

УТОЧНЕННЫЙ РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В УСЛОВИЯХ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ В СРЕДЕ С ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ¹

© 2011 Л.В. Степанова²

Статья посвящена вопросам усталостного роста трещины в среде с поврежденностью и проблемам взаимного влияния процесса накопления поврежденности и эволюции напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины. Построено новое асимптотическое решение задачи об усталостном росте трещины в изотропном линейно-упругом материале с учетом процесса накопления рассеянных повреждений в рамках связанной (упругость — поврежденность) постановки задачи в условиях реализации плоского напряженного и плоского деформированного состояния. Получены новое численное решение двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой сводится проблема определения напряженно-деформированного состояния у кончика трещины в среде с поврежденностью, а также новое аналитическое представление полей напряжений, деформаций и сплошности в окрестности вершины трещины как для плоского напряженного, так и для плоского деформированного состояний. Эти решения отличаются от результатов решения J. Zhao, X. Zhang, где предложена оригинальная постановка данной задачи для плоского напряженного состояния.

Ключевые слова: усталостный рост трещины, связанная постановка задачи, связка "упругость — поврежденность", область активного накопления повреждений, область полностью поврежденного материала.

Введение

Под термином "усталость" понимается процесс изменения свойств материала при многократном (периодическом) приложении внешних нагрузок. Данный режим нагружения типичен для большинства элементов конструкций в эксплуатационных условиях.

Вопросы усталостного распространения трещины в среде с поврежденностью и проблемы взаимного влияния процесса накопления поврежденности и эволюции

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-08-00971).

²Степанова Лариса Валентиновна (l1st@ssu.samara.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины привлекают внимание исследователей с середины 90-х годов прошлого века [1–7] и активно продолжается в настоящее время [8–15]. Например, в монографии [13] изложены основные закономерности процессов деформирования и накопления повреждений в конструкционных материалах и представлены математические модели указанных процессов. Приводятся модели развития трещиноподобных дефектов и представлены базовые эксперименты и методики определения материальных параметров моделей.

По всей видимости, первое исследование усталостного роста трещины в связанной постановке задачи линейной теории упругости и механики поврежденности было выполнено в [1]. Результаты этой работы вызвали интерес у многих ученых-механиков, а также могут быть найдены в монографиях [16; 17]. При построении асимптотического решения в окрестности вершины растущей трещины отрыва в условиях плоского напряженного состояния авторы [1] приходят к модификации постановки задачи, в соответствии с которой решение задачи разыскивается на отрезке $[0, \theta_d]$, где $\theta = \theta_d$ — значение полярного угла, разделяющее область активного накопления повреждений, в которой параметр сплошности эволюционирует в соответствии с кинетическим уравнением, задающим степенной закон накопления повреждений, и область полностью поврежденного материала, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль (рис. 1).

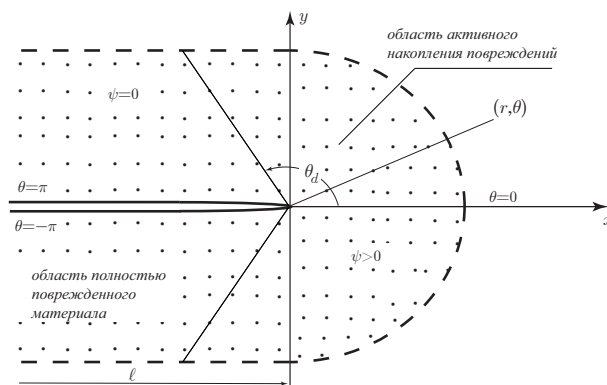


Рис. 1. Геометрия вершины растущей трещины и схематичное представление областей активного накопления повреждений и полностью поврежденного материала

В [1] предполагалось, что параметр сплошности ψ изменяется согласно закону

$$\frac{d\psi}{dN} = \begin{cases} -c \left(\frac{\sigma_e}{\psi} \right)^m \frac{1}{\psi^{n-m}} & (\sigma_e \geq \sigma_{th}\psi), \\ 0 & (\sigma_e < \sigma_{th}\psi), \end{cases} \quad (1)$$

где N — число циклов нагружения, c, σ_{th}, m, n — постоянные, определяемые экспериментальным путем. В [1] численно определены значения угла θ_d , разделяющего область активного накопления повреждений от области полностью поврежденного материала, для различных пар констант n и m . Таким образом, численный анализ, проведенный в [1], показал зависимость угла θ_d от значений материальных параметров n, m : $\theta_d = \theta_d(n, m)$.

