

НЕСВЯЗАННАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ РАДИАЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННОГО ЦИЛИНДРА

© 2011 Д.А. Шляхин¹

Рассматривается несвязанная осесимметричная нестационарная задача прямого пьезоэффекта для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра при действии на его внешних радиальных поверхностях нормальных напряжений, являющихся произвольными функциями по аксиальной координате и времени. Новое замкнутое решение построено методом разложения по собственным вектор-функциям в форме структурного алгоритма конечных преобразований. Полученные соотношения позволяют определять частоты собственных колебаний, напряженно-деформированное состояние элемента, а также потенциал и напряженность индуцируемого электрического поля.

Ключевые слова: несвязанная задача электроупругости, пьезокерамический цилиндр, осесимметричная динамическая нагрузка.

Введение

Исследование вынужденных осесимметричных колебаний пьезокерамического цилиндра конечных размеров при радиальной поляризации материала приводит к формированию сложной системы дифференциальных уравнений и начально-краевых условий. Поэтому большинство работ в этой области посвящено более простым задачам электроупругости об осесимметричных колебаниях бесконечного цилиндра при гармоническом [1–3] и произвольным динамическом [4] воздействиях. Допущения, связанные с использованием кинематических гипотез, приводят к разработке прикладных теорий пластин и оболочек [1; 3; 5; 6], а также исследованию поверхностных волн в пьезоэлектрических средах [7].

Результаты, справедливые для пьезокерамического цилиндра конечной длины для установившегося режима вынужденных колебаний, получены в [1; 5; 8]. В [1] для снижения размерности используются системы базисных функций с последующим численным интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений. Теория распространения нормальных электроупругих волн излагается в [5]. При этом решение строится в виде бегущих волн с последующим представлением расчетных соотношений в виде степенных рядов. Краевая задача для пьезоактивных

¹Шляхин Дмитрий Аверкиевич (sgasu@sgasu.smr.ru), кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

сред с нерегулярными структурами в [8] решается методом последовательных приближений с использованием функции Грина. Метод сплайн-интерполяции позволяет исследовать свободные колебания пьезокерамических полых цилиндров [9].

В настоящей работе приводится новое замкнутое решение несвязанной осесимметричной динамической задачи в трехмерной постановке для пьезокерамического цилиндра. Данный подход можно использовать при низкочастотном внешнем воздействии для тонкостенных элементов, а в случае исследования вынужденных колебаний толстых полых цилиндров эффектом взаимной связанности силовых и электрических полей можно пренебречь при высокочастотном нагружении [10]. Существенным представляется также то, что решение построено для произвольных смешанных краевых условий по торцам элемента. Данный прием был предложен и впервые использован в работах Ю.Э. Сеницкого при исследовании короткого анизотропного цилиндра [11; 12].

1. Постановка задачи

В данной статье исследуется полый анизотропный цилиндр, занимающий в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega : \{a \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h\}$ и выполненный из пьезокерамического материала с наведенной радиальной поляризацией.

Для рассматриваемой задачи можно сформулировать различные физически реализуемые краевые условия. Для определенности принимаем неэлектродированные торцевые плоскости свободными от механических напряжений, а радиальные поверхности — электродированными с заземлением закрепленной внутренней ее части.

Краевая задача моделирует работу пьезоэлементов в приборах прямого пьезоэффекта при действии на внешней криволинейной поверхности цилиндра нормальных напряжений $q(z_*, t_*)$. В результате механическое воздействие трансформируется в электрический сигнал, при этом радиальные плоскости подключены к измерительному прибору с большим входным сопротивлением, что соответствует режиму "холостого хода" [3; 5] (отсутствию свободных электрических зарядов).

В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения и электростатики однородной упругой анизотропной среды в цилиндрической системе координат записываются в виде [3; 5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r_*} + \frac{D_r}{r_*} + \frac{\partial D_z}{\partial z_*} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При радиальной поляризации материала уравнения состояния пьезокерамического тела определяются следующими равенствами [3; 5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{13} \left(\frac{U^*}{r_*} + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) - e_{33} E_r, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{13} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + C_{12} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{31} E_r, \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = C_{13} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{12} \frac{U^*}{r_*} + C_{11} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{31} E_r, \sigma_{rz} = C_{55} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right) - e_{15} E_z, \quad (1.2)$$

$$D_r = \varepsilon_{33} E_r + e_{31} \left(\frac{U^*}{r_*} + \frac{\partial W^*}{\partial z_*} \right) + e_{33} \frac{\partial U^*}{\partial r_*}, E_r = -\frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}, \quad (1.3)$$

$$D_z = \varepsilon_{11} E_z + e_{15} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right), E_z = -\frac{\partial \phi^*}{\partial z_*}.$$

В соотношениях (1.1)–(1.3) $\sigma_{jk}(r_*, z_*, t_*)$, $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$ — соответственно компоненты тензора механических напряжений и вектора перемещений ($j, k = r, \theta, z$); $D_r(r_*, z_*, t_*)$, $D_z(r_*, z_*, t_*)$, $E_r(r_*, z_*, t_*)$, $E_z(r_*, z_*, t_*)$, $\phi^*(r_*, z_*, t_*)$ — компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля; ρ, C_{ms}, e_{ms} — объемная плотность, модули упругости, а также пьезомодули анизотропного электроупругого материала ($m, s = \overline{1, 5}$); $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ — диэлектрические проницаемости.

