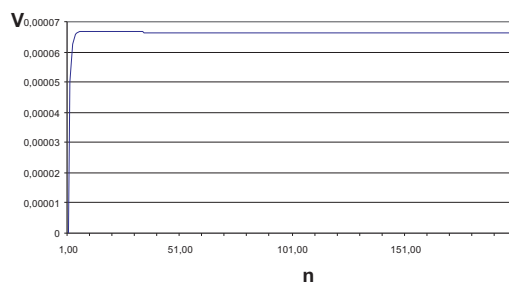


Рис. 4. Изменение погрешности при  $\lambda = 300$

### 3. Динамика твердого тела и систем твердых тел

Методы моделирования динамики с учетом стабилизации связей позволяют построить простые алгоритмы решения задач управления динамикой твердого тела, систем твердых тел, манипуляционных систем, задач космической баллистики и управления движением ракеты [16; 17; 19].

Эффективным способом составления уравнений неголономных связей оказались методы построения систем дифференциальных уравнений, допускающих заданное распределение траекторий решений [20]. Дифференциальные уравнения, описывающие требуемое распределение траекторий в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, выраженные через обобщенные координаты и скорости управляемой системы, описывают неголономные связи. Семейство траекторий может быть определено так, чтобы движение изображающей точки происходило с обходом подвижных или неподвижных препятствий на заданной поверхности. Для этого достаточно ограничить препятствия кривыми, соответствующими предельным циклам или сепаратрисам соответствующей системы дифференциальных уравнений. Используя решение обратной задачи качественной теории дифференциальных уравнений, построен алгоритм управления мобильным роботом, совершающим движение в заданную точку с обходом подвижных препятствий [20].

## 4. Иллюстрация примеров решений

Результаты фундаментальных исследований сочетаются с решением прикладных задач динамики и управления. Некоторые прикладные задачи являются модельными и иллюстрируют возможности разработанных методов. Решение части задач явилось результатом сотрудничества с промышленными предприятиями и научными учреждениями.

### 4.1. Управление дискретной адаптивной оптической системой

Разработаны принципиальные схемы и составлены программы решения задачи управления элементом дискретной адаптивной оптической системы, моделируемой твердым телом с шестью степенями свободы и тремя управляющими приводами [22]. На зеркала элементов системы падает свет звезды, проходящий через атмосферу, оптические свойства которой меняются во времени. Целью управления является обеспечение попадания в заданную точку фокальной плоскости лучей, отраженных от каждого элемента мозаичного зеркала. Управление элементом зеркала, представленного на рис. 5, 6, осуществляется тремя параллельными силами, приложенными к трем точкам твердого тела, на котором закреплено зеркало, совершающим движения по направляющим.

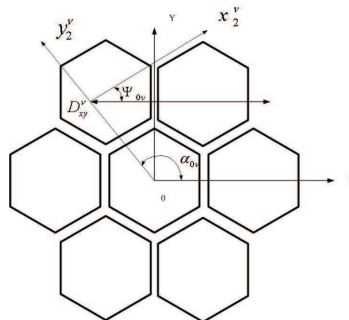


Рис. 5. Мозаичное зеркало

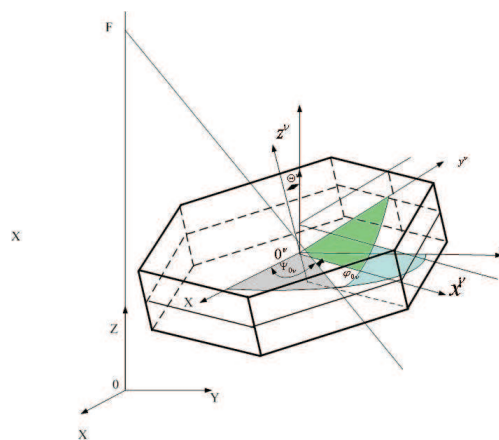


Рис. 6. Элемент дискретного зеркала

### 4.2. Управление электромеханической системой

В системе привода кривошипно-шатунного механизма блок питания обеспечивает подачу электрической мощности двигателю постоянного тока (рис. 7). Переменный ток через выпрямитель подается в двигатель, который, в свою очередь, управляет работой механизма, расположенного в однородном поле силы тяжести.

