МЕХАНИКА

УДК 62.534(031)

О РЕАЛИЗАЦИИ ОДНООСНОЙ И ТРЕХОСНОЙ ОРИЕНТАЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ТЕЛ

© 2011 С.П. Безгласный, О.А. Мысина[1]

В работе ставится задача об одно- и трехосной ориентации системы двух тел относительно Кениговой и произвольной неинерциальной систем координат. Решение получено построением активного управления, реализуемого по принципу обратной связи. Синтезированы стабилизирующие управления и выведены условия, при которых возможна желаемая асимптотически устойчивая ориентация. Поставленная задача решена на основе модифицированного метода функций Ляпунова, позволяющего использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными.

Ключевые слова: одноосная и трехосная ориентация, активное управление, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова.

Введение

Задачи о пространственной ориентации спутников и летательных аппаратов на орбите имеют важное прикладное значение и широко рассматриваются различными авторами во многих работах. Например, в [1] были обозначены основные способы и принципы активного и пассивного управления вращательным движением тел. В данной работе исследованы возможности реализации асимптотически устойчивой одно- и трехосной ориентации системы двух тел. Под одноосной ориентацией системы понимается асимптотическое совпадение заданного орта в твердом теле с некоторым ортом, фиксированным в пространственной Кениговой или произвольной неинерциальной системе координат. Трехосная ориентация заключается в совпадении двух ортонормированных реперов — одного, неподвижного в теле, и второго, фиксированного относительно подвижной системы координат. В работе задача ориентации решена активным внешним управлением, построенным по принципу обратной связи и гарантирующим выполнение свойства асимптотической устойчивости полученных решений. Представленные результаты получены на основе метода функций Ляпунова классической теории устойчивости [2] с его модификацией [3], которая позволяет использовать функции Ляпунова со знакопостоянными производными. Аналогичная задача об одно- и трехосной ориентации одного тела была решена в [4].

[1]Безгласный Сергей Павлович (bezglasnsp@rambler.ru), Мысина Ольга Александровна (olgamysina@yandex.ru), кафедра теоретической механики Самарского государственного аэрокосмического университета имени акад. С.П. Королева, 443086, Российская Федерация, г. Самара, Московское шоссе, 34.

1. Постановка задачи

Пусть $O_1\xi\eta\zeta$ есть инерциальная система координат; $O\alpha\beta\gamma$ — произвольно движущаяся в общем случае система координат по отношению к инерциальной системе координат; $Oxyz$ — неинерциальная система координат, неизменно связанная с рассматриваемой механической системой. Эта система представляет собой совокупность двух твердых тел — носителя T_1 и ротора T_2, вращающегося вокруг T_1 с угловой скоростью $\bar{\omega}^{02}$, направленной по оси Oz. Предположим, что центры масс обоих тел совпадают и находятся в точке O (см. рисунок).

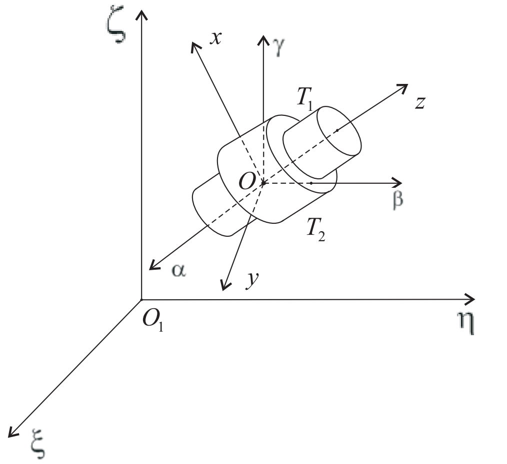

Рис. Система двух тел

Пусть далее заданы два орта $\bar{s}_0$ и $\bar{r}_0$, причем орт $\bar{s}_0$ занимает неизменное положение в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\bar{r}_0$ занимает неизменное положение в системе $Oxyz$.

Следуя [4], поставим задачу об одноосной ориентации системы — определить управляющий внешний момент $\bar{M}^y$, приложенный к системе, который бы стабилизировал орт $\bar{r}_{01}$ в направлении $\bar{s}_{01}$.

