

УДК 519.6

## ОПТИМАЛЬНАЯ ДВУХВОЗРАСТНАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ПОПУЛЯЦИИ<sup>1</sup>

© 2011 В.Н. Разжевайкин,<sup>2</sup> А.Т. Юсуфов<sup>3</sup>

Исследуется задача оптимального изъятия урожая и биомассы эксплуатируемой популяции. Указываются способы принятия оптимальных решений, основанные на оценке наблюдаемых переменных. Излагается методика построения фазовых траекторий для оптимальных решений в наиболее типичных случаях.

**Ключевые слова:** оптимальная эксплуатация, биологическая популяция, принцип максимума Понтрягина, оптимальная траектория.

### 1. Предварительные сведения

В последние десятилетия наблюдается наложение обрुшившихся на многие регионы бывшего Советского Союза экономических проблем на те, которые достались в наследство и в значительной степени усугубились в результате далеко не всегда эффективной эксплуатации природных ресурсов. Одним из порождений такого наложения явилось изменение статуса многих сельскохозяйственных предприятий в сложившихся новых экономических системах. Ориентированные ранее на выполнение продовольственных программ, они в условиях дешевого импорта потеряли свою рентабельность, продолжая при этом оказывать существенное давление на окружающие их экосистемы и тем самым пополнять коллекцию далеко не всегда доброкачественных новообразований, способных задуть среду обитания человека.

Если способ борьбы с образованиями, не приносящими ничего, кроме вреда, очевиден — их полное и скорейшее уничтожение, то в случае с объектами, способными приносить хоть какую-то пользу, выбор способов их ликвидации становится нетривиальной проблемой. Таковой, в частности, является и задача оптимальной экономической реализации в течение заданного времени малоэффективной эксплуатируемой популяции. При этом, поскольку наиболее распространенными механизмами экономической реализации популяции являются следующие два: а) изъятие продукции популяции, т. е. ее ювенильной составляющей (семенной материал, приплод и т. п.) в условиях поддержания жизнеспособности ее производящей, т. е. взрослой, составляющей и б) полное изъятие биомассы популяции из всех ее составляющих (забой, дезактивирующая обработка урожая и т. п.), то и задача

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 03-01-00678.

<sup>2</sup>Разжевайкин Валерий Николаевич (razz@mail.ru), Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, 119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, 40.

<sup>3</sup>Юсуфов Али Тураевич (aliyusufov@mail.ru), Зауральский филиал Башкирского государственного аграрного университета, 453832, Российская Федерация, г. Сибай, ул. Пушкина, 17.

может формулироваться в терминах формирования стратегий, определяющих порядок и момент включения и выключения указанных механизмов изъятия для обозначенных возрастных классов.

## 2. Постановка задачи

Предположим, что рассматриваемая биологическая популяция описывается некоторой числовой характеристикой (например, величиной биомассы)  $K(t)$ , смертностью  $m > 0$  и однородной репродуктивной функцией  $F(K, R) = RF(K/R, 1) = Rf(K/R)$ , где  $R$  — количество доступного ресурса, играющего существенную роль в воспроизводстве популяции. Предполагается, что этот ресурс изменяется по экспоненциальному закону, так что  $R = R_0 e^{gt}$ .

Предполагается, что эксплуатация популяции может осуществляться по двум направлениям.

Во-первых, производится снятие урожая с продукции, т. е. в единицу времени изымается  $X_0 = uF(K, R)$ , где  $u \in [0, 1]$ .

Во-вторых, изымается часть основной биомассы с интенсивностью  $X_1 = vK$ , где  $v \in [0, v_m]$ , а  $v_m < \infty$  — некоторая максимальная интенсивность изъятия, определяемая, например, чисто техническими возможностями.

Если условно разделить популяцию на две возрастные группы — взрослую и ювенильную, причем считать ювенильную стадию весьма кратковременной, то первое направление изъятия можно отождествить с изъятием из младшей, а второе — из старшей возрастной группы.

Считается также, что доход от эксплуатации популяции дифференцируется как по используемому возрастному классу, так и по времени. Доход от эксплуатации ювенильной части популяции считается более высоким, чем от ее взрослой части. Практическим обоснованием такой гипотезы может служить соображение о возможном применении стратегии кратковременного ожидания перехода особей из ювенильной стадии во взрослую в целях повышения их эксплуатационной рентабельности в предположении отказа от этой гипотезы. Таким образом, текущий доход равен  $G_{inc} = X_0(t) + \alpha X_1(t)$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ . Заметим, что отказ от последнего условия на  $\alpha$  делает последующее изложение лишь несколько более громоздким, не создавая принципиальных проблем.

Дифференцировка дохода по времени определяется коэффициентом дисконтирования  $b > 0$ , задаваемого, например, банковской учетной ставкой. При этом перспективный временной горизонт планирования  $T$  может быть как конечным, так и бесконечным.

В целом исходная математическая постановка задачи имеет вид: найти функции времени  $u(t) \geq 0$  и  $v(t) \in [0, v_m]$ , доставляющие максимум функционалу  $J = \int_0^T e^{-bt} G_{inc}(t) dt$ , где

$$\begin{aligned} G_{inc}(t) &= X_0(t) + \alpha v K(t), & \partial_t K &= X_{pop} - mK - vK, \\ X_{pop} + X_0 &= X = F(K, R), \\ X_{pop} &\geq 0, & X_0 &= uX, & R &= R_0 e^{gt}, & K(0) &= K_0. \end{aligned}$$

Здесь и далее производная функции  $y(x)$  наряду с  $\frac{dy}{dx}$  может обозначаться как  $\partial_x y$  или как  $y_x(x)$ .

