УДК 517.928.1

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ МАКСИМАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2011 О.П. Филатов[1]

Для периодической функции, зависящей от времени и основных переменных, и дифференциального включения с постоянной правой частью получены двусторонние оценки предела максимального среднего. Доказана теорема существования предела максимального среднего.

Ключевые слова: предел максимального среднего, дифференциальное включение, двусторонние оценки.

Введение

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{\gamma} \in G, \quad \gamma(t_0) = y_0, \tag{1}$$

где компактное множество $G \subset \mathbb{R}^m$, начальные условия $(t_0, y_0) \in D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Множество всех решений задачи (1) (в смысле Каратеодори), определенных в промежутке $[t_0, \infty)$, обозначим $\Gamma(t_0, y_0)$.

Определим класс $\mathbb{P}$ функций $f : D \to \mathbb{R}$, $(t, y) \to f(t, y)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$ следующими условиями: 1) по переменной $t \in \mathbb{R}$ функция f измерима (по Лебегу), по переменной $y \in \mathbb{R}^m$ непрерывна; 2) существует постоянная $C_f > 0$ такая, что $|f(t, y)| \leqslant C_f$ для любых $(t, y) \in D$; 3) по любой переменной $t, y_1, \ldots, y_m$ функция f является T-периодической.

Для функции $f : D \to \mathbb{R}$ предел максимального среднего

$$M_f = \lim_{\Delta \to \infty} \sup_{\gamma \in \Gamma(t_0, y_0)} \frac{1}{\Delta} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta} f(t, \gamma(t))\, dt. \tag{2}$$

Выпуклую оболочку множества $G \subset \mathbb{R}^m$ обозначим символом $co(G)$, а внутренность множества $A \subset \mathbb{R}^m$ — $int(A)$. Кроме того, введем обозначение для бруса $K_m(y_0, l) = [y_{01}, y_{01} + l] \times \cdots \times [y_{0m}, y_{0m} + l] \subset \mathbb{R}^m$ и для бруса $K(t_0, y_0, l) = [t_0, t_0 + l] \times K_m(y_0, l)$, где $(t_0, y_0) \in D$, $l > 0$.

Если $int(co(G)) \neq \emptyset$, а функция $f \in \mathbb{P}$ (или является почти периодической), то предел максимального среднего M_f существует и не зависит от начальных условий (см. теорему 1), в частности, можно считать $t_0 = 0$. Наряду с (2) рассмотрим

[1]Филатов Олег Павлович (`filatov_oleg@samaradom.ru`), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

максимальное среднее на отрезке $[0,\Delta]$

$$M_f^\Delta = \sup_{y_0\in K_m} \sup_{\gamma\in\Gamma(0,y_0)} \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta f(t,\gamma(t))\,dt, \qquad (3)$$

где $K_m = K_m(0,T)$. Если $\Delta = nT$ для целого n, то в силу периодичности функции f имеем $M_f \leqslant M_f^\Delta$. Следовательно, если для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать такое Δ, чтобы выполнялась оценка $M_f \geqslant M_f^\Delta - \varepsilon$, то исходная задача вычисления предела максимального среднего с заданной точностью сводится к задаче (3) (см. теорему 2).

1. Теорема существования

В работе [2] для непрерывной почти периодической функции $f : \mathbb{R}^m \to R$ и невырожденного компакта $G \subset \mathbb{R}^m$ (то есть множество G не содержится в подпространстве размерности $(m-1)$) доказана теорема о существовании предела максимального среднего и его независимость от начальных условий. В данном случае функция f зависит от переменой $t \in \mathbb{R}$, по которой требуется только измеримость, поэтому формальная ссылка на [2] требует пояснений. Более того, так как размерность пространства D увеличилась на 1 по сравнению с автономным случаем, то к компакту G предъявляются более жесткие требования (см. теорему 1). Теорема существования доказывается для почти периодической функции $f : D \to \mathbb{R}$.

Определение 1. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $l = l(\varepsilon) > 0$ такая, что любой брус $K(t_0, y_0, l)$ содержит ε-почти период $(p_0, p) \in D$ функции f, то есть $|f(t+p_0, y+p) - f(t,y)| \leqslant \varepsilon \ \forall (t,y) \in D$.