Пусть теперь заданы два взаимно перпендикулярных орта $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два орта $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}_{02}$, неизменно связанных с системой координат $Oxyz$. Положим

$$\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}, \quad \bar{r}_{03} = \bar{r}_{01} \times \bar{r}_{02}.$$

Поставим задачу о трехосной ориентации — определить управляющий момент $\bar{M}^y$, который бы стабилизировал орт $\bar{r}_{01}$ в направлении $\bar{s}_{01}$, а орт $\bar{r}_{02}$ — в направлении $\bar{s}_{02}$. Тогда, соответственно, орт $\bar{r}_{03}$ будет ориентирован в направлении $\bar{s}_{03}$.

2. Ориентация относительно Кениговой системы координат

Пусть $O\alpha\beta\gamma$ — система координат, совершающая поступательное движение относительно неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$, то есть является Кениговой. Рассмотрим задачу об одноосной ориентации системы, при которой вектор $\bar{r}_0$ должен быть направлен по оси вектора $\bar{s}_0$.

Согласно теореме об изменении кинетического момента системы, уравнения движения первого тела (носителя) возьмем в виде [1]:

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_1}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{K}_1 = \bar{M'}_1 + \bar{M}^y + \bar{M}_2, \tag{1}$$

где $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения первого тела относительно системы координат $Oxyz$, $\bar{K}_1 = I_1\bar{\omega}$ — его кинетический момент, I_1 — его тензор инерции; $\bar{M'}_1$ — момент внешних сил, приложенных к носителю, $\bar{M}^y$ — управляющий момент активных сил, $\bar{M}_2$ — момент, действующий на носитель со стороны второго тела.

Таким образом, уравнение движения (1) можно переписать в виде:

$$I_1\dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times I_1\bar{\omega} = \bar{M}'_1 + \bar{M}^y + \bar{M}_2, \tag{2}$$

где $\dot{()} = \frac{d}{dt}$ — полная производная по времени.

Уравнение движения второго тела (ротора) в жестко связанной с первым телом системе координат $Oxyz$:

$$\hat{\delta}\left[\frac{\tilde{d}\bar{K}_2}{dt} + (\bar{\omega}_2 \times \bar{K}_2)\right] = \bar{M'}_2 - \bar{M}_2, \tag{3}$$

где $\bar{\omega}_2 = \hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02})$ — абсолютная угловая скорость ротора в жестко связанной с ним системе координат, $\bar{K}_2 = I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02})$ его кинетический момент; $\bar{\omega}^{02} = (0, 0, \dot{\delta})$ — угловая скорость вращения второго тела относительно первого; $\bar{M'}_2$ — момент внешних сил, приложенных к ротору, и $-\bar{M}_2$ — момент, вращающий ротор T_2 относительно носителя T_1. Матрица $\hat{\delta} = \begin{pmatrix} cos\delta & -\sin\delta & 0 \\ \sin\delta & cos\delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ задает тензор перехода от жестко связанной со вторым телом системы координат к жестко связанной с первым телом системе координат [5]. Перепишем уравнение (3) в виде:

$$\begin{aligned} &\hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}(\dot{\bar{\omega}} + \dot{\bar{\omega}}^{02}) + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1}(\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) + (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) = \\ &= \bar{M'}_2 - \bar{M}_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (2) и (4) получим уравнения движения системы относительно центра масс:

$$\begin{aligned} &(I_1 + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1}\bar{\omega} + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}\dot{\bar{\omega}}^{02} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1}\bar{\omega}^{02} + \bar{\omega} \times I_1\bar{\omega} + \\ &+ (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02} = \bar{M}' + \bar{M}^y, \end{aligned} \tag{5}$$

где величина $\bar{M}' = \bar{M}'_1 + \bar{M}'_2$ характеризует воздействие внешних сил на оба тела.

В дальнейшем будем предполагать, что внешние силы отсутствуют, то есть $\bar{M}' = 0$.