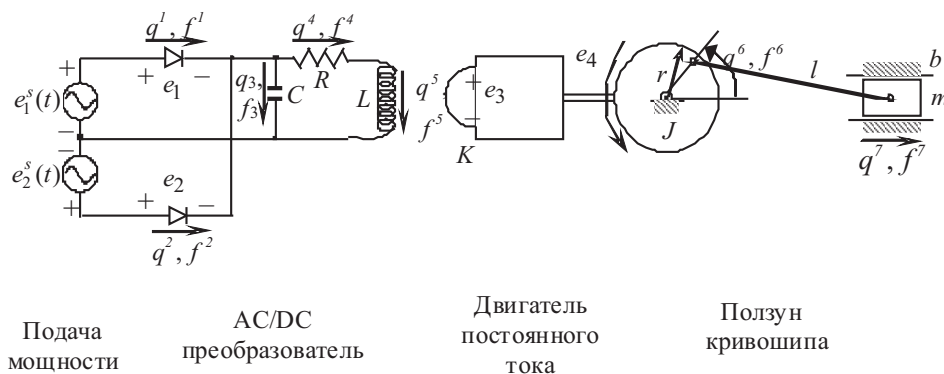


Рис. 7. Электромеханическая система

Построена система дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных, которая содержит 9 уравнений с 9 неизвестными. Решение системы дифференциально-алгебраических уравнений и построение графиков (рис. 8, 9) осуществлено с использованием интегрированной системы компьютерной символьной математики Maple 7 при следующих значениях параметров [3]:  $R=100$  Ом;  $L=10$  Гц;  $C=50 \cdot 10^{-6}$  Ф;  $i_s = 10^{-9}$  А;  $\alpha = 39$  В $^{-1}$ ;  $J = 0,16 \cdot 10^{-3}$  Н·м·с $^2$ ;  $b = 4 \cdot 10^{-7}$  (Н·с)/м;  $K=0,1$  (Н·м)/А;  $m=0,5$  кг;  $r=0,0141$  м;  $l=0,0224$  м;  $e_1^s(t) = u_1(t) = \sin t \cdot e^{-t/10}$  В;  $e_2^s(t) = u_2(t) = -\sin t \cdot e^{-t/10}$  В.

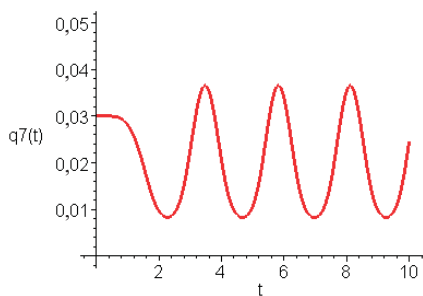


Рис. 8. График движения ползуна

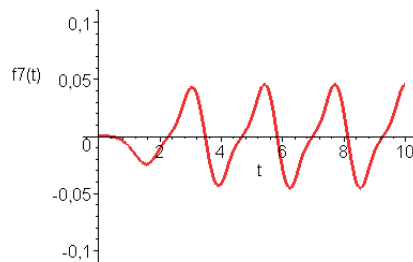


Рис. 9. График изменения скорости ползуна

### 4.3. Управление движением мобильного робота с обходом подвижных препятствий

О.В. Матухиной решена задача управления движением колесной системы по заданной траектории с обходом подвижных препятствий. Для построения множества траекторий используется решение обратной задачи качественной теории дифференциальных уравнений. Задача моделирования сводится к решению системы



семи уравнений динамики и трех уравнений программных связей. Для построения уравнений, решения задачи управления и численного моделирования использована система компьютерной математики Maple [20].

## Заключение

Результаты фундаментальных исследований и численных экспериментов свидетельствуют об эффективности изложенных методов стабилизации связей при использовании простейших численных методов решения систем дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих динамику системы и связи, ограничивающие изменение координат и скоростей.