Необходимость моделирования области полностью поврежденного материала, примыкающей к берегам растущей трещины, отмечается и при изучении докритического подрастания трещины в условиях ползучести [2; 3]. В этих исследованиях

установлено, что $\theta_d = \pi/2$ для всех значений показателя степени степенного закона Бейли-Нортон теории установившейся ползучести. Данные расхождения в результатах асимптотических исследований, выполненных в [1–3], и обусловили интерес к усталостному росту трещины в среде с поврежденностью, который является предметом данной работы.

Целью работы являются анализ напряженно-деформированного состояния и поля сплошности у вершины усталостной трещины отрыва в среде с поврежденностью в связанной постановке задачи (упругость — поврежденность) в предположении плоского напряженного и плоского деформированного состояния и оценка взаимного влияния процесса накопления рассеянных повреждений и эволюции напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины. Континуальная механика поврежденности [16; 18; 19] исходит из того, что изменение со временем механических свойств материалов феноменологически нередко можно интерпретировать как результат накопления повреждений, различных дефектов, микропор, трещин. Когда повреждения достигают опасного уровня, происходит разрушение. Процесс накопления рассеянных повреждений можно описать путем введения некоторой априорной характеристики поврежденности, которая прежде всего трактуется как сокращение упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади составляющих его элементов, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещины — в упругости, дислокации — в пластичности, микропоры — при ползучести, поверхностные микротрещины — при усталости [16]). Для учета процесса накопления повреждений система уравнений классической механики сплошной среды дополняется кинетическим уравнением, описывающим эволюцию введенного параметра — параметра сплошности или поврежденности. Необходимо отметить, что распределение сплошности (поврежденности) можно определить после решения задачи нахождения напряженно-деформированного состояния в теле путем интегрирования кинетического уравнения. Данный подход решения получил название "несвязанной постановки", задачи теории упругости, теории пластичности или теории ползучести с механикой поврежденности. В этом случае учитывается влияние напряженно-деформированного состояния на рост повреждений в теле. Однако в рамках данного подхода не удастся описать взаимный процесс — процесс влияния поля повреждений на эволюцию напряженно-деформированного состояния в теле. Для учета взаимного влияния изменения напряженно-деформированного состояния и поля повреждений используется так называемая "связанная постановка" задачи, когда скалярный параметр сплошности входит в определяющие соотношения рассматриваемой задачи.

1. Постановка задачи

Рассматривается окрестность вершины трещины в условиях плоского напряженного (или плоского деформированного состояния). В полярной системе координат r, θ , связанной с вершиной трещины, основные соотношения механики деформируемого твердого тела имеют вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0; \quad (2)$$

условие совместности деформаций

$$2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r \frac{\partial^2 (r \varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \quad (3)$$

Определяющие уравнения изотропного линейно-упругого материала в связанной постановке имеют вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \frac{\sigma_{ij}}{\psi} - \frac{\nu}{E} \frac{\sigma_{kk}}{\psi} \delta_{ij}, \quad (4)$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона.

В случае плоского напряженного состояния определяющие уравнения (4) имеют вид

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E\psi} (\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E\psi} (\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{E\psi} \sigma_{r\theta}. \quad (5)$$

Для плоского деформированного состояния определяющие уравнения (4) принимают форму

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1 + \nu}{E\psi} [(1 - \nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}], \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1 + \nu}{E\psi} [(1 - \nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}], \quad (6)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1 + \nu}{E\psi} \sigma_{r\theta}. \quad (7)$$

Краевые условия следуют из условий отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi) = 0. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение функцию напряжений Эри, связанную с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right), \quad (9)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

— оператор Лапласа.