Покажем, что решения задачи об одноосной ориентации можно достичь выбором управляющего момента в виде

$$\bar{M}^y = -[B + \dot{\hat{\delta}}I_2\hat{\delta}^{-1}]\bar{\omega} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0) + \hat{\delta}I_2\hat{\delta}^{-1}\dot{\bar{\omega}}^{02} + \hat{\delta}I_2\dot{\hat{\delta}}^{-1}\bar{\omega}^{02} + \bar{\omega}^{02} \times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{\omega}^{02}, \tag{6}$$

где $B = B(t)$ — симметричная матрица размера 3x3, подлежащая определению.

Теорема 1.

При выборе управляющего момента M^y в виде (6) любое движение системы двух тел асимптотически приближается к состоянию относительного покоя $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$. Причем это состояние покоя асимптотически устойчиво по Ляпунову, а состояние покоя $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$ неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

Заметим, что вектор $\bar{s}_0$ вращается по отношению к системе $Oxyz$ с угловой скоростью $-\bar{\omega}$. Следовательно, его изменение можно описать уравнением

$$\frac{d\bar{s}_0}{dt} = \frac{\tilde{d}\bar{s}_0}{dt} + (-\bar{\omega}_0 \times \bar{s}_0),$$

и так как $\bar{s}_0$ фиксирован в подвижной системе координат, это уравнение примет вид:

$$\dot{\bar{s}}_0 = -\bar{\omega} \times \bar{s}_0. \tag{7}$$

Уравнения движения (5) при управлении (6) имеют вид:

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + (\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega} + \bar{\omega} \times I_1 \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1}\bar{\omega} + \\ &+ \bar{\omega} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{\omega}^{02} = -B\bar{\omega} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0).\end{aligned} \tag{8}$$

Система (8) имеет два положения равновесия:

1) $\bar{\omega} = 0,\ \bar{s}_0 = \bar{r}_0$;

2) $\bar{\omega} = 0,\ \bar{s}_0 = -\bar{r}_0$.

Причем других решений система (8) на множестве $\{\omega = 0\}$ не имеет.

Выберем скалярную функцию Ляпунова в виде:

$$V = \frac{1}{2}\left(\bar{\omega}^\top (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\bar{\omega} + \alpha(\bar{r}_0 - \bar{s}_0)^2\right).$$

Ее производная в силу уравнений (7), (8) без учета слагаемых выше второго порядка малости будет иметь следующий вид:

$$\frac{dV}{dt} \cong -\bar{\omega}^\top B \bar{\omega} - \frac{1}{2}\bar{\omega}^\top (\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega} - \bar{\omega}^\top C \bar{\omega},$$

где $C = \{c_{ij}\}$ — симметричная матрица с элементами, определяемыми по формулам:

$$\begin{gathered}
c_{11} = \omega_2^{02}(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + \omega_3^{02}(I_{2yx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),\\
c_{22} = \omega_3^{02}(I_{2xx}\sin\delta + I_{2xy}\cos\delta) - \omega_1^{02}(I_{2zx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),\\
c_{33} = \omega_1^{02} I_{2yz} - \omega_2^{02} I_{2xz},\\
\begin{aligned}2c_{12} = &-\omega_1^{02}(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + \omega_2^{02}(I_{2zx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta) + \\ &+ \omega_3^{02}((I_{2xx} - I_{2yy})\cos\delta - 2I_{2xy}\sin\delta),\end{aligned}\\
2c_{13} = \omega_1^{02}(I_{2yx}\cos\delta - I_{2yy}\sin\delta) + \omega_2^{02}(I_{2zz} - I_{2xx} cos\delta + I_{2yx}\sin\delta) - \omega_3^{02} I_{2yz},\\
2c_{23} = \omega_1^{02}(I_{2yx}\sin\delta + I_{2yy}\cos\delta - I_{2zz}) - \omega_2^{02}(I_{2xx}\sin\delta + I_{2xy}\cos\delta) + \omega_3^{02} I_{2xz},\\
c_{21} = c_{12}, c_{31} = c_{13}, c_{32} = c_{23}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Подбором элементов матрицы B создадим управляющий момент (6) таким образом, чтобы было выполнено неравенство:

$$\bar{\omega}^\top \left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]\bar{\omega} \geqslant b_0 \left\|\bar{\omega}\right\|^2, \quad b_0 > 0. \tag{10}$$