Функция  $f(k) = F(k, 1)$  предполагается гладкой, строго выпуклой ( $f_{kk}(k) < 0$ ) и монотонно возрастающей ( $f_k(k) > 0$ ), причем  $f(0) = 0$ , и  $f_k(0) > m + g'$ , где  $g' = \max\{g, b\}$ . Последнее условие с  $g$  вместо  $g'$  означает, что при нулевых значениях

управляющих параметров  $u$  и  $v$  тривиальное положение равновесия не является притягивающим. Противоположный случай соответствует биологической системе, функционирующей в режиме внутреннего саморазрушения: предполагается, что такие системы отсутствуют, поскольку они уже давно успели разрушиться. Поправка на возможный случай  $g' = b > g$  учитывает дополнительную возможность не только самоподдержания системы, но и ее продолжительного (сколь угодно долгого) рентабельного функционирования (см. ниже случай  $b > g$ , соответствующий наличию стационарного режима).

Приведенная выше задача может быть переписана относительно плотности популяции, приходящейся на единицу ресурса  $k = K/R$ :

$$\begin{cases} \partial_t k = (1-u)f(k) - (m+g+v)k, & k = k(t), \quad t > 0, \\ k(0) = k_0 = K_0/R_0, & m > 0, \quad g > -m, \\ J = \int_0^T e^{(g-b)t} [u(t)f(k(t)) + \alpha vk(t)] dt \rightarrow \max, \\ b > 0, \quad 0 < \alpha < 1; \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, v_m]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Заметим, что в частном случае  $v = 0$  эта задача может интерпретироваться как задача оптимизации сбора урожая [1; 2]. Учет возможности снятия не только конечной биомассы популяции, но и ее промежуточного продукта (например, семенного материала), ассоциируемый в настоящей работе с ювенильной возрастной группой, расширяет упомянутые постановки.

### 3. Применение принципа максимума

Изложенная в предыдущем параграфе постановка оптимизационной задачи имеет классическую форму задачи с ограничениями на управление [3], для решения которой наиболее эффективной является методика их нахождения, основанная на принципе максимума Понтрягина [3]. Приведенный здесь вариант относится к классу задач со свободным концом. Не углубляясь в общую схему решения задач этого класса, изложим результаты ее применения для описанной выше постановки.

Функция Понтрягина имеет вид (здесь  $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))$  — двумерная вектор-функция управлений):

$$H(\psi, k, \mathbf{u}, t) = \psi[(1-u)f(k) - (m+g+v)k] + e^{(g-b)t} [uf(k) + \alpha vk], \quad (3.1)$$

что дает уравнение для сопряженной переменной  $\psi = \psi(t)$ :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial k}. \quad (3.2)$$

Предполагаются выполненными также дополнительное краевое условие

$$\psi(T) = 0 \quad (3.3)$$

и условия принципа максимума

$$H(\hat{\psi}, \hat{k}, \hat{\mathbf{u}}, t) = \max_{\mathbf{u} \in U} H(\hat{\psi}, \hat{k}, \mathbf{u}, t) \quad (3.4)$$

на априори оптимальном решении  $\hat{\mathbf{u}}$  с соответствующими  $\hat{k}(t)$  и  $\hat{\psi}(t)$ . Здесь  $U = \{\mathbf{u} = (u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq v_m\}$ .

Для того чтобы избавиться от явной зависимости от времени, вместо переменной  $\psi(t)$  будем рассматривать переменную  $\eta(t) = e^{-rt}\psi(t)$ , где  $r = g - b$ . Для нее и  $H_1(\eta, k, \mathbf{u}, t) = e^{-rt}H(\eta e^{rt}, k, \mathbf{u}, t)$  вместо (3.1) и (3.2) имеем соответственно

$$H_1(\eta, k, \mathbf{u}, t) = f(k)[\eta(1) + (1 - \eta)u] + vk(\alpha - \eta) - k\eta(m + g), \quad (3.1')$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial k} - r\eta = v(\eta - \alpha) + \eta(m + b) - f_k(k)[\eta(1) + (1 - \eta)u]. \quad (3.2')$$

Условия (3.3) и (3.4) заменяются соответственно на

$$\eta(T) = 0, \quad (3.3')$$

$$H_1(\hat{\eta}, \hat{k}, \hat{\mathbf{u}}, t) = \max_{u \in U} H_1(\hat{\eta}, \hat{k}, \mathbf{u}, t). \quad (3.4')$$

В (3.1') правая часть сгруппирована относительно управляющих параметров  $u$  и  $v$ , так что (3.4') дает следующие соотношения между значениями вспомогательной переменной  $\eta$  и оптимального решения  $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}, \hat{v})$ :

$$\begin{cases} \eta < \alpha \Rightarrow \hat{v} = v_m, \\ \eta > \alpha \Rightarrow \hat{v} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \eta < 1 \Rightarrow \hat{u} = 1, \\ \eta > 1 \Rightarrow \hat{u} = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

В случае выполнения соотношений типа равенств вместо неравенств из (3.5) и (3.6) соответствующий управляющий параметр может принимать любые допустимые значения.

Более детальное рассмотрение требует исследования монотонности  $\eta(t)$  и  $k(t)$  в пределах той или иной области, о чем будет изложено в следующих двух параграфах.

## 4. Качественный анализ оптимальных решений

В настоящем параграфе на качественном уровне исследуется поведение оптимальных решений для различных областей изменения вспомогательной переменной.

Динамическая система, задающая оптимальные траектории описанной в предыдущем параграфе задачи, состоит из первого уравнения в (2.2) и уравнения (3.2') в областях, выделяемых одним из условий (3.5) и одним из условий (3.6), и представляет собой автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими подстановками для  $u$  и  $v$ :

$$\begin{cases} \partial_t k = (1 - u)f(k) - (m + g + v)k, \\ \partial_t \eta = v(\eta - \alpha) + \eta(m + b) - f_k(k)[\eta(1) + (1 - \eta)u]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Пограничные области, соответствующие условиям типа равенства, следует рассматривать отдельно.