Следуя [1], будем искать асимптотическое решение задачи в непосредственной окрестности вершины трещины ($r \rightarrow 0$) в виде

$$F(r, \theta) = \alpha r^{\lambda+2} f(\theta). \quad (10)$$

Тогда компоненты тензора напряжений представимы в форме разложения по собственным функциям

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \alpha r^\lambda \tilde{\sigma}_{rr}(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \alpha r^\lambda \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \alpha r^\lambda \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}(\theta) &= (\lambda + 2)f(\theta) + f''(\theta), \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) &= (\lambda + 2)(\lambda + 1)f(\theta), \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -(\lambda + 1)f'(\theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Асимптотическое представление параметра сплошности вблизи вершины усталостной трещины задается в виде

$$\psi(r, \theta) = \beta r^\mu g(\theta). \quad (13)$$

Асимптотика деформаций в окрестности вершины трещины определяется формулами

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}(r, \theta) &= \frac{\alpha}{\beta E} r^{\lambda-\mu} \tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta), \quad \varepsilon_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{\alpha}{\beta E} r^{\lambda-\mu} \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}(\theta), \\ \varepsilon_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{\alpha}{\beta E} r^{\lambda-\mu} \tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta),\end{aligned}\quad (14)$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = g^{-1}(e_1 f + f''), \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = g^{-1}(e_2 f - \nu f''), \quad \tilde{\varepsilon}_{r\theta} = g^{-1} e_3 f', \quad (15)$$

где $e_1 = (\lambda + 2)(1 - \nu\lambda - \nu)$, $e_2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1 - \nu)$, $e_3 = -(1 + \nu)(\lambda + 1)$ для плоского напряженного состояния и

$$\tilde{\varepsilon}_{rr} = g^{-1}(s_1 f + (1 - \nu)f''), \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = g^{-1}(s_2 f - \nu f''), \quad \tilde{\varepsilon}_{r\theta} = g^{-1} s_3 f', \quad (16)$$

где $s_1 = (\lambda + 2)(1 - \nu\lambda - 2\nu)$, $s_2 = (\lambda + 2)((1 - \nu)(\lambda + 1) - \nu)$, $s_3 = -(\lambda + 1)$ для плоского деформированного состояния.

Условие совместности деформаций (3) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2(\lambda - \mu + 1) \frac{d\tilde{\varepsilon}_{r\theta}}{d\theta} = \frac{d^2 \tilde{\varepsilon}_{rr}}{d\theta^2} - (\lambda - \mu) \tilde{\varepsilon}_{rr} + (\lambda - \mu + 1) \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}. \quad (17)$$

Учитывая принятые обозначения (15) и (16), можно представить уравнение (17) в виде

$$f^{IV} - 2\bar{E}f''' + (\bar{G} + b_1)f'' - b_2\bar{E}f' + (b_3 + e_1\bar{G})f = 0, \quad (18)$$

для плоского напряженного состояния

$$f^{IV} - 2\bar{E}f''' + (\bar{G} + d_1)f'' + d_2\bar{E}f' + (d_3 + s_1\bar{G}/(1 - \nu))f = 0, \quad (19)$$

для плоского деформированного состояния, где приняты обозначения

$$\bar{E} = g'/g, \quad \bar{G} = 2\bar{E}^2 - g''/g, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}b_1 &= e_1 - e_5 - 2(\lambda - \nu + 1), \quad b_2 = 2e_1 + 2(\lambda - \nu + 1)e_3, \\ b_3 &= -e_4, \quad e_4 = (\lambda - \mu)e_1 - (\lambda - \mu + 1)e_2, \quad e_5 = (\lambda - \mu) + (\lambda - \mu + 1)\nu,\end{aligned}\quad (21)$$