Тогда матрица $\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]$ будет определенно-положительной, и соответственно производная функции Ляпунова будет иметь оценку:

$$\dot{V} \leqslant -b_0 \left\|\bar{\omega}\right\|^2 \leqslant 0,$$

то есть будет определенно-отрицательной по скоростям. Производная $\dot{V} = 0$ на множестве $\{\omega = 0\}$, причем на этом множестве система (8) не имеет других решений, кроме $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = \pm\bar{r}_0$. На основе теоремы из [3] имеем асимптотическую устойчивость положения $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ и неустойчивость решения $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$. Таким образом, управляющий момент (6) при условии (10) решает задачу об одноосной ориентации системы двух тел в Кениговой системе координат.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим задачу о трехосной ориентации.

Пусть заданы два взаимно перпендикулярных орта $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два орта $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}_{02}$, неизменно связанных с системой координат $Oxyz$. Положив

$$\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}, \quad \bar{r}_{03} = \bar{r}_{01} \times \bar{r}_{02},$$

поставим задачу о трехосной стабилизации — определить управляющий момент $\bar{M}^y$, обеспечивающий асимптотическое совпадение реперов $\bar{s}_{01}, \bar{s}_{02}, \bar{s}_{03}$ и $\bar{r}_{01}, \bar{r}_{02}, \bar{r}_{03}$.

Как и ранее, в предположении отсутствия внешних сил ($\bar{M}'_1 = \bar{M}'_2 = 0$) получим уравнения движения всей системы двух тел относительно $Oxyz$:

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{\omega} + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1} \dot{\bar{\omega}}^{02} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{\omega}^{02} + \bar{\omega} \times I_1 \bar{\omega} + \\ &+ (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) = \bar{M}^y.\end{aligned} \tag{11}$$

Покажем, что решения задачи о трехосной ориентации можно достичь выбором управляющего момента в виде

$$\bar{M}^y = -[B + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1}]\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{\omega}^{02} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{\omega}^{02} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\bar{r}_{0i} \times \tilde{s}_{0i}) \ , \tag{12}$$

где $\tilde{s}_{0i} = A\bar{s}_{0i}$, A — матрица перехода от системы координат $O\alpha\beta\gamma$ к системе $Oxyz$.

Теорема 2.

При выборе управляющего момента M^y в виде (12) любое движение системы двух тел асимптотически приближается к состоянию относительного покоя $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ $i = (1, 2, 3)$ либо стремится к нему. Причем это состояние покоя асимптотически устойчиво по Ляпунову, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

Векторы $\tilde{s}_{0i}$ вращаются относительно системы $Oxyz$ с угловой скоростью $-\bar{\omega}$, и их движение описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{s}}_{01} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{01}, \\ \dot{\tilde{s}}_{02} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{02}, \\ \dot{\tilde{s}}_{03} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{03}. \end{cases}$$

Уравнения движения (11) при управлении (12) имеют вид:

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + (\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{\omega} + \\ &+ \bar{\omega} \times I_1 \bar{\omega} + \bar{\omega} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{\omega}^{02} = -B\bar{\omega} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\bar{r}_{0i} \times \tilde{s}_{0i}).\end{aligned} \tag{13}$$

Система (13) имеет положения равновесия:

$$\bar{\omega} = 0, \quad \bar{s}_{01} = \pm\bar{r}_{01}, \quad \bar{s}_{02} = \pm\bar{r}_{02}, \quad \bar{s}_{03} = \pm\bar{r}_{03},$$

и при этом других положений равновесия на множестве $\{\omega = 0\}$ система не имеет.