Естественным образом выделяются следующие пять областей изменения переменной  $\eta$  на плоскости  $(k, \eta)$ :

А:  $0 < \eta < \alpha$ , В:  $\eta = \alpha$ ; С:  $\alpha < \eta < 1$ ; D:  $\eta = 1$ ; Е:  $\eta > 1$ .

Мы начнем исследование с двух случаев А и С, соответствующих условиям типа неравенств.

А:  $\eta < \alpha$ . В силу (3.5), (3.6) в (4.1)  $v = v_m$ ,  $u = 1$ . При этом всегда  $\partial_t k < 0$  и

$$\partial_t \eta \leq 0 \Leftrightarrow \eta \leq \frac{\alpha v_m + f_k(k)}{m + b + v_m}, \quad (4.2)$$

так что  $\partial_t \eta \leq 0$  заведомо в областях, где  $\eta \leq 0$  или  $k \leq k_\alpha$ , где  $k_\alpha$  определяется из условия:

$$f_k(k_\alpha) = \alpha(m + b).$$

Поэтому из (4.1) с учетом (3.3') получаем  $\eta(t) > 0$  для любых  $t \in [0, T)$ .

Если для некоторого момента времени  $t_1 \in [0, T)$  функция  $\eta(t)$  убывает (что означает существование такого  $\tau_1 > 0$ , что для любого  $\tau \in (0, \tau_1)$  выполнено  $\eta(t_1 + \tau) < \eta(t_1)$ ), то  $\partial_t \eta(t) < 0$  для любого  $t > t_1$  (ибо  $\eta(t)$  и  $k(t)$  убывают, т. е.  $f_k(k(t))$  возрастает, так что  $\partial_t \eta(t_1 + \tau) < \sup \partial_t \eta(t_1 + 0) \leq 0$ ).

Следовательно, в области А оптимальная траектория может иметь не более одного максимума по  $\eta$ , причем если этот максимум достигается при  $\eta < \alpha$ , то он расположен на кривой, определяемой соотношением типа равенства в правой части (4.2). На рис. 1 и 2 это нижняя (ниже прямой  $\eta = \alpha$ ) часть пунктирной кривой  $\Gamma_A$ .

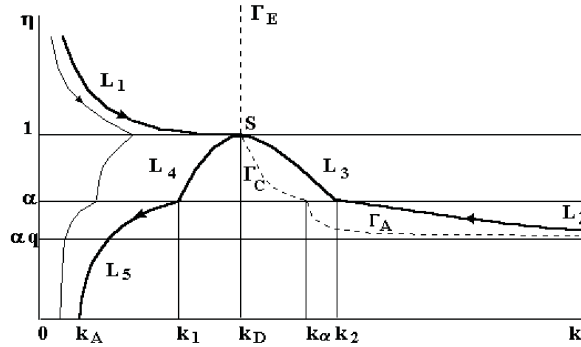


Рис. 1. Оптимальные фазовые траектории при  $k_D \leq k_F$

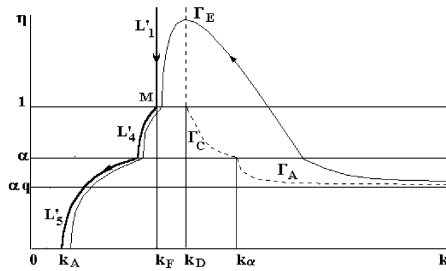


Рис. 2. Оптимальные фазовые траектории при  $k_D \geq k_F$

С:  $\alpha < \eta < 1$ . Здесь в (4.1)  $u = 1$ ;  $v = 0$ , так что снова  $\partial_t k < 0$  и

$$\partial_t \eta \leq 0 \Leftrightarrow \eta \leq \frac{f_k(k)}{f_k(k_D)}, \tag{4.3}$$

где  $k_D$  определяется из условия:

$$f_k(k_D) = m + b.$$

Все утверждения о монотонности, приведенные для случая области А, остаются справедливыми и здесь с теми же доказательствами, в которых вместо кривой  $\Gamma_A$  следует иметь в виду кривую  $\Gamma_C$  (средняя часть пунктирной кривой на рисунках), определяемой соотношением типа равенства в правой части (4.3).

Заметим, что обе кривые совпадают в точке  $(k, \eta) = (k_\alpha, \alpha)$ .

В:  $\eta = \alpha$ . Здесь в (4.1)  $u = 1$ ;  $v \in [0, v_m]$ .

Из второго уравнения (4.1) видно, что равенство  $\partial_t \eta = 0$  эквивалентно равенству  $k = k_D$ , что с учетом монотонного убывания  $k(t)$  (следует из первого уравнения) влечет дискретность множества моментов времени, для которых  $\eta(t) = \alpha$ . Более того, установленные для областей А и С свойства монотонности имеют следствием то, что таких моментов может быть не более двух (соответствуют переходам из области А в С и обратно).

С учетом сказанного свойство монотонности, сформулированное для области А, распространяется в той же формулировке и на объединение областей А, В и С, т. е. на всю область  $\{\eta < 1\}$ .

Е:  $\eta > 1$ . Здесь в (4.1)  $u = v = 0$ .