При решении несвязанной задачи прямого пьезоэффекта используется допущение, что индуцируемое в пьезокерамической среде электрическое поле не оказывает влияния на механические напряжения. Таким образом, в равенствах (1.2) следует исключить компоненты вектора напряженности электрического поля

$$E_r = E_z = 0. \quad (1.4)$$

В результате подстановки равенств (1.2), с учетом (1.4), в (1.1) получаем систему дифференциальных уравнений, граничные и начальные условия динамической задачи теории упругости в безразмерной форме:

$$\nabla^2 U - \frac{C_{11}}{C_{33}} \frac{U}{r^2} + \frac{C_{55}}{C_{33}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(C_{13} - C_{12})}{C_{33}} \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{C_{55}}{C_{33}} \nabla^2 W + \frac{C_{11}}{C_{33}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} + \frac{(C_{12} + C_{55})}{C_{33}} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0;$$

$$z = 0, L \quad \sigma_{zz} = C_{13} \frac{\partial U}{\partial r} + C_{12} \frac{U}{r} + C_{11} \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (1.6)$$

$$U(r, 0, t) = U_1(r, t), \quad U(r, L, t) = U_2(r, t);$$

$$r = 1, k \quad U(k, z, t) = W(k, z, t) = 0, \quad (1.7)$$

$$\sigma_{rr}|_{r=1} = C_{33} \frac{\partial U}{\partial r} + C_{13} \left(U + \frac{\partial W}{\partial z} \right) = q(z, t), \quad \sigma_{rz}|_{r=1} = C_{55} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0;$$

$$t = 0 \quad U(r, z, 0) = U_0(r, z), \quad \dot{U}(r, z, 0) = \dot{U}_0(r, z), \quad (1.8)$$

$$W(r, z, 0) = W_0(r, z), \quad \dot{W}(r, z, 0) = \dot{W}_0(r, z),$$

где $\{U, W, U_1, U_2, U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0\} = \{U^*, W^*, U_1^*, U_2^*, U_0^*, \dot{U}_0^*, W_0^*, \dot{W}_0^*\} / b$, $\{r, z, L, k\} = \{r_*, z_*, h, a\} / b$, $t = t_* b^{-1} \sqrt{C_{33} / \rho}$, U_1^*, U_2^* — известные радиальные перемещения на торцевых поверхностях; U_0^*, \dot{U}_0^* , W_0^*, \dot{W}_0^* — известные в начальный момент времени перемещения, скорости перемещений.

Точка означает дифференцирование по t .

На втором этапе исследования рассматривается задача электроупругости, считая известными (найденными) компоненты вектора перемещений U, W .

В результате подстановки (1.3) в (1.1) получаем такое дифференциальное уравнение и краевые условия для электрического потенциала в безразмерной форме:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{e_{15}}{C_{33} \varepsilon_{33}} Y; \quad (1.9)$$

$$z = 0, L \quad D_z = -C_{33}\varepsilon_{11}e_{15}^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial z} + e_{15}\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0; \quad (1.10)$$

$$r = 1, k \quad \phi(k, z, t) = 0, D_r|_{r=1} = -C_{33}\varepsilon_{33}e_{15}^{-1}\frac{\partial\phi}{\partial r} + e_{31}\left(\frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + e_{33}\frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad (1.11)$$

где $Y = e_{33}\nabla^2 U + e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + e_{15}\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (e_{15} + e_{31})\frac{\partial^2 W}{\partial r\partial z} + e_{31}\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial z}$, $\phi = \frac{\phi^* e_{15}}{bC_{33}}$.

Соотношения (1.5)–(1.11) представляют математическую формулировку рассматриваемой несвязанной начально-краевой задачи электроупругости.

2. Построение общего решения начально-краевой задачи теории упругости

Решение осуществляется методом интегральных преобразований, используя последовательно синус- и косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по переменной z [13] и обобщенное конечное интегральное преобразование (КИП) [14] по радиальной координате r .

Приводим краевую задачу (1.5)–(1.8) к стандартной форме (однородным граничным условиям на торцах цилиндра) на основе такого представления:

$$U(r, z, t) = H_1(r, z, t) + u(r, z, t), W(r, z, t) = H_2(r, z, t) + w(r, z, t), \quad (2.1)$$

где $H_1(r, z, t) = f_1(z)U_1(r, t) + f_2(z)U_2(r, t)$,

$$H_2(r, z, t) = f_3(z)\left(U'_1 + \frac{C_{12}}{C_{13}}r^{-1}U_1\right) + f_4(z)\left(U'_2 + \frac{C_{12}}{C_{13}}r^{-1}U_2\right).$$

Здесь и ниже "штрих" означает дифференцирование по соответствующей координате.

В результате подстановки (2.1) в (1.5)–(1.8) и учитывая условия

$$\begin{aligned} f_1(L) = f_2(0) = f'_3(L) = f'_4(0) = 0, f_1(0) = f_2(L) = 1, \\ f'_3(0) = f'_4(L) = -\frac{C_{13}}{C_{11}}, f_3(0) = -f_3(L), f_4(0) = -f_4(L), \end{aligned} \quad (2.2)$$

получаем новую краевую задачу относительно функций $u(r, z, t)$, $w(r, z, t)$ с соответствующими (1.6) однородными граничными условиями. При этом дифференциальные уравнения (1.5), граничные условия (1.7) становятся неоднородными с правыми частями $B_1, B_2, -H_1, -H_2, H_3, H_4$, а в начальных условия (1.8) вместо $U_0, \dot{U}_0, W_0, \dot{W}_0$ следует считать $u_0, \dot{u}_0, w_0, \dot{w}_0$:

$$\begin{aligned} B_1 &= -\nabla^2 H_1 + \frac{C_{11}}{C_{33}}\frac{H_1}{r^2} - \frac{C_{55}}{C_{33}}\frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}}\frac{\partial^2 H_2}{\partial r\partial z} - \frac{(C_{13} - C_{12})}{C_{33}}\frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}, \\ B_2 &= -\frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}}\frac{\partial^2 H_1}{\partial r\partial z} - \frac{(C_{12} + C_{55})}{C_{33}}\frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{C_{55}}{C_{33}}\nabla^2 H_2 - \frac{C_{11}}{C_{33}}\frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial t^2}, \\ H_3 &= \frac{q}{C_{33}} - \frac{\partial H_1}{\partial r} - \frac{C_{13}}{C_{33}}\left(H_1 + \frac{\partial H_2}{\partial z}\right), H_4 = -\left(\frac{\partial H_2}{\partial r} + \frac{\partial H_1}{\partial z}\right), \\ u_0(r, z) &= U_0(r, z) - H_1(r, z, 0), \dot{u}_0(r, z) = \dot{U}_0(r, z) - \dot{H}_1(r, z, 0), \\ w_0(r, z) &= W_0(r, z) - H_2(r, z, 0), \dot{w}_0(r, z) = \dot{W}_0(r, z) - \dot{H}_2(r, z, 0). \end{aligned}$$

Функции $f_1(z) \div f_4(z)$ определяются из дифференциальных уравнений

$$f''_1(z) = f''_2(z) = 0, f'''_3(z) = f'''_4(z) = 0. \quad (2.3)$$

К преобразованной краевой задаче применяем синус- и косинус-преобразования Фурье с конечными пределами по переменной z , вводя следующие трансформанты:

$$u_s(r, n, t) = \int_0^L u(r, z, t) \sin(j_n z) dz, \quad (2.4)$$

$$w_c(r, n, t) = \int_0^L w(r, z, t) \cos(j_n z) dz \left(j_n = \frac{n\pi}{L}, n = \overline{0, \infty} \right)$$

с соответствующими формулами обращения

$$u(r, z, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} u_s(r, n, t) \sin j_n z, \quad (2.5)$$

$$w(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{-1} w_c(r, n, t) \cos j_n z, \quad \Omega_n = \begin{cases} L & (n = 0), \\ L/2 & (n \neq 0). \end{cases}$$

В результате получаем следующую задачу в пространстве изображений:

$$\nabla^2 u_s - \frac{C_{11}}{C_{33}} \frac{u_s}{r^2} - \frac{C_{55}}{C_{33}} j_n^2 u_s - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} j_n \frac{\partial w_c}{\partial r} - \frac{(C_{13} - C_{12})}{C_{33}} j_n \frac{w_c}{r} - \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} = B_{1s}, \quad (2.6)$$

$$\frac{C_{55}}{C_{33}} \nabla^2 w_c - \frac{C_{11}}{C_{33}} j_n^2 w_c + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} j_n \frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{(C_{12} + C_{55})}{C_{33}} j_n \frac{u_s}{r} - \frac{\partial^2 w_c}{\partial t^2} = B_{2c};$$

$$r = 1, k \quad u_s(k, n, t) = -H_{1s}(k, n, t), w_c(k, n, t) = -H_{2c}(k, n, t), \quad (2.7)$$

$$\left[\frac{\partial u_s}{\partial r} + \frac{C_{13}}{C_{33}} (u_s - j_n w_c) \right]_{|r=1} = H_{3s}(1, n, t), \left(\frac{\partial w_c}{\partial r} + j_n u_s \right)_{|r=1} = H_{4c}(1, n, t);$$

при $t = 0$:

$$u_s(r, n, 0) = u_{0s}, \dot{u}_s(r, n, 0) = \dot{u}_{0s}, \quad (2.8)$$

$$w_c(r, n, 0) = w_{0c}, \dot{w}_c(r, n, 0) = \dot{w}_{0c}.$$

Здесь $\{u_{0s}(r, n), \dot{u}_{0s}(r, n), B_{1s}, H_{1s}, H_{3s}\} =$

$$= \int_0^L \{u_0(r, z), \dot{u}_0(r, z), B_1, H_1, H_3\} \sin j_n z dz,$$

$$\{w_{0c}(r, n), \dot{w}_{0c}(r, n), B_{2c}, H_{2c}, H_{4c}\} =$$

$$= \int_0^L \{w_0(r, z), \dot{w}_0(r, z), B_2, H_2, H_4\} \cos j_n z dz.$$

На втором этапе решения описанную выше процедуру стандартизации проведем для краевой задачи (2.6)–(2.8) по координате r , используя такое представление:

$$u_s(r, n, t) = H_{5s}(r, n, t) + U_s(r, n, t), w_c(r, n, t) = H_{6c}(r, n, t) + W_c(r, n, t), \quad (2.9)$$

где $H_{5s}(r, n, t) = f_5(r) H_{1s}(1, n, t) + f_6(r) H_{3s}(k, n, t)$,

$$H_{6c}(r, n, t) = f_5(r) H_{2c}(1, n, t) + f_6(r) H_{4c}(k, n, t).$$

Если теперь подставить (2.9) в (2.6)–(2.8) и учесть условия

$$f_5(1) = f_5'(1) = f_6(k) = f_6(1) = 0, -f_5(k) = f_6'(1) = 1, \quad (2.10)$$

то получим новую начально-краевую задачу относительно $U_s(r, n, t)$, $W_c(r, n, t)$ с однородными граничными условиями по координате r . При этом функции