Выберем функцию Ляпунова в виде:

$$V = \frac{1}{2}\left(\bar{\omega}^\top (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\bar{\omega} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i (\bar{r}_{0i} - \tilde{s}_{0i})^2\right).$$

Производная функции Ляпунова в силу уравнений движения (13) без учета слагаемых выше второго порядка малости будет иметь вид:

$$\frac{dV}{dt} \cong -\bar{\omega}^\top B\bar{\omega} - \bar{\omega}^\top C\bar{\omega} - \frac{1}{2}\bar{\omega}^\top (\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{\omega}, \tag{14}$$

где элементы симметричной матрицы $C = \{c_{ij}\}$ вычисляются по формулам (9).

Подбором элементов матрицы B создадим управляющий момент (12) таким образом, чтобы было выполнено неравенство:

$$\bar{\omega}^\top \left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]\bar{\omega} \geqslant b_0 \left\|\bar{\omega}\right\|^2, \quad b_0 > 0. \tag{15}$$

Тогда матрица $\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]$ будет определенно-положительной, и производная функции Ляпунова будет иметь оценку:

$$\dot{V} \leqslant -b_0 \left\|\bar{\omega}\right\|^2 \leqslant 0.$$

Множество, на котором производная (14) равна нулю, есть множество $\{\omega = 0\}$. Система (13) на множестве $\{\omega = 0\}$ не имеет других решений, кроме $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{01} = \pm\bar{r}_{01}$, $\bar{s}_{02} = \pm\bar{r}_{02}$, $\bar{s}_{03} = \pm\bar{r}_{03}$. Поэтому на основе теоремы из [3] имеем, что положение равновесия $\bar{\omega} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво. Таким образом управляющий момент (12) при выполнении условия (15) решает задачу трехосной ориентации в Кениговой системе координат.

Теорема доказана.

3. Ориентация относительно неинерциальной системы координат

Рассмотрим задачу ориентации системы двух тел относительно произвольной неинерциальной системы координат.

Пусть опять $O_1\xi\eta\zeta$ есть инерциальная система координат, $Oxyz$ — жестко связанная с носителем T_1 система координат. Пусть система $O\alpha\beta\gamma$ совершает произвольное вращающение с угловой скоростью $\bar{\omega}_0$ относительно неподвижной системы $O_1\xi\eta\zeta$.

Зададим два орта $\bar{s}_0$ и $\bar{r}_0$ (орт $\bar{s}_0$ неизменен в системе $O\alpha\beta\gamma$, а орт $\bar{r}_0$ неизменен в $Oxyz$) и рассмотрим задачу об одноосной ориентации, при которой вектор $\bar{r}_0$ должен быть направлен по оси вектора $\bar{s}_0$. Как и ранее, движение первого тела опишем уравнением (2), второго — уравнением (4), тогда (5) будет описывать движение системы двух тел.

Если в начальный момент времени $t = 0$ орт $\bar{r}_0$ совпадает с ортом $\bar{s}_0$, то под действием момента

$$\begin{aligned}\bar{M}_0 = (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}}_0 + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{\omega}_0 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1} \dot{\bar{\omega}}^{02} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{\omega}^{02} + \\ + \bar{\omega}_0 \times I_1 \bar{\omega}_0 + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02})\end{aligned} \tag{16}$$

орт $\bar{r}_0$ будет ориентирован в направлении $\bar{s}_0$.

При наличии начальных отклонений или при действии малых возмущений требуется построить дополнительный управляющий момент $\bar{M}$, который обеспечивал бы стабилизацию орта $\bar{r}_0$ по отношению к $\bar{s}_0$.

Обозначим

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0(t) + \bar{x}, \tag{17}$$

где $\bar{x}$ — возмущение, $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$. Подставляя (16) и (17) в (5), получим уравнение возмущенного движения:

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_0 \times I_1 \bar{x} + \\ &+ \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1}(\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} = \bar{M}.\end{aligned} \tag{18}$$

Изменение вектора $\bar{s}_0$ описывается уравнением

$$\dot{\bar{s}}_0 = -(\bar{\omega}_0 + \bar{x}) \times \bar{s}_0.$$

Для решения задачи об одноосной ориентации выберем управляющий момент в виде

$$\bar{M} = -B\bar{x} - \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0). \tag{19}$$

Теорема 3.