В рассматриваемом случае имеются два пороговых значения для  $k$ :  $k_D$  и  $k_F$ , где  $k_F$  определяется из условия:

$$\frac{f(k_F)}{k_F} = m + g,$$

так что  $\partial_t k = 0$  при  $k = k_F$ . Выпуклость  $f(k)$  обеспечивает монотонное убывание функции  $f(k)/k$  и ее превышение над  $f_k(k)$ . Первое из этих свойств влечет соотношение  $\text{sign}(d_t k) = \text{sign}(k_F - k)$ , а второе — ограниченность между нулем и единицей функции

$$h(k) = k \frac{f_k(k)}{f(k)} = \frac{d \ln f(k)}{d \ln k}.$$

Если положить

$$\alpha_c = \frac{m + b}{m + g}, \quad (4.4)$$

то, как нетрудно видеть,

$$\text{sign}(k_F - k_D) = \text{sign}(\alpha_c - h(k_D)).$$

В частности, при  $r = g - b \leq 0$  будет  $\alpha_c \geq 1 \geq h(k_D)$ , так что выполнено неравенство

$$k_D \leq k_F. \quad (4.5)$$

Предположим, что (4.5) выполнено. Тогда при  $k \leq k_F$  получаем  $d_t k \geq 0$ . При этом  $d_t \eta \leq 0$ . Наоборот, при  $k \geq k_D$  будет  $d_t \eta \geq 0$ . Вообще же  $\text{sign}(d_t \eta) = \text{sign}(k - k_D)$ . Отсюда следует, что подобласть  $(k \geq k_D, \eta > 1)$  области Е является инвариантной относительно движений вперед по траекториям системы (4.1), что исключает возможность достижения краевого условия (3.3'). Другими словами, ни одна оптимальная траектория не может пересекаться с этой запрещенной областью. В следующем параграфе мы покажем, как можно построить расширение этой области в сторону меньших значений как переменной  $k$ , так и переменной  $\eta$ .

Из тех же соображений можно установить инвариантность области  $(k < k_D, \eta > 1)$  относительно движений по оптимальным траекториям назад по времени.

В случае, когда (4.5) не выполнено, т. е.  $k_D > k_F$ , точки прямой  $k = k_F$  на участке  $\eta > 1$  плоскости  $(k, \eta)$  образуют притягивающую траекторию системы (4.1). На этом участке  $\eta(t)$  убывает вплоть до значения  $\eta = 1$ .

D:  $\eta = 1$ . Здесь в (4.1)  $v = 0$ ,  $u \in [0, 1]$ .

В этом случае уравнения системы (4.1) имеют смысл, только если на некотором интервале времени  $t_1 < t < t_2$  имеет место  $\eta(t) \equiv 1$ . Из  $d_t \eta(t) \equiv 0$  с учетом строгой выпуклости функции  $f(k)$  находим на этом интервале  $k(t) \equiv k_\alpha$ , откуда

$$u(t) \equiv u_{opt} = 1 - (m + g) \frac{k_D}{f(k_D)}. \quad (4.6)$$

Из (4.6) видно, что всегда  $u_{opt} < 1$ , но

$$u_{opt} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(k_D)}{k_D} \geq \frac{f(k_F)}{k_F} = m + g = f_k(k_D) + r. \quad (4.7)$$

В частности, если  $r = g - b \leq 0$ , то выпуклость гарантирует локализацию  $u_{opt}$  в области допустимых управлений.

Выполнение неравенства в (4.7) эквивалентно, как нетрудно видеть, неравенству (4.5) и является необходимым и достаточным условием того, чтобы точка  $(k = k_D, \eta = 1)$  могла быть стационарной точкой системы (4.1).

Заметим, что в частном случае  $f(k) = f_0 k^{\hat{\alpha}}$ ,  $0 < \hat{\alpha} < 1$ , это неравенство выполнено тогда и только тогда, когда  $\hat{\alpha} \leq \alpha_c$ , (см. (4.4)), так что величина  $\alpha_c$  представляет собой критический (с точки зрения возможности существования стационарных оптимальных режимов) показатель для степени  $\hat{\alpha}$ .

Заметим также, что в случае невыполнения (4.5)  $\eta(t)$  убывает при  $k < k_D$ , а значит, и при  $k$ , близких к  $k_F$ , не только в областях  $\eta < 1$  и  $\eta > 1$ , но и при  $\eta = 1$ .

Кроме описанного здесь случая попадания в стационарную точку  $(k_D, 1)$  все остальные случаи пересечения оптимальной траектории с областью  $D : \{\eta = 1\}$  образуют дискретное множество моментов перехода между областями C и E. С учетом приведенных выше результатов можно сделать вывод о том, что таких моментов может быть не более двух: сначала при возрастании переменной  $\eta(t)$  и потом при ее убывании.

## 5. Структура оптимальных траекторий

Результаты предыдущего параграфа позволяют построить фазовый портрет оптимальных траекторий. На рис. 1 и 2  $q = v_m / (m + b + v_m)$ .

Обсудим сначала случай  $k_D \leq k_F$ , проиллюстрированный на рис. 1.

То, что в стационарной точке  $S = (k = k_D, \eta = 1)$  оптимальные траектории касаются прямой  $\eta = 1$ , следует из того, что эта точка лежит на кривой  $\Gamma = \Gamma_A \cup \Gamma_C \cup \Gamma_E$ , где  $d_t \eta = 0$ . При этом область, в которой  $d_t k = 0$ , т. е. ( $k = k_F, \eta > 1$ ), оказывается в запретной зоне  $k \geq k_D, \eta > 1$ , так что для оптимальных траекторий (точнее, для их частей, не совпадающих, разумеется, с точкой  $S$ ) всегда выполнено неравенство  $d_t k \neq 0$ .

Фазовые траектории, проходящие через стационарную точку  $S$ , имеют принципиальное значение.