$B_{1s}, B_{2c}, u_{0s}, \dot{u}_{0s}, w_{0s}, \dot{w}_{0s}$ следует заменить на $B_{1s}^*, B_{2c}^*, U_{0s}, \dot{U}_{0s}, W_{0s}, \dot{W}_{0s}$ по формулам:

$$\begin{aligned} B_{1s}^* &= B_{1s} - \nabla^2 H_{5s} + \frac{C_{11}}{C_{33}} \frac{H_{5s}}{r^2} + \frac{C_{55}}{C_{33}} j_n^2 H_{5s} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} j_n H_{6c}' + \\ &\quad + \frac{(C_{13} - C_{12})}{C_{33}} j_n \frac{H_{6c}}{r} + \ddot{H}_{5s}, \\ B_{2c}^* &= B_{2c} - \frac{C_{55}}{C_{33}} \nabla^2 H_{6c} + \frac{C_{11}}{C_{33}} j_n^2 H_{6c} - \\ &\quad - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} j_n H_{5s}' - \frac{(C_{12} + C_{55})}{C_{33}} j_n \frac{H_{5s}}{r} + \ddot{H}_{6c}, \\ U_{0s} &= u_{0c} - H_{5s}(r, n, 0), \dot{U}_{0s} = \dot{u}_{0c} - \dot{H}_{5s}(r, n, 0), \\ W_{0c} &= w_{0c} - H_{6c}(r, n, 0), \dot{W}_{0c} = \dot{w}_{0c} - \dot{H}_{6c}(r, n, 0). \end{aligned}$$

Функции $f_5(r)$, $f_6(r)$ определяются из следующих уравнений:

$$f_5'''(r) = f_6'''(r) = 0. \quad (2.11)$$

Преобразованную начально-краевую задачу (2.6)–(2.8) относительно $U_s(r, n, t)$, $W_c(r, n, t)$ решаем, используя структурный алгоритм метода КИП [14]. Введем на сегменте $[k, 1]$ вырожденное КИП с неизвестными компонентами вектор-функции ядра преобразования $K_1(\lambda_{in}, r)$, $K_2(\lambda_{in}, r)$:

$$G(\lambda_{in}, n, t) = \int_k^1 [U_s(r, n, t) K_1(\lambda_{in}, r) + W_c(r, n, t) K_2(\lambda_{in}, r)] r dr, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \{U_s(r, n, t), W_c(r, n, t)\} &= \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) \{K_1(\lambda_{in}, r), K_2(\lambda_{in}, r)\} \|K_{in}\|^{-2}, \quad (2.13) \\ \|K_{in}\|^2 &= \int_k^1 [K_1^2(\lambda_{in}, r) + K_2^2(\lambda_{in}, r)] r dr, \end{aligned}$$

где λ_{in} — положительные параметры, образующие счетное множество ($i = \overline{1, \infty}$).

При этом круговые частоты осесимметричных колебаний цилиндра ω_{in} связаны с λ_{in} зависимостью

$$\omega_{in} = \frac{\lambda_{in}}{b} \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}}.$$

В результате использования структурного алгоритма метода КИП, подробно изложенного в работе [14], получаем выражение для трансформанты

$$\begin{aligned} G(\lambda_{in}, n, t) &= G_0(\lambda_{in}, n) \cos \lambda_{in} t + \dot{G}_0(\lambda_{in}, t) \lambda_{in}^{-1} \sin \lambda_{in} t - \\ &\quad - \lambda_{in}^{-1} \int_0^t F(\lambda_{in}, n, \tau) \sin \lambda_{in} (t - \tau) d\tau, \quad (2.14) \end{aligned}$$

и с учетом однородных граничных условий вида (2.7) однородную краевую задачу для компонент ядра КИП $K_1(\lambda_{in}, r)$, $K_2(\lambda_{in}, r)$:

$$\nabla^2 K_1 - \frac{C_{11}}{C_{33}} \frac{K_1}{r^2} - \frac{C_{55}}{C_{33}} j_n^2 K_1 - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} j_n K_2' + \lambda_{in}^2 K_1 = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{55}}{C_{33}} \nabla^2 K_2 - \frac{C_{11}}{C_{33}} j_n^2 K_2 + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{33}} j_n \left(K_1' + \frac{K_1}{r} \right) + \lambda_{in}^2 K_2 &= 0; \\ r = 1, k: \quad K_1(\lambda_{in}, k) = K_2(\lambda_{in}, k) &= 0, \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\left[K_1' + \frac{C_{13}}{C_{33}} (K_1 - j_n K_2) \right]_{|r=1} = 0, (K_2' + j_n K_1)_{|r=1} = 0.$$

Здесь $F(\lambda_{in}, n, t) = \int_k^1 (B_{1s}^* K_1 + B_{2c}^* K_2) r dr$,

$$\left\{ G_0(\lambda_{in}, n), \dot{G}_0(\lambda_{in}, n) \right\} = \int_k^1 \left\{ [U_{0s} K_1 + W_{0c} K_2], [\dot{U}_{0s} K_1 + \dot{W}_{0c} K_2] \right\} r dr.$$

Система (2.15) сводится к следующему разрешающему дифференциальному уравнению IV порядка относительно функции $K_1(\lambda_{in}, r)$:

$$K_1^{IV} + \frac{2}{r} K_1''' + \left(b_{1in} - \frac{3}{r} \right) K_1'' + \left(\frac{b_{1in}}{r} + \frac{3}{r^3} \right) K_1' + \left(b_{2in} - \frac{b_{1in}}{r^2} - \frac{3}{r^4} \right) K_1 = 0, \quad (2.17)$$

где $b_{1in} = \lambda_{in}^2 \left(1 + \frac{C_{33}}{C_{55}} \right) + j_n^2 \frac{C_{13}(C_{13} + 2C_{55}) - C_{33}^2}{C_{33}C_{55}}$,

$$b_{2in} = \frac{C_{33}}{C_{55}} \lambda_{in}^4 - j_n^2 \lambda_{in}^2 \left(1 + \frac{C_{33}}{C_{55}} \right) + j_n^4.$$

При приведении краевой задачи относительно $U_s(r, n, t)$, $W_c(r, n, t)$ к (2.17) использовались условия:

$$C_{12} = C_{13}, C_{11} = C_{33}, \quad (2.18)$$

первое из которых позволяет получить самосопряженными исходную относительно $U_s(r, n, t)$, $W_c(r, n, t)$ и преобразованную (2.15) системы уравнений, а второе — привести (2.15) к (2.17).