Пусть система $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$, где $\bar{M}_0$ и $\bar{M}$ определяются из (16) и (19), решает задачу об ориентации орта $\bar{r}_0$ в направлении орта $\bar{s}_0$. Причем положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ асимптотически устойчиво, а положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$ неустойчиво в смысле Ляпунова.

Доказательство.

Уравнение движения (18) под действием управляющего момента (19) имеет вид:

$$\begin{aligned}&(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times [I_1(\bar{x} + \bar{\omega}_0) + I_2 \hat{\delta}^{-1}(\bar{x} + \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02})] + \\ &+ \bar{\omega}_0 \times I_1 \bar{x} + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} = -B\bar{x} - \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 \times \bar{s}_0).\end{aligned} \tag{20}$$

Система (20) на множестве $\{x = 0\}$ имеет только два положения равновесия:

$$\bar{x} = 0, \bar{s}_0 = \pm \bar{r}_0.$$

Производная функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(\bar{x}^\top (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\bar{x} + \alpha(\bar{r}_0 - \bar{s}_0)^2\right)$$

в силу системы (20) без учета слагаемых выше второй степени малости имеет вид:

$$\dot{V} \cong -\bar{x}^\top B \bar{x} - \bar{x}^\top C \bar{x} - \frac{1}{2}\bar{x}^\top (\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x},$$

где $C = \{c_{ij}\}$ — симметричная матрица с элементами, определяемыми формулами:

$$c_{11} = (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + (\omega_{03} + \omega_3^{02})(I_{2yx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),$$

$$c_{22} = (\omega_{03} + \omega_3^{02})(I_{2xx}\sin\delta + I_{2xy}\cos\delta) - (\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2zx}\sin\delta + I_{2zy}\cos\delta),$$

$$c_{33} = (\omega_{01} + \omega_1^{02})I_{2yz} - (\omega_{02} + \omega_2^{02})I_{2xz},$$

$$\begin{aligned}&2c_{12} = -(\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2zx}\cos\delta - I_{2zy}\sin\delta) + (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2zx}\sin\delta + \\ &+ I_{2zy}\cos\delta) + (\omega_{03} + \omega_3^{02})((I_{2xx} - I_{2yy})\cos\delta - 2I_{2xy}\sin\delta),\end{aligned} \tag{21}$$

$2c_{13} = (\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2yx}\cos\delta - I_{2yy}\sin\delta) + (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2zz} - I_{2xx}cos\delta +$
$+ I_{2yx}\sin\delta) - \omega_3^{02} I_{2yz},$
$2c_{23} = (\omega_{01} + \omega_1^{02})(I_{2yx}\sin\delta + I_{2yy}\cos\delta - I_{2zz}) - (\omega_{02} + \omega_2^{02})(I_{2xx}\sin\delta +$
$+ I_{2xy}\cos\delta) + \omega_3^{02} I_{2xz},$
$c_{21} = c_{12}, c_{31} = c_{13}, c_{32} = c_{23}.$

Пусть управляющий момент создается таким образом, что выполняется неравенство (это возможно сделать подбором элементов матрицы B):

$$\bar{x}^\top \left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1}) \right] \bar{x} \geqslant b_0 \left\| \bar{x} \right\|^2 \quad , \quad b_0 > 0.$$

Тогда матрица $\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1}) \right]$ будет определенно-положительной, и производная функции Ляпунова будет иметь оценку:

$$\dot{V} \leqslant -b_0 \left\| \bar{x} \right\|^2 \leqslant 0.$$

Множество, на котором производная равна нулю, есть множество $\{x = 0\}$. Система (20) на множестве $\{x = 0\}$ не имеет других решений, кроме $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ и $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$. Поэтому на основе теоремы из [3] имеем, что положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = \bar{r}_0$ асимптотически устойчиво, а положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_0 = -\bar{r}_0$ неустойчиво в смысле Ляпунова. Итак, управляющий момент $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$, где $\bar{M}_0$ и $\bar{M}$ определяются из (16) и (19), решает задачу об ориентации орта $\bar{r}_0$ в направлении орта $\bar{s}_0$

Теорема доказана.