Во-первых, именно они в совокупности с точкой  $S$  служат оптимальными траекториями для исходной задачи при достаточно больших значениях  $T$ . Начавшись на кривой  $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ , решение с увеличением времени движется к точке  $S$ , задерживается в ней на какой-то промежуток, а затем спускается сначала по  $L_4$ , а затем по  $L_5$  вплоть до оси  $\eta = 0$ . При этом время задержки может быть произвольным, тогда как время движения  $T_3, T_4$  или  $T_5$  на соответственно каждом из

участков  $L_3$ ,  $L_4$  или  $L_5$  является конечной фиксированной величиной, зависящей от параметров задачи. Такой же конечной величиной является и время движения  $T_0(k_0)$  от начальной точки  $(k_0, \eta_L(k_0))$ , лежащей на траектории  $L$  до точки  $S$ . Поэтому, как легко видеть, необходимым и достаточным условием принадлежности точки  $S$  к оптимальной траектории, т. е. попадания оптимальной траектории на  $L$  с последующим прохождением вдоль кривой  $L_d = L_4 \cup L_5$ , является наличие необходимого резерва времени:

$$T \geq T_r(k_0) = T_0(k_0) + T_4 + T_5. \quad (5.1)$$

Во-вторых, кривая  $L$  ограничивает область допустимых решений, ибо все траектории, начинающиеся выше  $L$ , уходят в запретную область ( $k > k_D, \eta > 1$ ). Поэтому если  $T$  сравнительно мало (не выполнено (5.1)), то соответствующая оптимальная траектория должна начинаться в точке  $(k_0, \eta_0)$  с  $\eta_0 < \eta_L(k_0)$ . Такая траектория уже нигде не задерживается, и одна из ее переменных монотонно убывает ( $k$  при  $\eta < 1$  и  $\eta$  при  $k < k_D$ ).

Заметим, что если  $k_0$  фиксировано, то с ростом  $\eta_0$  растет и время движения по оптимальной траектории до оси  $\eta = 0$ , которое мы обозначим как  $T_e(k_0, \eta_0)$ .

Для  $k_0 \leq k_D$ ,  $\eta_0 > 1$  это следует из того, что  $\eta(t)$  монотонно убывает, так что траектория, начинающаяся выше, будет проходить правее при одинаковых  $\eta$ , и поскольку во втором уравнении (4.1) правая часть растет с ростом  $k$ , то  $\eta$  будет убывать медленнее, что соответствует большему времени прохождения одинаковых интервалов по  $\eta$ , а значит, и траектории в целом.

Для  $\eta < 1$   $k(t)$  монотонно убывает, и поскольку в области  $C$  ее экспоненциальная скорость убывания, равная  $(m + g)$ , меньше, чем в области  $A$ , равной  $(m + g + v_m)$ , то одинаковые участки по  $k$  траектория, проходящая выше, будет преодолевать не быстрее нижней. Поскольку при этом она еще и достигает оси  $\eta = 0$  при меньших значениях  $k$ , то совокупное время тем более будет больше.

Нетрудно видеть, что при  $\eta_0$ , пробегающих значения от 0 до  $\eta_L(k_0)$ , величина  $T_e(k_0, \eta_0)$  будет пробегать значения в интервале  $[0, T_e(k_0, \eta_L(k_0))]$ , где  $T_e(k_0, \eta_L(k_0)) = T_r = T_r(k_0)$  — правая часть в (5.1).

Все эти соображения с учетом возможности задержки в точке  $S$  в течение избыточного времени  $T - T_e(k_0, \eta_L(k_0))$  свидетельствуют о существовании и единственности оптимального решения среди описанных выше при любых значениях  $k_0 > 0$  и  $T > 0$ .

Приведенные выше результаты могут быть сформулированы как

**Теорема 1.** Пусть выполнено (4.5). Тогда:

1) для любого  $0 < T < T_r$  оптимальное управление задачи (2.1) имеет не более двух переключений между крайними допустимыми значениями управляющих параметров;

2) для любого  $T > T_r$  оптимальная траектория задачи (2.1) лежит на  $L \cup L_d$ .

В случае  $k_D > k_F$  картина (см. рис. 2) несколько иная. Здесь уже нет стационарных точек, а значит, и выделенных траекторий, элементы которых служат оптимальными решениями для большинства задач. Нет здесь и запретных областей, поскольку всякая траектория, начинающаяся в положительном квадранте, достигает на нем оси абсцисс. Однако свойство роста времени  $T_e(k_0, \eta_0)$ , необходимого для этого достижения, при увеличении  $\eta_0$  и фиксированном  $k_0$  сохраняется. В случае  $k_0 \leq k_F$  здесь работают те же соображения, что и при  $k_0 \leq k_D \leq k_F$ . В случае  $k_0 > k_F$  надо использовать рассуждения, изложенные выше для ситуации, когда  $k_D \leq k_F$  и  $\eta < 1$ . При этом  $T_e(k_0, \eta_0)$  вслед за  $\eta_0$  пробегает значения



в интервале  $[0, +\infty)$ . Отсюда снова следуют существование и единственность решений при любых значениях  $k_0 > 0$  и  $T > 0$ .

Обратим здесь внимание на траекторию  $L' = L'_1 \cup L'_4 \cup L'_5$ , проходящую через точку  $M = (k_F, 1)$ . Участок этой траектории  $L'_1$ , расположенный в области E, состоит из соответствующей части прямой  $k = k_F$ . Остальные два участка  $L'_4$  для области C и  $L'_5$  для области A аналогичны соответствующим участкам траектории  $L$ , исследованной для предыдущего случая. Обозначим время движения по этим участкам соответственно как  $T'_4$  и  $T'_5$ , так что  $T_e(M) = T'_4 + T'_5$ .

В случае, когда  $k_0 = k_F$ , а  $T \geq T_e(M)$ , оптимальное решение составляется следующим образом. При  $u = v = 0$  фазовая переменная  $k(t)$  остается в покое в неподвижной точке  $k_F$  в течение времени  $T - T_e(M)$ . Оставшийся резерв времени используется для спуска по траектории  $L'_d = L'_4 \cup L'_5$ .