Дифференциальное уравнение (2.17) допускает факторизацию на коммутативные сомножители

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(A_{in}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\mp D_{in}^2 - \frac{1}{r^2} \right) \right] K_1(\lambda_{in}, r) = 0 \quad (2.19)$$

при удовлетворении двух основных случаев отношения коэффициентов для расчета пьезокерамического цилиндра

$$1) S \cdot j_n < \lambda_{in} < j_n, \quad 2) j_n < \lambda_{in}, \quad (2.20)$$

где

$$A_{in} = \left[\frac{b_{1in}}{2} + \left(\frac{b_{1in}^2}{4} - b_{2in} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$D_{in} = \left(A_{in}^2 \mp b_{1in} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$S = \frac{C_{33}^2 - C_{13}(C_{13} + 2C_{55})}{C_{33}(C_{33} + C_{55})}.$$

Верхний знак в равенстве (2.19) соответствует первому варианту отношения коэффициентов (2.20), нижний — второму случаю. Кроме того, для пьезокерамического материала [3] постоянная $S \in]0, 5; 0, 8[$.

Общий интеграл равенства (2.19) определяется выражением:

$$1) K_1(\lambda_{in}, r) = N_{1in} J_1(A_{in} r) + N_{2in} Y_1(A_{in} r) + N_{3in} I_1(D_{in} r) + N_{4in} \tilde{K}_1(D_{in} r), \quad (2.21)$$

$$2) K_1(\lambda_{in}, r) = N_{1in} J_1(A_{in} r) + N_{2in} Y_1(A_{in} r) + N_{3in} J_1(D_{in} r) + N_{4in} Y_1(D_{in} r),$$

$J_v(\dots)$, $Y_v(\dots)$, $I_v(\dots)$, $\tilde{K}_v(\dots)$ — обыкновенные и модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го родов порядка v .

Располагая выражениями (2.21), из системы (2.15) находим $K_2(\lambda_{in}, r)$

$$\begin{aligned} 1) \quad K_2(\lambda_{in}, r) &= b_{3in} \{ A_{in} (b_{4in} - A_{in}^2) [N_{1in} J_0(A_{in}r) + N_{2in} Y_0(A_{in}r)] + \\ &\quad + N_{3in} D_{in} (b_{4in} + D_{in}^2) I_0(D_{in}r) - N_{4in} D_{in} (b_{6in} + D_{in}^2) \tilde{K}_0(D_{in}r) \}; \\ 2) \quad K_2(\lambda_{in}, r) &= b_{3in} \{ A_{in} (b_{4in} - A_{in}^2) [N_{1in} J_0(A_{in}r) + N_{2in} Y_0(A_{in}r)] + \\ &\quad + D_{in} (b_{4in} - D_{in}^2) [N_{3in} J_0(D_{in}r) + N_{4in} Y_0(D_{in}r)] \}; \\ b_{3in} &= -\frac{C_{55}}{j_n (C_{13} + C_{55}) (\lambda_{in}^2 + b_{2in} j_n^2)}, \quad b_{4in} = \lambda_{in}^2 + j_n^2 \frac{C_{13} (C_{13} + 2C_{55})}{C_{33} C_{55}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Подстановка (2.21), (2.22) в граничные условия (2.16) формирует однородную систему уравнений относительно постоянных $N_{1in} \div N_{4in}$. Разыскивая ее нетривиальные решения, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений λ_{in} , а также выражения постоянных $N_{1in} \div N_{4in}$:

$$\begin{aligned} \det [B_{s\omega}] &= 0 \quad (s = \overline{1, 4}; \omega = \overline{1, 4}), \\ B_{1\omega} &= Z_1(P_{in}k), \quad B_{2\omega} = P_{in} (b_{6in} - P_{in}^2) Z_0(P_{in}k), \\ B_{3\omega} &= \left(\frac{C_{13}}{C_{33}} - 1 \right) Z_1(P_{in}) + P_{in} \left[1 - \frac{C_{13}}{C_{33}} j_n b_{5in} (b_{6in} - P_{in}^2) \right] Z_0(P_{in}), \\ B_{4\omega} &= [j_n - b_{5in} P_{in}^2 (b_{6in} - P_{in}^2)] Z_1(P_{in}), \\ \omega = 1, 2 \quad P_{in} &= A_{in}, \quad \omega = 3, 4 \quad P_{in} = D_{in}, \\ \omega = 1, 3 \quad Z_v(\dots) &= J_v(\dots), \quad \omega = 2, 4 \quad Z_v(\dots) = Y_v(\dots). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Без ограничения общности принимая

$$N_{1in} = 1, \quad (2.24)$$

оставшиеся постоянные интегрирования определяются при решении следующей системы неоднородных уравнений:

$$\begin{bmatrix} B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N_{2in} \\ N_{3in} \\ N_{4in} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{31} \\ B_{41} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

3. Расчетные соотношения

Заключительным этапом исследования является определение функций $f_1(z) \div f_4(z)$, $f_5(r)$, $f_6(r)$, входящих в представления (2.1), (2.9). Для этой цели воспользуемся дифференциальными уравнениями (2.3), (2.11) и соответствующими граничными условиями (2.2), (2.10). В результате имеем