Рассмотрим задачу о трехосной ориентации системы двух тел относительно неинерциальной системы координат.

Пусть заданы два перпендикулярных орта $\bar{s}_{01}$ и $\bar{s}_{02}$, занимающих неизменное положение в системе координат $O\alpha\beta\gamma$, и пусть заданы два перпендикулярных орта $\bar{r}_{01}$, $\bar{r}_{02}$, неизменно связанных с системой координат $Oxyz$. Положим $\bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}$, $\bar{r}_{03} = \bar{r}_{01} \times \bar{r}_{02}$.

Определим управляющий момент $\bar{M}^y$, который бы стабилизировал орт $\bar{r}_{01}$ в направлении $\bar{s}_{01}$, а орт $\bar{r}_{02}$ — в направлении $\bar{s}_{02}$ (тогда орт $\bar{r}_{03}$ будет ориентирован в направлении $\bar{s}_{03}$).

Опять движение системы двух тел относительно центра масс в предположении отсутствия внешних сил ($\bar{M}' = \bar{M}_1' = \bar{M}_2' = 0$) имеет вид, аналогичный (5):

$$\begin{gathered} (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{\omega}} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{\omega} + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1} \dot{\bar{\omega}}^{02} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{\omega}^{02} + \\ + \bar{\omega} \times I_1 \bar{\omega} + (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} (\bar{\omega} + \bar{\omega}^{02}) = \bar{M}^y. \end{gathered} \tag{22}$$

Если в начальный момент времени $t = 0$ репер $\bar{r}_{01}, \bar{r}_{02}, \bar{r}_{03}$ совпадает с репером $\bar{s}_{01}, \bar{s}_{02}, \bar{s}_{03}$, то под действием момента (16) репер $\bar{r}_{01}, \bar{r}_{02}, \bar{r}_{03}$ будет ориентирован в направлении $\bar{s}_{01}, \bar{s}_{02}, \bar{s}_{03}$.

При наличии начальных отклонений или при действии возмущений необходим дополнительный момент $\bar{M}$, который обеспечивал бы искомую трехосную стабилизацию.

Аналогично (18) в отклонениях (17) под действием момента (16) из системы (22) получим уравнения возмущенного движения:

$$\begin{gathered} (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{x} + \bar{x} \times I_1 \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_0 \times I_1 \bar{x} + \\ + \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times I_2 \hat{\delta}^{-1} (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2 \hat{\delta}^{-1} \bar{x} = \bar{M}. \end{gathered} \tag{23}$$

Выберем управляющий момент в виде

$$\bar{M} = -B\bar{x} - \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1}\bar{x} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\bar{r}_{0i} \times \tilde{s}_{0i}), \quad \tilde{s}_{0i} = A\bar{s}_{0i}, \tag{24}$$

где A — матрица перехода от системы координат $O\alpha\beta\gamma$ к системе $Oxyz$.

Теорема 4.

Пусть система $O\alpha\beta\gamma$ вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}_0(t)$ относительно абсолютной системы координат $O_1\xi\eta\zeta$. Тогда управляющий момент $\bar{M}^y = \bar{M}_0 + \bar{M}$, где $\bar{M}_0$ и $\bar{M}$ определяются, соответственно, из (16) и (24), решает задачу о трехосной ориентации относительно $O\alpha\beta\gamma$. Причем положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво

Доказательство.

Движение векторов $\tilde{s}_{0i}$ описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{s}}_{01} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{01}, \\ \dot{\tilde{s}}_{02} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{02}, \\ \dot{\tilde{s}}_{03} = -\bar{\omega} \times \tilde{s}_{03}. \end{cases}$$

Уравнение движения (23) при управлении (24) имеет вид:

$$\begin{gathered} (I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\dot{\bar{x}} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1} \bar{x} + \bar{x} \times [I_1(\bar{x} + \bar{\omega}_0) + I_2\hat{\delta}^{-1}(\bar{x} + \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02})] + \\ + \bar{\omega}_0 \times I_1\bar{x} + (\bar{\omega}_0 + \bar{\omega}^{02}) \times I_2\hat{\delta}^{-1}\bar{x} = -B\bar{x} - \dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1}\bar{x} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\bar{r}_{0i} \times \tilde{s}_{0i}). \end{gathered} \tag{25}$$