Пусть теперь  $k_0 \neq k_F$ , но  $T$  очень велико. С учетом изложенных выше результатов о монотонной зависимости  $T_e$  от  $\eta_0$  становится понятным, что такая траектория будет попадать в область с очень большими значениями  $\eta$ , а поскольку для  $\eta > 1$  точка  $k = k_F$  является притягивающим положением равновесия для первого уравнения в (4.1), то траектория будет стягиваться к прямой  $k = k_F$  на плоскости  $(k, \eta)$ , а значит, проходить очень близко от точки  $M$ .

В области  $\eta < 1$  особенность этой точки теряется, так что дальнейшее движение траектории будет происходить вблизи кривой  $L'_d$ , что позволяет оценить время движения на объединении участков C и A как близкое к  $T_e(M)$ . В частности, если  $T$  очень велико (нижняя оценка  $T_e(M)$  задает лишь необходимое условие), то оптимальное управление будет очень близким к тому, которое было описано выше для случая  $k = k_F$ . Это означает, что тот самый описанный выше режим будет осуществляться при управлении, близком к оптимальному, которое, в свою очередь, вполне может быть использовано в качестве нулевого приближения к оптимальному. Роль малого параметра здесь играет величина  $\varepsilon = T_{est}/T = 1/[T|f_{kk}(k_F)|(k_D - k_F)]$  (поскольку при  $\eta > 1$  в окрестности точки  $k_F$  согласно (4.1)  $d_t k \simeq [f_k(k_F) - f_k(k_D)](k - k_F)$ ).

Приведенные здесь результаты могут быть сформулированы как

**Теорема 2.** Пусть (4.5) не выполнено. Тогда:

1) для любого  $T > 0$  оптимальное управление задачи (2.1) имеет не более двух при  $k_0 \leq k_F$  и четырех при  $k_0 > k_F$  переключений между крайними допустимыми значениями управляющих параметров;

2) для любого  $T \gg T_{est} = 1/[|f_{kk}(k_F)|(k_D - k_F)]$  завершающая часть оптимальной траектории задачи (2.1) лежит на кривой, близкой к  $L'_d$ , с отклонением от нее порядка  $\varepsilon = T_{est}/T$ .

## 6. Оценки для оптимальных траекторий

Уравнения (4.1) при фиксированных  $u$  и  $v$  легко интегрируются. Пусть  $R(k, u, v) = (1 - u)f(k) - (m + g + v)k$  — правая часть первого из этих уравнений. Далее мы зачастую будем последние два аргумента опускать и писать  $R(k) = R(k, u, v)$ .

Если для некоторых моментов времени  $t_1 > t_0$  на оптимальной траектории выполнено  $k_0 = k(t_0)$ ,  $k_1 = k(t_1)$ , то очевидно

$$\Delta T = t_1 - t_0 = \int_{k_0}^{k_1} \frac{dk}{R(k)}. \quad (6.1)$$

Видно, что в области Е решение (6.1) как уравнения относительно  $k(t)$  имеет особенность при  $k \rightarrow k_F$ , принципиальную только для случая  $k_F < k_D$ . Во всех остальных ситуациях можно считать, что знаменатель в (6.1) в нуль не обращается.

В областях А и С из (6.1) следует, что  $\Delta T = \ln(k_0/k_1)/\lambda$ , где  $\lambda = \lambda_A = m + g + v_m$  в А и  $\lambda = \lambda_C = m + g$  в С.

Считая функцию  $k(t)$  как выраженную из (6.1)  $k_1(t = t_1, t_0, k_0)$  известной, представляется удобным выразить  $\eta$  как функцию  $k$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению, полученному делением второго из уравнений в (4.1) на первое.

Построенное таким образом уравнение имеет вид:

$$\partial_k \eta = P(k)\eta - Q(k), \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} P(k) &= P(k, u, v) = \frac{(v + m + b) - (1 - u)f_k(k)}{(1 - u)f(k) - (v + m + g)k}, \\ Q(k) &= Q(k, u, v) = \frac{uf_k(k) + \alpha v}{(1 - u)f(k) - (v + m + g)k}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Если при некотором  $k_0 > 0$  будет  $\eta(k_0) = k_0$ , то для произвольного  $k_1$  решение для (6.2) задается формулой

$$\eta(k_1) = \eta_0 e^{\int_{k_0}^{k_1} P(k) dk} - \int_{k_0}^{k_1} Q(k) e^{\int_{k_0}^{k_1} P(y) dy} dk. \quad (6.4)$$

Из (6.3) видно, что  $P(k) = -(\partial_k R(k) + r)/R(k)$ , что дает вместо (6.4)

$$\eta(k_1) = \eta_0 \frac{R(k_0)}{R(k_1)} e^{-r\Delta T} - e^{-rt_1} \int_{t_0}^{t_1} Q_N(k) \frac{R(k)}{R(k_1)} e^{rt} dt, \quad (6.5)$$

где  $Q_N(k) = uf_k(k) + v\alpha$  — числитель  $Q(k)$ ,  $k = k(t)$ ,  $t \in (t_0, t_1)$  (см. (6.1)),  $r = g - b$ .

С учетом того, что в области Е выполнено  $Q_N \equiv 0$ , а в областях А и С  $\frac{R(k_0)}{R(k_1)} = \frac{k_0}{k_1}$ , (6.5) упрощается до

$$\eta(k_1) = \eta_0 \frac{R(k_0)}{R(k_1)} e^{-r\Delta T}$$

в области Е и

$$\eta_1 \kappa_1 = \eta_0 \kappa_0 + \frac{v\alpha}{\lambda - r} (\kappa_1 - \kappa_0) + \frac{u}{\lambda} \left[ \phi_1 \kappa_1 - \phi_0 \kappa_0 + \frac{r}{\lambda - r} \int_{\kappa_0}^{\kappa_1} \phi(\kappa) d\kappa \right] \quad (6.6)$$

в областях А и С. В последнем выражении  $\lambda = m + g + v_m$  в области А, и  $\lambda = m + g$  в области С;  $\kappa = \tilde{\kappa}(k) = k^{1-r/\lambda}$ ,  $\kappa_{0,1} = \tilde{\kappa}(k_{0,1})$ ,  $\eta_{0,1} = \eta(k_{0,1})$ ,  $\phi(\tilde{\kappa}(k)) = f(k)/k$ ,  $\phi_{0,1} = f(k_{0,1})/k_{0,1}$ .