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \left(1 - \frac{z}{L} \right), \quad f_2(z) = \frac{z}{L}, \\ f_3(z) &= \frac{C_{13}}{C_{11}} \left(\frac{z^2}{2L} - z + \frac{3L}{8} \right), \quad f_4(z) = -\frac{C_{13}}{C_{11}} \left(\frac{z^2}{2L} - \frac{L}{8} \right), \\ f_5(r) &= -(1-k)^{-2} (r-1)^2, \quad f_6(r) = (1-k)^{-1} [r^2 - (k+1)r + k]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Применяя к трансформанте (2.14) последовательно формулы обращения КИП (2.13), а затем конечных синус- и косинус-преобразований Фурье (2.4), получаем с учетом (2.1), (2.9) следующие разложения для $U(r, z, t)$, $W(r, z, t)$:

$$U(r, z, t) = H_1(r, z, t) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{-1} \left[H_{5s}(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_1(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \sin j_n z, \\
& W(r, z, t) = H_2(r, z, t) + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \Omega^{-1} \left[H_{6c}(r, n, t) + \sum_{i=1}^{\infty} G(\lambda_{in}, n, t) K_2(\lambda_{in}, r) \|K_{in}\|^{-2} \right] \cos j_n z.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Равенства (3.2) удовлетворяют дифференциальные уравнения (1.5), краевые (1.6), (1.7) и начальные (1.8) условия, т. е. представляют замкнутое решение рассматриваемой начально-краевой задачи теории упругости.

4. Построение общего решения краевой задачи электростатики

Решение осуществляется методом интегральных преобразований, используя последовательно конечные косинус-преобразование Фурье по переменной z и преобразование Вебера по радиальной координате r [13].

Приводим краевую задачу (1.9)–(1.11) к стандартной форме на основе такого представления:

$$\phi(r, z, t) = H_7(r, z, t) + \chi(r, z, t), \tag{4.1}$$

где

$$H_7(r, z, t) = f_7(z) e_{15} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} + f_8(z) e_{15} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \Big|_{z=L}.$$

Подстановка (4.1) в (1.9)–(1.11) преобразует их к следующему виду:

$$\nabla^2 \chi + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = Y^*; \tag{4.2}$$

$$z = 0, L \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0; \tag{4.3}$$

$$r = 1, k \quad \chi(k, z, t) = -H_7(k, z, t), C_{33} \varepsilon_{33} e_{15}^{-1} \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{r=1} = H_8(1, z, t), \tag{4.4}$$

$$H_8 = e_{31} \left(\frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + e_{33} \frac{\partial U}{\partial r} - C_{33} \varepsilon_{33} e_{15}^{-1} \frac{\partial H_7}{\partial r}, Y^* = \frac{e_{15}}{C_{33} \varepsilon_{33}} Y - \nabla^2 H_7 - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} \frac{\partial^2 H_7}{\partial z^2}.$$

Функции $f_7(z)$, $f_8(z)$ удовлетворяют краевым условиям

$$f_7'(0) = f_8'(L) = \frac{e_{15}}{C_{33} \varepsilon_{11}}, f_7'(L) = f_8'(0) = 0, \tag{4.5}$$

$$f_7(0) = -f_7(L), f_8(0) = -f_8(L),$$

и определяются при решении следующих дифференциальных уравнений:

$$f_7'''(z) = f_8'''(z) = 0. \tag{4.6}$$

В результате имеем

$$f_7(z) = \frac{e_{15}}{C_{33} \varepsilon_{11}} \left(-\frac{z^2}{2L} + z - \frac{L}{4} \right), f_8(z) = \frac{e_{15}}{C_{33} \varepsilon_{11}} \left(\frac{z^2}{2L} - \frac{L}{4} \right).$$

Применяем к (4.2)–(4.4) косинус-преобразование Фурье по переменной z . В результате получаем следующую задачу:

$$\nabla^2 \chi_c - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} j_m^2 \chi_c = Y_c; \tag{4.7}$$

$$r = 1, k \quad \chi_c(k, m, t) = -H_{7c}(k, m, t), C_{33}\varepsilon_{33}e^{-1} \frac{\partial \chi_c}{\partial r} \Big|_{r=1} = H_{8c}(1, m, t), \quad (4.8)$$

$$\{\chi_c(r, m, t), Y_c, H_{7c}, H_{8c}\} = \int_0^L \{\chi(r, z, t), Y^*, H_7, H_8\} \cos j_m z dz \\ \left(j_m = \frac{m\pi}{L}, m = \overline{0, \infty}\right).$$

Используя процедуру стандартизации по координате r к краевой задаче (4.7), (4.8), представляем трансформанту Фурье в виде

$$\chi_c(r, m, t) = H_{9c}(r, m, t) + \Psi_c(r, m, t), \quad (4.9)$$

где $H_{9c}(r, m, t) = -H_{7c}(k, m, t) + f_9(r) H_{8c}(1, m, t)$, и, если учесть условия

$$f_9(k) = 0, f_9'(1) = \frac{e_{15}}{C_{33}\varepsilon_{33}}, \quad (4.10)$$

получаем новую краевую задачу относительно $\Psi_c(r, m, t)$

$$\nabla^2 \Psi_c - \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} j_m^2 \Psi_c = E_c; \quad (4.11)$$

$$r = 1, k \quad \Psi_c(k, m, t) = 0, \frac{\partial \Psi_c}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (4.12)$$

Здесь $E_c = Y_c - \nabla^2 H_{9c} + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} j_m^2 H_{9c}$.