и

$$\begin{aligned}d_1 &= [s_1 - 2(\lambda - \mu + 1)s_3 - (\lambda - \mu)(1 - \nu) - (\lambda - \mu + 1)(\lambda - \mu)\nu]/(1 - \nu), \\ d_2 &= [2(\lambda - \mu + 1) - 2s_1]/(1 - \nu), \\ d_3 &= (\lambda - \mu)[(\lambda - \mu + 1)s_2 - s_1]/(1 - \nu).\end{aligned}\quad (22)$$

В [1] показано, что с учетом введенных асимптотических представлений кинетическое уравнение накопления повреждений может быть представлено в форме

$$\frac{d\psi}{dN} = -c\alpha^m \beta^{-n} r^{m\lambda - \mu n} \tilde{\sigma}_e^m g^{-n}, \quad (23)$$

где

$$\tilde{\sigma}_e = (\tilde{\sigma}_{rr}^2 - \tilde{\sigma}_{rr}\tilde{\sigma}_{\theta\theta} + \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^2 + 3\tilde{\sigma}_{r\theta}^2)^{1/2}. \quad (24)$$

В условиях плоского деформированного состояния кинетическое уравнение (23) сохраняет свою форму, но угловое распределение интенсивности напряжений определяется выражением

$$\tilde{\sigma}_e = \frac{\sqrt{3}}{2} [(\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta})^2 + 4\tilde{\sigma}_{r\theta}^2]^{1/2}. \quad (25)$$

Проводя рассуждения, подобные выполненным в [1], можно найти, что кинетическое уравнение накопления повреждений преобразуется к равенству (a — текущая длина трещины)

$$\frac{d\psi}{dN} = \beta \frac{da}{dN} r^{\mu-1} (g' \sin \theta - \mu g \cos \theta), \quad (26)$$

откуда, сравнивая (23) и (26), легко установить, что

$$\frac{da}{dN} = c\alpha^m \beta^{-(n+1)}, \quad (27)$$

$$m\lambda - \mu n = \mu - 1 \quad \text{или} \quad \lambda = [\mu(n+1) - 1]/m, \quad (28)$$

$$g' \sin \theta - \mu g \cos \theta = -\tilde{\sigma}_e^m g^{-n}. \quad (29)$$

Таким образом, получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (18), (29) с интенсивностью напряжений, определяемой формулой (24), для плоского напряженного состояния и (19), (29) с интенсивностью напряжений, определяемой формулой (25), для плоского деформированного состояния.

Краевые условия задачи следуют из условий симметрии на продолжении трещины

$$f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad g'(0) = 0. \quad (30)$$

В силу однородности систем уравнений (18), (29) и (19), (29) можно сформулировать условие нормировки решения

$$f(0) = 1. \quad (31)$$

Для функции $g(\theta)$ кинетическое уравнение дает возможность получить условие регулярности решения на продолжении линии трещины

$$g(0) = [\tilde{\sigma}_e^m(0)/\mu]^{1/(n+1)}. \quad (32)$$

Краевые условия на берегах трещины имеют вид

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0. \quad (33)$$

Таким образом, для функций $f(\theta)$ и $g(\theta)$ сформулирована двухточечная краевая задача, представляющая собой нелинейную задачу на собственные значения: необходимо подобрать значения двух параметров — собственное число μ и производную второго порядка $f''(0)$, так чтобы выполнялись краевые условия на берегах трещины (33). Для решения задач Коши для систем уравнений (18), (29) и (19), (29) с начальными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = A, \quad f'''(0) = 0, \quad (34)$$

$$g(0) = [\tilde{\sigma}_e^m(0)/\mu]^{1/(n+1)}, \quad g'(0) = 0 \quad (35)$$

была написана программа, реализующая метод Рунге — Кутты — Фельберга [20]. В ходе численного решения задачи подбирались значения собственного числа μ и константы $f''(0) = A$ для различных значений материальных констант m, n такие, чтобы они приводили к выполнению граничных условий на верхнем берегу трещины. Однако, как и ранее [1–3], оказалось, что, начиная с некоторого значения угла θ_a , функция $g(\theta)$ принимает отрицательные значения, что противоречит физическому смыслу параметра сплошности. Поэтому необходимо перейти к модифицированной постановке задачи и искать решение на отрезке $[0, \theta_a]$, а область $[\theta_a, \pi]$ трактовать как область полностью поврежденного материала, в которой все

компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль. Поэтому граничные условия на верхнем берегу трещины "сносились" на луч $\theta = \theta_d$ и принимают вид

$$f(\theta = \theta_d) = 0, \quad f'(\theta = \theta_d) = 0, \quad g(\theta = \theta_d) = 0. \quad (36)$$

Граничные условия (36) считались выполненными, если было выполнено неравенство $((f(\theta_d))^2 + (f'(\theta_d))^2 + (g(\theta_d))^2)^{1/2} < \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-6}$ — наперед заданная точность. Был проведен тщательный численный анализ решений системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (относительно функций $f(\theta)$ и $g(\theta)$) для различных значений μ и A .

Оказалось, что для различных значений пар материальных констант n, m угол θ_d оказывается равным одной и той же величине: $\theta_d = \pi/2$. Поэтому нет зависимости угла θ_d от материальных констант n, m , найденной в [1].

После аккуратного численного решения сформулированной сингулярно возмущенной системы уравнений и анализа угловых распределений компонент тензора напряжений, опираясь на результаты решений, полученных в [2; 3], удалось найти аналитическое решение задачи:

$$f(\theta) = \varkappa (\cos \theta)^{\mu+2} / ((\lambda + 2)(\lambda + 1)), \quad g(\theta) = \varkappa^{m/(n+1)} (\cos \theta)^\mu, \quad (37)$$

$$\lambda = \mu = 1/(1 + n - m).$$

Итоговое распределение напряжений и сплошности в зоне активного накопления повреждений ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) имеет вид (рис. 2–4)

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \varkappa r^\lambda (\cos \theta)^{2+\mu}, \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \varkappa r^\lambda \sin \theta (\cos \theta)^{\mu+1}, \quad (38)$$

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \varkappa r^\lambda \sin^2 \theta \cos^\mu \theta, \quad \psi(r, \theta) = \varkappa^{m/(n+1)} r^\lambda \cos^\mu \theta.$$

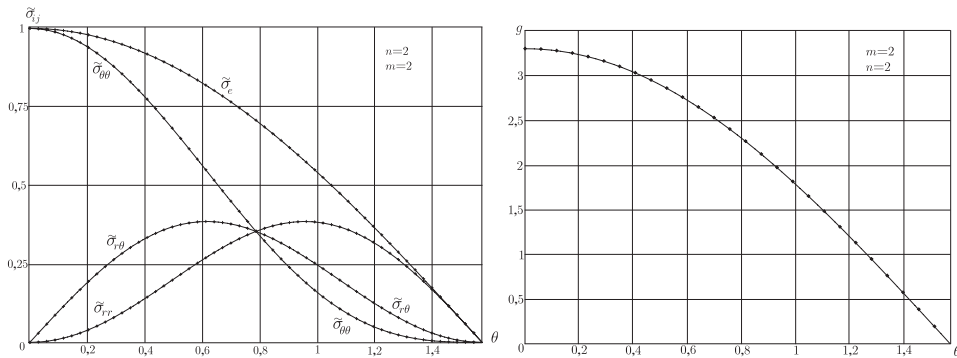


Рис. 2. Угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в окрестности вершины трещины ($m = 2, n = 2$). Сплошной линией показано аналитическое решение, знаком "плюс" показаны точки, найденные в результате численного счета

Угловые распределения напряжений и сплошности (38) являются справедливыми как для случая плоского напряженного, так и для плоского деформированного состояния. Таким образом, в процессе роста усталостной трещины к свободным от нагрузок берегам трещины $\theta = \pm\pi$ вблизи ее вершины примыкает область полностью поврежденного материала $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ и $-\pi \leq \theta \leq -3\pi/2$, в которой все компоненты тензора напряжений и параметр сплошности обращаются в нуль.