Определение 2. Среднее

$$I(\Delta, t_0, y_0, \gamma) = \frac{1}{\Delta}\int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t,\gamma(t))\,dt, \quad \gamma \in \Gamma(t_0, y_0)$$

равномерно сверху асимптотически не зависит от начальных условий, если для любого $\varepsilon > 0$ существует Δ_0 такое, что для произвольных начальных условий $(t_1, a_1), (t_2, a_2) \in D$ и произвольного решения $\gamma_1 \in \Gamma(t_1, a_1)$ найдется решение $\gamma_2 \in \Gamma(t_2, a_2)$, для которого выполняется неравенство $I_2 \leqslant I_1 + \varepsilon$ при любом $\Delta \geqslant \Delta_0$. Здесь $I_j = I(\Delta, t_j, a_j, \gamma_j)$, $j = 1, 2$.

Следующая лемма является следствием теоремы о существовании усредненного дифференциального включения из [3].

Лемма 1. Пусть для функции $f : D \to \mathbb{R}$ выполняются условия 1), 2). Тогда равномерный предел максимального среднего M_f (не зависящий от начальных условий) существует только, если среднее $I(\Delta, t_0, y_0, \gamma)$ равномерно сверху асимптотически не зависит от начальных условий $(t_0, y_0) \in D$.

Теорема 1. Пусть почти периодическая функция $f : D \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1), 2) и $int(co(G)) \neq \emptyset$. Тогда предел максимального среднего M_f, не зависящий от начальных условий, существует равномерно по $(t_0, y_0) \in D$. Более того, существует решение $\gamma^{opt} \in \Gamma(t_0, y_0)$, для которого

$$M_f = \lim_{\Delta\to\infty} \frac{1}{\Delta}\int_{t_0}^{t_0+\Delta} f(t, \gamma^{opt}(t))\,dt.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные начальные условия (t_1, a_1) и (t_2, a_2) из пространства D и произвольное решение $\gamma_1 \in \Gamma(t_1, a_1)$.

Так как $int(co(G)) \neq \emptyset$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ и $l = l(\varepsilon)$ из определения 1 существуют $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$ и вектор $z_0 \in \mathbb{R}^m$ такие, что для любого $\tau \in [\tau_0, \tau_0 + l]$ выполняется включение

$$K_m(z_0, l) \subset (a_2 + \tau co(G)). \tag{4}$$

Брус $K(t_2+\tau_0, z_0, l)$ содержит точку (t_1+p_0, a_1+p) для некоторого ε-почти периода (p_0, p) функции f. В частности, для $t_* = t_1 + p_0$ выполняются неравенства $t_2 + \tau_0 \leqslant t_* \leqslant t_2 + \tau_0 + l$. Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{\gamma} \in G, \quad \gamma(t_2) = a_2, \tag{5}$$

для которой множество достижимости в момент времени $t = t_*$ равно

$$a_2 + \int_{t_2}^{t_*} G\, dt = a_2 + (\tau_0 + \delta) co(G).$$

Здесь неотрицательное число $\delta = t_* - t_2 - \tau_0 \leqslant l$. Отсюда и (4), где $\tau = \tau_0 + \delta$, следует существование решения $\chi(t)$ задачи (5) такого, что $\chi(t_*) = a_1 + p$. Теперь определим решение задачи (5)

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \chi(t), & \text{если} \quad t_2 \leqslant t \leqslant t_*, \\ \gamma_1(t - t_* + t_1) + p, & \text{если} \quad t \geqslant t_*, \end{cases}$$