Решение уравнения

$$f_9''(r) = 0 \quad (4.13)$$

при удовлетворении условий (4.10) позволяет определить

$$f_9(z) = \frac{e_{15}}{C_{33}\varepsilon_{33}} (r - k). \quad (4.14)$$

Применяем теперь к задаче (4.11), (4.12) конечное интегральное преобразование Вебера [13] по переменной r , вводя следующую трансформанту:

$$\Psi_H(\xi_x, m, t) = \int_k^1 \Psi_c(r, m, t) [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x r) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x r)] r dr \quad (4.15)$$

с соответствующей формулой обращения

$$\Psi(r, m, t) = 2\pi^2 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\Psi_H(\xi_x, m, t) [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x r) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x r)]}{\pi^2 [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x)]^2 - 4\xi_x^{-2}}. \quad (4.16)$$

Здесь $\xi_x (x = \overline{1, \infty})$ — положительные параметры, образующие счетное множество, определяемые из такого трансцендентного уравнения

$$J_0(\xi_x k) Y_1(\xi_x) - J_1(\xi_x) Y_0(\xi_x k) = 0. \quad (4.17)$$

В результате получаем следующее алгебраическое уравнение для Ψ_H

$$\Psi_H(\xi_x, m, t) = - \left(\xi_x^2 + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} j_m^2 \right)^{-1} \int_k^1 E_c [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x r) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x r)] \cdot r dr. \quad (4.18)$$

Заключительным этапом исследования краевой задачи (1.9)–(1.11) является определение электрического потенциала $\phi(r, z, t)$. Применяя для этого к трансформанте (4.18) последовательно формулы обращения (4.16) и косинус преобразования Фурье, с учетом (4.1), (4.9) получаем

$$\phi(r, z, t) = H_7(r, z, t) + \sum_{m=0}^{\infty} \Omega_m^{-1} \cos(j_m z) \{H_{9c}(r, m, t) + \quad (4.19)$$

$$+ 2\pi^2 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\Psi_H(\xi_x, m, t) [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x r) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x r)]}{\pi^2 [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x)]^2 - 4\xi_x^{-2}} \Bigg\},$$

$$\text{где } \Omega_m = \begin{cases} L & (m = 0), \\ L/2 & (m \neq 0). \end{cases}$$

Разность потенциалов $Q(t)$ между электродированными радиальными поверхностями определяется по формуле [15]

$$Q(t) = L^{-1} \int_0^L \phi(1, z, t) dz, \quad (4.20)$$

которая с учетом отсутствия касательных напряжений при $r = 1$ и разложения (4.19) окончательно принимает следующий вид:

$$Q(t) = L^{-1} \left\{ H_{9c}(1, 0, t) + 2\pi^2 \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\Psi_H(\xi_x, 0, t) [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x)]}{\pi^2 [Y_0(\xi_x k) J_0(\xi_x) - J_0(\xi_x k) Y_0(\xi_x)]^2 - 4\xi_x^{-2}} \right\}.$$

5. Численный анализ результатов

В качестве примера рассматривается пьезокерамический цилиндр ($b = h = 1, a = 0, 5$) из состава ЦТС-19 [4] с мембранным закреплением его торцов ($U_1 = U_2$) при действии на внешней радиальной поверхности следующего воздействия:

$$q(z, t) = q(z) \sin \theta t.$$

Рассматриваются различные варианты приложения нагрузки: 1 — по всей поверхности $q(z) = q_0$, 2 — на нижней половине $q(z) = q_0 [1 - H(z - L/2)]$, 3 — на нижней и верхней трети $q(z) = q_0 [1 + H(z - 2L/3) - H(z - L/3)]$ исследуемого элемента.

Здесь q_0 — амплитудное значение нагрузки, θ — частота вынужденных колебаний ($\theta = 0, 2\lambda_{11}$, λ_{11} — собственное значение основного тона колебаний цилиндра [14]), $H(\dots)$ — единичная функция О. Хэвисайда соответствующего аргумента, т. е.

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \geq 0, \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

На рис. 5.1, 5.2 приведены графики, описывающие изменение амплитудных значений электрического потенциала $\phi(r, z, t)$ вдоль аксиальной и радиальной координаты. Результаты расчета показывают, что характер загрузки цилиндра оказывает существенное влияние не только на величину $\phi(r, z, t)$, но и на закон его изменения.

На рис. 5.3 показаны эпюры электрического импульса $Q(t) \div t$. Следует отметить, что даже при низкочастотном внешнем воздействии ($\theta = 0, 2\lambda_{11}$) допущение о стационарном режиме вынужденных колебаний, как правило, используемое при исследовании подобных динамических задач электроупругости, приводит к искажению реальной картины.

Для оценки достоверности полученных результатов был рассмотрен незакрепленный цилиндр состава PZT-4 [1] ($k = 0, 6, L = 4$) при $U_1 = U_2 = 0$ и определены частоты собственных колебаний. Численные значения сравнивались с величинами, полученными вариационно-разностным методом и подтвержденными экспериментальными измерениями. В [1] были представлены безразмерные частоты при исследовании связанной задачи, соответствующие одной $\Omega_{11} = 0, 424$ и трем