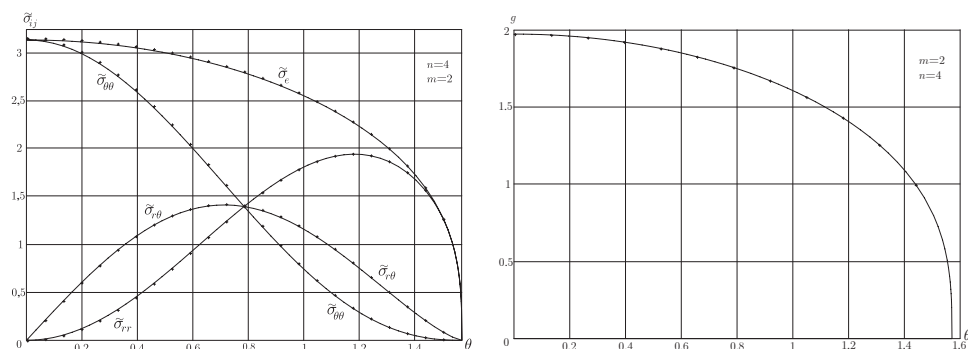


Рис. 3. Угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в окрестности вершины трещины ($m = 2, n = 4$). Сплошной линией показано аналитическое решение, знаком "плюс" показаны точки, найденные в результате численного счета

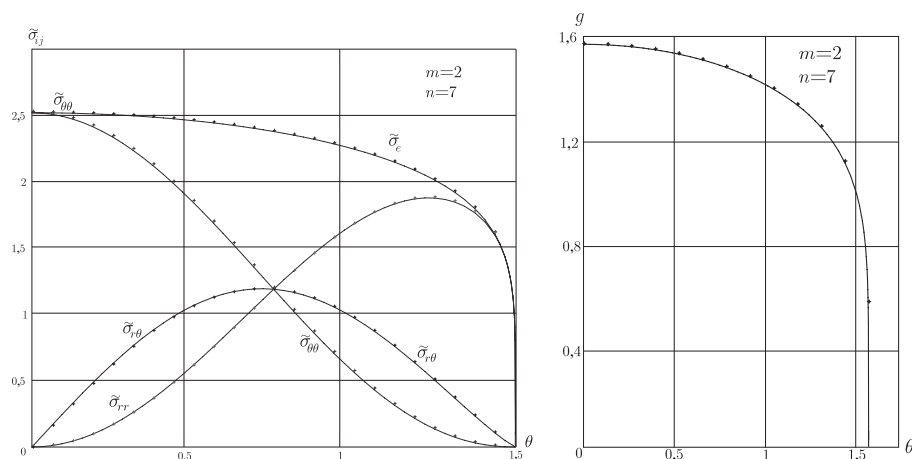


Рис. 4. Угловые распределения компонент тензора напряжений и параметра сплошности в окрестности вершины трещины ($m = 2, n = 7$). Сплошной линией показано аналитическое решение, знаком "плюс" показаны точки, найденные в результате численного счета

Выводы

В работе выполнено асимптотическое исследование полей напряжений, деформаций и сплошности у вершины растущей трещины нормального отрыва, находящейся под действием циклической нагрузки, в связанной формулировке задачи (в связке "упругость — поврежденность").

Построены асимптотические представления компонент тензора напряжений и скалярного параметра сплошности вблизи вершины растущей трещины.

На основе анализа связанной задачи линейной теории упругости и механики поврежденности установлено, что перед вершиной магистральной или макротрещины в процессе ее распространения формируется область активного накопления повреждений, а к берегам трещины примыкает область полностью поврежденного материала. Следовательно, процесс распространения усталостной трещины следу-

ет представлять как продвижение целой области полностью поврежденного материала.

Установлено, что область активного накопления повреждений занимает правую полуплоскость в координатной системе, движущейся вместе с вершиной трещины (что принципиальным образом отличается от результатов решения [1]).