## Литература

- [1] Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.* 1972. № 1. P. 1–16.
- [2] Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. 292 с.
- [3] Layton R.A. Principles of Analytical System Dynamics. N. Y.: Springer, 1998. 158 p.
- [4] Meiser Peter, Enge Olaf, Freudenberg Heiko and Kielau Gerald. Electromechanical Interactions in Multibody Systems Containing Electromechanical Drives // *Multibody System Dynamics*. 1997. № 1. P. 281–302.
- [5] Stabilization of constrained Mechanical systems with DAEs and invariant manifolds / U.M. Ascher [et al.] // *J. Mechanics of Structures and Machines*. 1995. № 23. P. 135–158.
- [6] Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. М.: Иностран. лит., 1951. Т. 2. Ч. 1. 555 с.
- [7] Харламов П.В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // *Механика твердого тела*. 1974. Вып. 6. С. 15–24.
- [8] Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // *ПММ*. 1952. Т. 21. № 6. С. 659–670.
- [9] Мухарлямов Р.Г. Стабилизация движений механических систем на заданных многообразиях фазового пространства // *ПММ*. 2006. Т. 70. № 2. С. 236–249.
- [10] Мухарлямов Р.Г. Моделирование динамических процессов различной природы // *Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сборник трудов, посвященный памяти академика В.В. Румянцева*. М.: Наука, 2009. С. 310–324.
- [11] Мухаметзянов И.А. Построение множества уравнений регуляторов для квазиинвариантной стабилизации преследующего движения манипулятора // *Изв. РАН. Сер.: Механика твердого тела*. 2009. № 2. С. 41–46.
- [12] Тлеубергенов М.И. О решении стохастической задачи замыкания методом проектирования // *Вестник РУДН. Сер.: Математика. Информатика. Физика*. 2009. № 2. С. 78–89.
- [13] Мухарлямов Р.Г. О построении уравнений программных движений // *Дифференц. уравнения*. 1977. Т. 13. № 5. С. 869–873.
- [14] Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009. 396 с.

- [15] Холостова О.В. Исследование устойчивости перманентных вращений Штауде. М. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 128 с.
- [16] Мухарлямов Р.Г. К вопросу оптимального управления угловой ориентацией с помощью инерционных масс // Труды КАИ. 1965. Вып. 87. С. 87-95.
- [17] Мухарлямов Р.Г., Галиуллин А.С., Волков С.В. Программное управление угловыми движениями гиростата // Численные методы решения задач мат. физики и теории систем. М.: УДН, 1979. С. 118–131.
- [18] Мухаметзянов И.А. Построение множества уравнений регуляторов для квазиинвариантной стабилизации преследующего движения манипулятора // Изв. РАН. Сер.: Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 41–46.
- [19] Мухарлямов Р.Г. Управление программным движением ракеты в центральном ньютоновском поле сил // Проблемы механики и управление: Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. ун-т. Пермь, 2005. Вып. 37. С. 90–99.
- [20] Ибушева О.В., Мухарлямов Р.Г. Построение неавтономной системы дифференциальных уравнений по заданной совокупности частных интегралов в многомерном пространстве // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. 2008. Т. 150. Кн. 3. С. 133–139.
- [21] Мухарлямов Р.Г. Управление программным движением адаптивной оптической системы // Вестник РУДН. Сер.: Прикладн. матем. и информатика. 1994. № 1. С. 22–40.
- [22] Kolesnikov A.P., Mukharlyamov R.G., Ibragimov R.G. Control in Adaptive Optical Systems // IFAC Workshop on Evaluation of Adaptive Control Strategies in Industrial Application. Tbilisi, USSR, 17-21 Oct. 1989. Oxford: Pergamonpress, 1990. № 7. P. 301–306.
- [23] Шемелова О.В. Управление динамикой электромеханических систем // Вестник РУДН. Сер.: Прикладн. матем. и информ. 2003. № 1. С. 63–71.

Поступила в редакцию 12/V/2011;  
в окончательном варианте — 12/V/2011.

## MODELING OF CONTROL PROCESSES, STABILITY AND STABILIZATION OF SYSTEMS WITH PROGRAM CONSTRAINTS

© 2011 N.V. Abramov<sup>4</sup> R.G. Mukharlyamov<sup>5</sup>

Results of researches on modeling of dynamics of difficult systems containing different physical elements, solving dynamics problems and control of a rigid body and robotics systems are stated. Necessary conditions for stability of decisions of dynamics equations are defined, and the algorithm of the constraints perturbations equations construction, guaranteeing constraint stabilization is offered at the numerical solution. Some results of the applied problems solution illustrate efficiency of the described methods.

**Key words:** mechanics, program communications, reaction, stability, numerical decision, stabilization, dynamics, equation, construction, system.

Paper received 12/V/2011.

Paper accepted 12/V/2011.

---

<sup>4</sup>Abramov Nikolai Vasilievich ([abramoff@mail.ru](mailto:abramoff@mail.ru)), the Dept. of Applied Mathematics and IT, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara 443001, Russian Federation.

<sup>5</sup>Mukharlyamov Robert Garabshevich ([robgar@mail.ru](mailto:robgar@mail.ru)), the Dept. of Theoretical Mechanics, People's Friendship University of Russia, Moscow, 117198, Russian Federation.