Из (6.6) видно, что в областях А и С для  $\eta(\kappa)$  имеет место соотношение

$$\kappa \left( \eta - \frac{v\alpha}{\lambda - r} - \frac{u\phi(\kappa)}{\lambda} \right) = C_0 + \frac{ur}{\lambda(\lambda - r)} \int_{\kappa_{init}}^{\kappa} \phi(\zeta) d\zeta, \quad (6.7)$$

где  $\eta = \tilde{\eta}(\kappa)$ :  $\tilde{\eta}(\tilde{\kappa}(k)) = \eta(k)$ , а  $\kappa_{init}$  — некоторое произвольное фиксированное значение  $\kappa$ , для которого определена функция  $\phi(\kappa)$ , постоянная  $C_0$  определяется из условия выполнения (6.7) в точке  $\kappa = \kappa_0$ ,  $\eta = \tilde{\eta}(\kappa_0) = \eta_0$ , если считаются известными  $\kappa_0$  и  $\eta_0$ . При этом удобно выбирать  $\kappa_{init} = \kappa_0$ .

Правая часть в (6.7) — это функция от  $\kappa$ , с точностью до коэффициента совпадающая с первообразной от  $\phi(\kappa)$ .

Разрешая (6.7) относительно  $\eta$ , можно получить явное выражение для  $\tilde{\eta}(\kappa)$ , а значит, и для  $\eta(k)$ .

Дальнейшие элементарные рассуждения мы проиллюстрируем для весьма наглядного случая  $r = g - b = 0$ . В этом случае левая часть в (6.7) постоянна для всех  $\kappa$ ,  $\eta = \tilde{\eta}(\kappa)$  (если, конечно, траектория не выходит за пределы рассматриваемой области А или С), так что:

$$k\eta(k) = C + \frac{\alpha vk}{m + b + v} + \frac{f(k)}{m + g + v} \quad (6.8)$$

с  $v = 0$  в области С и  $v = v_m$  в области А.

Рассмотрим подробнее случай области С. Здесь в качестве начальной точки имеет смысл выбирать  $k_0 = k_D$ . Из (6.8) видно, что  $\partial_k \eta(k_D) = 0$ . Поэтому постоянную  $C = C_C$  можно выбирать из условия того, чтобы выпуклая кривая  $y = \frac{f(k)}{f_k(k)} + C_C$  касалась прямой  $y = k$  на плоскости  $(k, y)$ , (рис. 3), так что  $C_C = k_D - \frac{f(k_D)}{f_k(k_D)} < 0$  (поскольку  $\frac{f(k_D)}{k_D} > f(k_D)$ ).

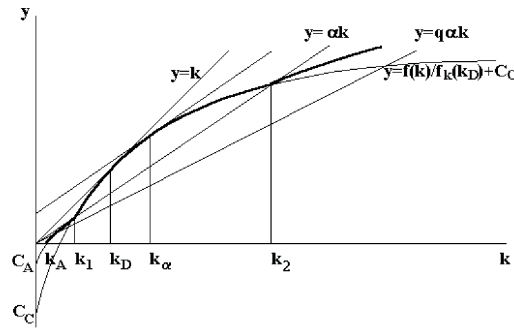


Рис. 3. Построение оптимальной фазовой траектории в координатах  $(k, y = \eta k)$  при  $r = 0$

С любой другой прямой  $y = \alpha k$ , где  $0 < \alpha < 1$ , построенная кривая имеет две точки пересечения  $k_1 < k_2$ , так что если в качестве этого  $\alpha$  выбирается соответствующий параметр исходной задачи, то эти значения  $k_1$  и  $k_2$  соответствуют точкам перехода оптимальной траектории, проходящей через стационарную точку  $(k_D, 1)$ , между областями А и С. Эти значения занимают принципиальное место в задаче отслеживания момента переключения режима управления при наблюдении только за фазовой переменной  $k(t)$ . Точнее, если  $T$  достаточно велико (см. (5.1) и приведенную ниже оценку), то оптимальная траектория соответствует движению по кривым  $L_1 - L_5$ , изображенным на рис. 1. При этом, если изначально было  $k_0 > k_2$ , то первоначальный оптимальный режим, соответствующий области А, определяется управлениями  $u = 1$  и  $V = v_m$ . Для поддержания оптимального управления на этом участке (кривая  $L_2$ ) достаточно отслеживать  $k(t)$  с тем, чтобы переключить его на режим области С ( $u = 1, v = 0$ ) по достижении ею величины  $k_2$ . Далее следует оставаться в оптимальном режиме (кривая  $L_3$ ) вплоть до достижения значения  $k_D$ , где и следует задержаться на избыточное время, используя вычисленные в предыдущем параграфе управления. Когда оставшееся время станет равно резервному  $T_r(k_0) = T_e(k_D, 1)$ , следует начать двигаться по

кривой  $L_4$ , снова переключившись на управление, применяющееся в области С ( $u = 1, v = 0$ ). Достигнув значения  $k = k_1$ , необходимо переключиться на режим области А ( $u = 1, v = v_m$ ). Дальнейшее движение осуществляется по кривой  $L_5$  вплоть до истечения лимита времени.

Если изначально было  $k_0 < k_D$ , то первоначально оптимальным является режим области Е ( $u = v = 0$ ), который применяется вплоть до достижения стационарной точки  $k = k_D$ , после чего работает описанная выше схема.