Система (25) на множестве $\{x = 0\}$ имеет положения равновесия:

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{s}_{01} = \pm\bar{r}_{01} \quad , \quad \bar{s}_{02} = \pm\bar{r}_{02}, \quad \bar{s}_{03} = \bar{s}_{01} \times \bar{s}_{02}.$$

Производная функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}\left(\bar{x}^\top(I_1 + \hat{\delta} I_2 \hat{\delta}^{-1})\bar{x} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\bar{r}_{0i} - \tilde{s}_{0i})^2\right)$$

в силу системы (25) будет иметь вид:

$$\dot{V} \cong -\bar{x}^\top B\bar{x} - \bar{x}^\top C\bar{x} - \frac{1}{2}\bar{x}^\top(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\bar{x}, \tag{26}$$

где элементы симметричной матрицы $C = \{c_{ij}\}$ определяются формулами (21). Выбором элементов матрицы B согласно условию:

$$\bar{x}^\top \left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]\bar{x} \geqslant b_0 \left\|\bar{x}\right\|^2 \quad , \quad b_0 > 0$$

обеспечим определенно-положительность матрицы $\left[B + C + \frac{1}{2}(\dot{\hat{\delta}} I_2 \hat{\delta}^{-1} + \hat{\delta} I_2 \dot{\hat{\delta}}^{-1})\right]$ и определенно–отрицательность по скоростям производной функции Ляпунова:

$$\dot{V} \leqslant -b_0 \left\|\bar{x}\right\|^2 \leqslant 0.$$

Множество $\{x = 0\}$, на котором $\dot{V}$ равна нулю, не содержит других решений системы (25), кроме

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{s}_{01} = \pm\bar{r}_{01} \quad , \quad \bar{s}_{02} = \pm\bar{r}_{02}, \quad \bar{s}_{03} = \pm\bar{r}_{0}.$$

Поэтому на основе теоремы из [3] получим, что положение равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{s}_{0i} = \bar{r}_{0i}$ асимптотически устойчиво, а любое другое положение равновесия, отличное от этого, неустойчиво.

Доказательство окончено.

Результаты, полученные в работе, развивают соответствующие положения о стабилизации программных движений из [1; 4].

Авторы благодарны профессору В.С. Асланову за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

Литература

[1] Раушенбах В.В., Токарь В.И. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 589 с.

[2] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 301 с.

[3] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2.

[4] Андреев А.С., Чудинова И.А. К задаче об ориентации спутника относительно произвольной системы координат // Ученые записки УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. 2001. № 1. С. 3–11.

[5] Асланов В.С., Дорошин А.В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закрутки при осуществлении неуправляемого спуска. Космические исследования. 2002. Т. 40. № 2. С. 193–200.

Поступила в редакцию 25/*V*/2010;
в окончательном варианте — 12/*I*/2011.

ABOUT THE REALIZATION OF MONOAXIAL AND TRIAXIAL ORIENTATIONS OF COMPOSITION BODY OF TWO-BODY SYSTEM

 S.P. Bezglasnyi, O.A. Mysina[2]

In the work the problem about monoaxial and triaxial orientations of a two-body system concerning Kenigov and random not inertial coordinate system is put. The solution is gained by construction of active control which is realized by a feedback principle. Stabilizing controls are synthesized and conditions under which the desirable asymptotically stable orientation is possible. The assigned task is solved on the basis of modified method of Lyupanov's functions, which allows to use Lyupanov's functions with sign fixed derivatives.

Key words: monoaxial and triaxial orientations, active control, asymptotically stable, Lyupanov's functions.

Paper received 25/V/2010.
Paper accepted 12/I/2011.

[2]Bezglasnyi Sergey Pavlovich (bezglasnsp@rambler.ru), Mysina Olga Alexandrovna (olgamysina@yandex.ru), the Dept. of Theoretical Mechanics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russian Federation.