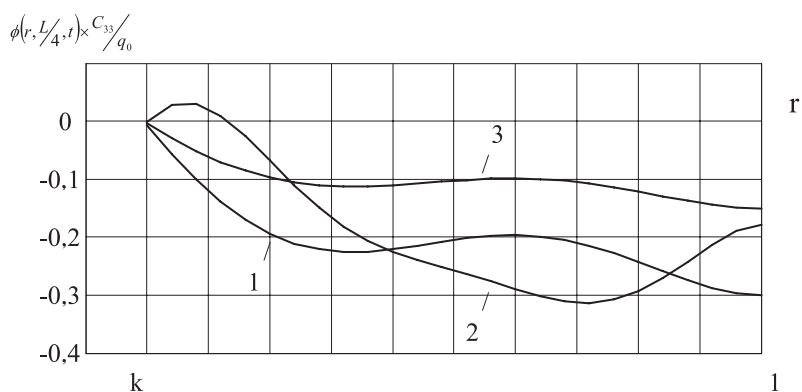


Рис. 5.1

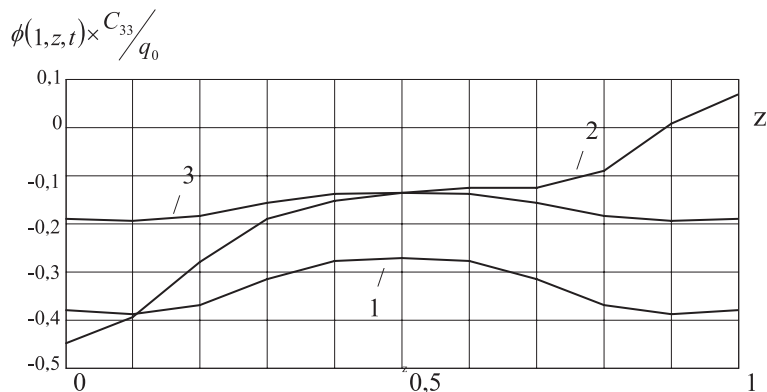


Рис. 5.2

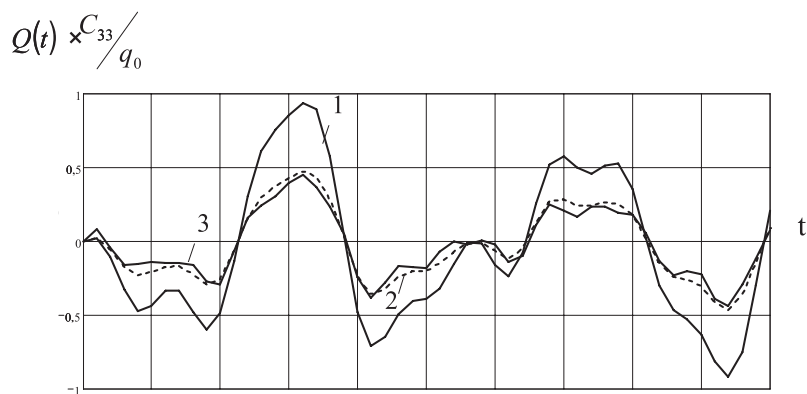


Рис. 5.3

$\Omega_{13} = 0,818$ полуволам по высоте цилиндра ($\Omega_{in} = \omega_{in} \frac{1-k}{2} \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}$, $\bar{\lambda} = 10^{10}$, Н/м²). Частоты собственных колебаний ω_{11}, ω_{13} полученные в настоящей работе, соответственно на 8,3 и 2,1 % ниже результатов, приведенных в [1], поскольку связанность электрических и механических полей напряжения приводит к "ужесточению" материала [10].

В заключение следует отметить, что данный алгоритм позволяет также решить несвязанную задачу обратного пьезоэффекта. При этом используется допущение, что механические деформации не оказывают влияния на электрическое поле.

Литература

- [1] Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. Киев: Наук. думка, 1990. 228 с.
- [2] Мельник В.Н., Москальков М.Н. О связанных электроупругих нестационарных колебаниях пьезокерамического цилиндра с радиальной поляризацией // Вычисл. математика и мат. физика. 1988. Т. 28. № 11. С. 1755–1756.
- [3] Паргон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
- [4] Шляхин Д.А. Динамическая осесимметричная задача прямого пьезоэффекта для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра // ПМиТФ. 2010. Т. 51. № 1. С. 153–161.
- [5] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
- [6] Радиальные колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки / В.С. Дидковский [и др.] // Электроника и связь. 2009. № 6. С. 31–40.
- [7] Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. УРСС, 2003. 336 с.
- [8] Паньков А.А., Соколкин Ю.В. Решение краевой задачи электроупругости для пьезоактивных композитов методом периодических составляющих // Механика композиционных материалов и конструкций. 2002. Т. 8. № 3. С. 365–384.
- [9] Лоза И.А. Свободные колебания пьезокерамических полых цилиндров с радиальной поляризацией // Математические методы и физико-механические поля. 2009. Т. 52. № 4. С. 138–144.
- [10] Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Лоза И.А. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров // Доклады Национальной академии наук Украины. 2009. № 6. С. 61–67.
- [11] Сеницкий Ю.Э. Осесимметричная динамическая задача для короткого толстостенного цилиндра // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения задач упругости и пластичности. Горький: Горьковск. гос. ун-т, 1980. С. 127–135.
- [12] Сеницкий Ю.Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра // Прикладная механика. 1981. Т. 17. № 8. С. 95–100.
- [13] Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М.: Иностран. лит., 1955. 668 с.
- [14] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. 173 с.
- [15] Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. 504 с.

Поступила в редакцию 25/IV/2010;
в окончательном варианте — 20/I/2011.

UNJOINTED AXIALLY SYMMETRIC DYNAMICAL PROBLEM OF ELECTROELASTICITY FOR RADially POLARIZED CYLINDER

© 2011 D.A. Shlyakhin²

The unjointed axially symmetric nonstationary problem of direct piezoelectric effect for non-isotropic piezoceramic radially polarized cylinder at action of its external radial surfaces of the normal stresses being arbitrary functions of axial coordinate and time is regarded. The new closed solution is constructed by the method of expansion in eigen vector-functions in the form of structural algorithm of finite transformations. Received correlations allow to define the natural-vibration frequency, the stress-strain state of the element, and also the potential and intensity of the induced electric field.

Key words: unjointed problem of electroelasticity, piezoceramic cylinder, axially symmetric dynamic stress.

Paper received 24/IV/2010.

Paper accepted 25/I/2011.

²Shlyakhin Dmitry Averkievich (sgasu@sgasu.smr.ru), the Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.