для которого среднее

$$I_2 = \frac{1}{\Delta} \int_{t_2}^{t_*} f(t, \chi(t))\, dt + \frac{1}{\Delta} \int_{t_*}^{t_2+\Delta} f(t, \gamma_1(t - t_* + t_1) + p)\, dt.$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства обозначим J_1, а второе — J_2. Так как $t_* - t_2 \leqslant l + \tau_0$, то с учетом условия 2) получим неравенство $|J_1| \leqslant C_f(l + \tau_0)/\Delta$. Для оценки слагаемого J_2 выполним в интеграле замену переменной $\alpha = t - t_* + t_1 = t - p_0$. Тогда

$$J_2 = \frac{1}{\Delta} \int_{t_1}^{t_2+\Delta-p_0} f(\alpha + p_0, \gamma_1(\alpha) + p)\, d\alpha, \quad \Delta \geqslant l + \tau_0.$$

Следовательно,

$$I_2 - I_1 = J_1 + \frac{1}{\Delta} \int_{t_1}^{t_1+\Delta} [f(\alpha + p_0, \gamma_1(\alpha) + p) - f(\alpha, \gamma_1(\alpha))]\, d\alpha +$$
$$+ \frac{1}{\Delta} \int_{t_1+\Delta}^{t_2+\Delta-p_0} f(\alpha + p_0, \gamma_1(\alpha) + p)\, d\alpha.$$

Здесь последнее слагаемое оценивается так же, как и J_1, поэтому с учетом условия 3) правая часть полученного равенства по модулю не превосходит $C_f(l + \tau_0)/\Delta + \varepsilon + C_f(l + \tau_0)/\Delta = 2C_f(l + \tau_0)/\Delta + \varepsilon$. Таким образом, получена оценка $I_2 - I_1 \leqslant 2C_f(l + \tau_0)/\Delta + \varepsilon$. Если принять $\Delta_0 = \max\{2C_f(l + \tau_0)/\varepsilon, l + \tau_0\}$, то при $\Delta \geqslant \Delta_0$ получим $I_2 - I_1 \leqslant 2\varepsilon$. Следовательно, по лемме 1 предел максимального среднего существует равномерно по $(t_0, y_0) \in D$. Доказательство существования оптимального решения γ^{opt} задачи (1) принципиально не отличается от доказательства из [2], поэтому не приводится. Теорема доказана.

Замечание 1. Если внутренность выпуклой оболочки компакта $G \subset \mathbb{R}^m$ пуста, то можно показать, что предел максимального среднего M_f для почти периодической функции f и произвольного компакта G существует, но в общем случае зависит от начальных условий $(t_0, y_0) \in D$.

2. Оценки предела максимального среднего

Если $int(co(G)) \neq \emptyset$, то для любого достаточно большого $\tau > 0$ множество $\tau co(G)$ содержит некоторый брус $K_m(z_0, T)$, где $z_0 \in \mathbb{R}^m$ зависит от τ. Для компакта G его выпуклая оболочка также компактна, поэтому существует минимальное значение из таких τ, обозначаемое $\tau_0 = \tau_0(G)$. В следующей теореме $\varepsilon_n = 2\tau_0 C_f/(nT)$.

Теорема 2. Пусть функция $f \in \mathbb{P}$, $int(co(G)) \neq \emptyset$, и для целого n выполняется неравенство $n \geqslant \tau_0/T$. Тогда для $\Delta = nT$ имеют место оценки

$$M_f^\Delta - \varepsilon_n \leqslant M_f \leqslant M_f^\Delta.$$

Если $n \geqslant 2\tau_0 C_f/(T\varepsilon)$, то $M_f^\Delta - \varepsilon \leqslant M_f \leqslant M_f^\Delta$.

Доказательство. Пусть $\Gamma^\Delta(0, y_0)$ — сужение множества всех решений $\Gamma(0, y_0)$ на отрезок $[0, \Delta]$, $\Delta = nT$. В равномерной метрике $\Gamma^\Delta(0, y_0)$ — компакт (см., например [1, теорема 6, с. 216]). Поэтому непрерывный функционал $I(\Delta, 0, y_0, \cdot)$, определенный на компакте $\Gamma^\Delta(0, y_0)$, принимает максимальное значение $M_f^\Delta(y_0)$ на некотором решении $\gamma \in \Gamma^\Delta(0, y_0)$. Функция $M_f^\Delta(y_0)$ непрерывно зависит от $y_0 \in K_m$, поэтому принимает максимальное значение M_f^Δ на некотором векторе $y_0^{\max} \in K_m$. Таким образом, существует оптимальная пара $(y_0^{\max}, \gamma^{\max})$. Следовательно,

$$M_f^\Delta = I(\Delta, 0, y_0^{\max}, \gamma^{\max}), \quad \gamma^{\max} \in \Gamma^\Delta(0, y_0^{\max}).$$