Найдено аналитическое представление компонент тензора напряжений и параметра сплошности в окрестности вершины трещины. Показано, что численное и аналитическое решения задач полностью совпадают.

Литература

- [1] Zhao J., Zhao X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // *Engng. Fracture Mechanics*. 1995. V. 50. № 1. P. 131–141.
- [2] Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // *ФХММ*. 1992. Т. 28. № 1. С. 5–11.
- [3] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // *Изв. РАН. Мех. тверд. тела*. 1995. № 3. С. 160–166.
- [4] Murakami S. Mechanical modeling of material damage // *J. Appl. Mech.* 1988. V. 55. № 2. P. 280–286.
- [5] Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2000. V. 183. P. 15–33.
- [6] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady — state growth // *Int. J. Solids Struct.* 2000. V. 37. P. 6203–6220.
- [7] Mou Y., Han R.P.S. Influence of damage in the vicinity of a macrocrack tip // *Engng. Fracture Mechanics*. 1996. V. 55. № 4. P. 617–632.
- [8] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2006. 232 с.
- [9] Королев И.К., Петин С.В., Фрейдин А.Б. Численное моделирование накопления повреждений и развития усталостной трещины в упругих материалах // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. № 3. С. 34–43.
- [10] Волков И.А., Коротких Ю.Г., Тарасов И.С. Численное моделирование накопления повреждений при сложном пластическом деформировании // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. № 1. С. 5–18.
- [11] Тихомиров В.М., Суворин П.Г. Развитие усталостных трещин смешанного типа в образцах из стали // *ПМТФ*. 2004. Т. 45. № 1. С. 135–142.
- [12] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М.: Физматлит, 2009. 336 с.
- [13] Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
- [14] Бурдуковский В.Г., Каманцев И.С. Критерии накопления повреждений и разрушения при многоциклового усталости металлических материалов (обзор) // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2009. Т. 75. № 7. С. 36–41.
- [15] Белодеденко С.В. Прогнозирование повреждения и живучести элементов конструкций с использованием моделей накопления повреждений // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. 2010. Т. 76. № 1. С. 49–52.

- [16] Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2001. 632 с.
- [17] Li J., Recho N. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture. Paris: Hermes Science Publications, 2002. 262 p.
- [18] Кукуджанов В.Н. Компьютерное моделирование деформирования, повреждаемости и разрушения неупругих материалов и конструкций. М.: МФТИ, 2008. 215 с.
- [19] Voyiadjis G.Z., Kattan P.I. Advances in Damage Mechanics: Metals and Metal Matrix Composites. Oxford: Elsevier, 2006. 708 p.
- [20] Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 1998. 575 с.

Поступила в редакцию 2/II/2011;
в окончательном варианте — 2/II/2011.

REFINED STUDY OF STRESS-STRAIN STATE NEAR THE CRACK TIP UNDER CYCLIC LOADING IN A DAMAGED MEDIUM

© 2011 L.V. Stepanova³

The article is devoted to the fatigue growing crack problems in damaged media and mutual effects of damage on the evolution of the stress-strain state near the crack tip and vice versa. The new asymptotic study of fatigue crack growth in an isotropic linear elastic material based on the continuum damage mechanics in the coupled (elasticity — damage) formulation under plane strain and plane stress conditions is proposed. 1) The new numerical solution of the two-point boundary value problem for non-linear ordinary differential equations to which the fatigue crack growing problem reduces is obtained; 2) The new analytical presentation of stress, strain and continuity fields both for plane strain and plane stress conditions is given. The results obtained differ from Zhao and Zhang's solution where the original formulation of the problem for plane stress conditions has been proposed.

Key words: fatigue crack growth, coupled statement of the problem, elasticity — damage coupling, active damage accumulation zone (process zone), totally damaged zone.

Paper received 2/II/2011.

Paper accepted 2/II/2011.

³Stepanova Larisa Valentinovna (1st@ssu.samara.ru), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.