На рис. 3 указан также способ отыскания точки  $k_A$ , соответствующей финальному значению  $k(T)$  при оптимальном управлении. Она получается как пересечение с осью абсцисс  $y = 0$  на плоскости  $(k, y)$  кривой  $y = \sigma f(k) + \alpha qk + C_A$ , где  $\sigma = 1/(m + b + v_m)$ ,  $q = v_m/(m + b + v_m)$ , а постоянная  $C_A$  подбирается таким образом, чтобы эта кривая проходила через точку  $(k = k_1, y = \alpha k_1)$ , служащую пересечением ранее построенной кривой с прямой  $y = \alpha k$ .

Для отыскания значения  $k_A$  можно воспользоваться также следующим простым соотношением.

**Теорема 3.** При  $r = 0$  финальное значение  $k_A$  на оптимальной траектории, проходящей через стационарную точку, удовлетворяет равенству

$$f(k_A) + \alpha v_m k_A = f(k_D) - k_D(m + g). \quad (6.9)$$

**Замечание.** Соотношение (6.9) имеет весьма простую биологическую интерпретацию: избыточная продуктивность популяции в стационарном режиме (правая часть равенства) при оптимальном управлении совпадает с максимальной доступной отдачей от нее в финальной стадии (левая часть равенства).

**Доказательство.** Запишем (6.8) для  $k = k_D$ ,  $k = k_1$  и  $k = k_A$ , причем для  $k = k_1$  в двух вариантах: в области С и в области А. При этом учтем, что  $\eta(k_D) = 1$ ,  $\eta(k_1) = \alpha$ ,  $\eta(k_A) = 0$ .

$$(a) \quad k_D = C_C + uf(k_D)/\lambda_C,$$

$$(b) \quad \lambda k_1 = C_C + uf(k_1)/\lambda_C,$$

$$(c) \quad \lambda k_1 = C_A + uf(k_1)/\lambda_A + \alpha q k_1,$$

$$(d) \quad 0 = C_A + uf(k_A)/\lambda_A + \alpha q k_A.$$

Здесь  $\lambda_C = m + g$ ,  $\lambda_A = m + g + v_m$ ,  $u = 1$ ,  $q = v_m/\lambda_A$ . Равенство (6.9) получается как линейная комбинация  $\lambda_C((a) - (b)) + \lambda_A((c) - (d))$ .

Из рис. 3 видно, что  $k_A < k_1 < k_D < k_\alpha < k_2$ , поскольку  $k_\alpha$  соответствует точке касания построенной кривой для прямой, параллельной прямой  $y = \alpha k$ .

Нетрудно заметить, что рис. 3 — это фактически (частично) рис. 1 в координатах  $(k, y = \eta k)$ .

Знание значений  $k_1$ , и  $k_A$  позволяет легко найти необходимый резерв времени для выхода из стационарной точки  $k = k_D$ , равный

$$T_r(k_D) = T_e(k_D, 1) = T_4 + T_5,$$

где

$$T_4 = \frac{\ln(k_D/k_1)}{m + g}, \quad T_5 = \frac{\ln(k_1/k_A)}{m + g + v_m}.$$

Заметим, что указанный здесь резерв времени отличается от полного необходимого резерва  $T_e(k_0)$ , указанного в (5.1), на величину  $T_0(k_0)$  времени, необходимого для достижения по оптимальной траектории стационарной точки с  $k = k_D$ .

При  $k_0 \geq k_D$  эта величина рассчитывается по формулам:

$$T_0(k_0) = T_3(k_0) + T_2(k_0),$$

где

$$T_3(k_0) = \frac{\ln(\min\{k_2, k_0\}/k_D)}{m + g}, \quad T_2(k_0) = \frac{\ln(\max\{k_0, k_2\}/k_2)}{m + g + v_m}.$$

В случае  $k_0 < k_D$  для ее вычисления следует использовать формулу (6.1) с  $u = v = 0$  и  $k_1 = k_D$ . Мы не будем далее останавливаться на обсуждении этих достаточно элементарных вопросов, поскольку сама по себе величина  $T_0(k_0)$  принципиального значения не имеет: она важна только для получения оценки (5.1); для принятия решения о переключениях в условиях выполнения (5.1) достаточно знания величин  $k_D$ ,  $k_1$  и  $T_r(k_D)$  (или, как мы видели,  $k_A$ ).

## Литература

- [1] Абакумов А.И. Управление и оптимизация в моделях эксплуатируемых популяций. Владивосток: Дальнаука, 1993. 129 с.
- [2] Clark C.W. Biomathematical Modelling and Fishing Management. N. Y.: Wiley Int. Pub., 1985. 291 p.
- [3] Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.]. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.

Поступила в редакцию 25/IV/2010;  
в окончательном варианте — 20/I/2011.

## THE OPTIMAL EXPLUATATION OF DOUBLE AGE BIOLOGICAL POPULATION

© 2011 V.N. Razzhevaikin<sup>4</sup> A.T. Yusufov<sup>5</sup>

The problem of the optimal requisitioning of crop or biomass is explored. Methods of optimal decision making based on estimations of observable variables are shown. Methods of construction of phase paths for optimal solutions in a most typical cases are set forth.

**Key words:** optimal expluataion, biological population, Pontryagin principal of maximum, optimal trajectory.

Paper received 25/IV/2010.

Paper accepted 20/I/2011.

<sup>4</sup>Razzhevaikin Valery Nikolaevich (razz@mail.ru), Dorodnicyn Computing Centre of RAS, Moscow, 119333, Russian Federation.

<sup>5</sup>Yusufov Ali Turaevich (aliyusufov@mail.ru), Bashkir State Agrarian University, Sibay, 453832, Russian Federation.