Обозначим $t_* = \Delta - \tau_0, y_* = \gamma^{\max}(t_*)$. Так как для некоторого $z_0 \in \mathbb{R}^m$ имеет место включение

$$K_m(z_0, T) \subset (y_* + \tau_0 co(G)),$$

то существует решение $\chi \in \Gamma(t_*, y_*)$, для которого $\chi(\Delta) = y_0^{\max} + (n_1 T, \ldots, n_m T)$, где $n_1, \ldots, n_m$— целые числа.

Далее, для целого $n \geqslant \tau_0/T$ построим решение γ_n задачи (1) на отрезке $[0, \Delta]$, $\Delta = nT$, где $t_0 = 0$, $y_0 = y_0^{\max}$, следующим образом:

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \gamma^{\max}(t), & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_*, \\ \chi(t), & \text{если} \quad t_* \leqslant t \leqslant \Delta. \end{cases}$$

Продолжим периодически соответствующее управление $u_n(t) = \dot{\gamma_n}(t)$ на весь промежуток $[0, \infty)$ с периодом Δ, а затем определим решение $\gamma_n \in \Gamma(0, y_0^{\max})$ по формуле Лейбница

$$\gamma_n(t) = y_0^{\max} + \int_0^t u_n(s)\, ds.$$

Так как

$$M_f^\Delta - I(\Delta, 0, y_0^{\max}, \gamma_n) = \frac{1}{\Delta} \int_{t_*}^{\Delta} (f(t, \gamma^{\max}(t)) - f(t, \chi(t)))\, dt,$$

то $M_f^\Delta - I(\Delta, 0, y_0^{\max}, \gamma_n) \leqslant \varepsilon_n$. Заметим, что функция $f(t, \gamma_n(t))$ по построению Δ-периодическая по переменной t, поэтому

$$I(\Delta, 0, y_0^{\max}, \gamma_n) = \lim_{l \to \infty} I(l, 0, y_0^{\max}, \gamma_n).$$

Так как $M_f^\Delta - \varepsilon_n \leqslant I(\Delta, 0, y_0^{\max}, \gamma_\varepsilon) \leqslant M_f \leqslant M_f^\Delta$, то для заданного $\varepsilon > 0$ неравенство $n \geqslant 2\tau_0 C_f/(\varepsilon T)$ влечет оценку $M_f^\Delta - \varepsilon \leqslant M_f \leqslant M_f^\Delta$. Теорема доказана.

Замечание 2. Для произвольной функции $f \in \mathbb{P}$ может и не существовать оптимального периодического управления. С другой стороны, можно указать периодическое управление, которое определяет решение γ_ε задачи (1), вдоль которого соответствующее среднее отличается от предела максимального среднего не более наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Литература

[1] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление // Труды Математического института АН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.

[2] Филатов О.П. Существование пределов максимальных средних // Математические заметки. 2000. Т. 67. № 3. С. 433–440.

[3] Филатов О.П. О существовании усредненого дифференциального включения // Диференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 25. С. 2118–2127.

Поступила в редакцию 10/*III*/2011;
в окончательном варианте — 10/*III*/2011.

THE EVOLUTION OF LIMITS OF MAXIMAL MEANS FOR PERIODIC FUNCTIONS

© 2011 O.P. Filatov[2]

For the periodic function depending on the time and base variables and differential inclusion with constant right hand the two-sided estimates of the limit of maximal mean is established. The existence of the theorem of limit of maximal mean is proved.

Key words: limit of maximal mean, differential inclusion, double-ended estimates.

Paper received 10/*III*/2011.
Paper accepted 10/*III*/2011.

[2]Filatov Oleg Pavlovich (`filatov_oleg@samaradom.ru`), the Dept. of Mathematics and Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.