УДК 517.51:517.98

БЛОЧНЫЕ ФРЕЙМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ^2

© 2011 М.А. Лихобабенко[1]

В данной статье рассмотрены ε-почти фреймы Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell^2_N(\mathbb{R})$ из бесконечного числа элементов с заданными нормами. Приведена конструкция блочных фреймов в пространстве ℓ^2.

Ключевые слова: ε-почти фреймы Парсеваля — Стеклова, след оператора, блочно-диагональная матрица.

Введение

В первом параграфе данной статьи мы рассматриваем фреймы Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell^2_N(\mathbb{R})$, состоящие из бесконечного числа элементов. Найдены условия на наборы положительных чисел, которые являются нормами фреймов Парсеваля — Стеклова в $\ell^2_N(\mathbb{R})$, а также построен ε-почти фрейм Парсеваля — Стеклова с заданными нормами в $\ell^2_N(\mathbb{R})$.

Во втором параграфе приведена конструкция построения блочных фреймов в пространстве ℓ^2 с использованием блочно-диагональных матриц. Данная конструкция также позволяет строить фреймы Парсеваля — Стеклова с одинаковыми нормами в ℓ^2.

1. ε-почти фреймы Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell^2_N(\mathbb{R})$

В первом параграфе мы рассматриваем N-мерное линейное пространство над полем вещественных чисел, которые будем обозначать $l^2_N(\mathbb{R})$. Введем в нем скалярное произведение и норму следующим образом:

$$< x, y >= \sum_{k=1}^{N} x_k y_k, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >} = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$ — элементы из $l^2_N(\mathbb{R})$.

Пусть M и N — натуральные числа, причем $M \geqslant N$, и пусть J — конечное или бесконечное множество индексов. Введем понятие фрейма.

[1]Лихобабенко Мария Александровна (Marijalapshina@rambler.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Определение 1.1 [1; 2]. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k\in J}$ из $l_N^2(\mathbb{R})$ называется *фреймом* для пространства $l_N^2(\mathbb{R})$, если существуют положительные числа A и B такие, что

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{k\in J} |< x, \varphi_k >|^2 \leqslant B\|x\|^2 \tag{1.1}$$

для всех x из $l_N^2(\mathbb{R})$.

Числа A и B называются соответственно нижней и верхней границами фрейма. Они определяются неоднозначно, так как верхнюю границу B можно увеличивать, а нижнюю границу A — уменьшать. Поэтому инфинум по множеству всех верхних границ — это оптимальная верхняя граница фрейма, а супремум по множеству всех нижних границ — оптимальная нижняя граница фрейма.

Если оптимальная верхняя и нижняя границы совпадают, т. е. $A = B$, то фрейм называется *жестким.* Для него соотношение (1.1) переходит в равенство

$$\sum_{k\in J} |< x, \varphi_k >|^2 = A\|x\|^2,$$

которое при $A = 1$ принимает форму равенства Парсеваля — Стеклова:

$$\sum_{k\in J} |< x, \varphi_k >|^2 = \|x\|^2. \tag{1.2}$$

Фреймы, для которых выполнено (1.2), называют фреймами Парсеваля — Стеклова.

Зафиксируем ε на интервале $[0, 1)$.

Определение 1.2 [3]. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\ell_N^2(\mathbb{R})$ называется ε-почти фреймом Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$, если существуют константы $A = 1-\varepsilon$ и $B = 1+\varepsilon$ такие, что

$$(1-\varepsilon)\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |< x, \varphi_k >|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|^2 \tag{1.3}$$

для любого $x \in \ell_N^2(\mathbb{R})$.

При $\varepsilon = 0$ равенство (1.3) принимает форму классического равенства Парсеваля — Стеклова (1.2).

Пусть определен оператор $A : H \to H$.

Определение 1.3 [4]. Вполне непрерывный (компактный) оператор A называется ядерным, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}$.

Определение 1.4 [4]. Спектральным следом ядерного оператора A называется сумма его собственных значений λ_k, т. е. выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k$.

Определение 1.5 [4]. Матричным следом ядерного оператора A называется сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k) = Tr\ A$, где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H. Причем сумма ряда не зависит от выбора базиса.

Лемма 1.1 [4]. Если A — ядерный положительный оператор в H, то его матричный и спектральный следы принимают конечные значения, и справедливо равенство

$$Tr\ A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k),$$

т. е. матричный след оператора совпадает с его спектральным следом.

Теорема 1.1. Пусть H — гильбертово пространство, $R \subset H$, $dim\ R = r < \infty$, оператор $P: H \to R$ — оператор ортогонального проектирования. Тогда $Tr\ P = r$.

Доказательство. Оператор ортогонального проектирования компактен, т. к. он переводит любое ограниченное подмножество $M \subset H$ в ограниченное подмножество конечномерного пространства R, т. е. в предкомпактное множество.

Так как $P^2 = P$, то $\sqrt{\lambda_k}$ совпадает с λ_k для всех k. Оператор P действует в конечномерное подпространство, поэтому у него конечное число ненулевых собственных значений, равных 1, и их количество равно размерности подпространства, на которое действует оператор P, т. е. $dim\ R = r$.

Поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k = \sum\limits_{k=1}^{r} 1 = r < \infty$ и, следовательно, P — ядерный оператор.

Так как

$$(Px, x) = (P^2x, x) = (P(Px), x) = (Px, P^*x) = (Px, Px) \geqslant 0,$$

то P — положительный оператор.

Следовательно, по лемме 1.1, его матричный и спектральный следы совпадают, т. е.

$$Tr\ P = \sum_{k=1}^{\infty} (Pe_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = r = dim\ R$$

и

$$\|P\|_{HS}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Pe_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} < Pe_k, Pe_k >= \sum_{k=1}^{\infty} < P^2e_k, e_k >= \sum_{k=1}^{\infty} < Pe_k, e_k >= dim\ R.$$

▲

Лемма 1.2 [5] Для любого фрейма Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ существуют гильбертово пространство $H' \supset H$ и ортонормированный базис $\{e_k\} \subset H'$ такие, что $\varphi_k = Pe_k$, где $P: H' \to H$ — ортогональный проектор.

Теорема 1.2. Если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ и $\|\varphi_k\| = a_k$ для $k = 1, 2, \ldots$, то $a_k^2 \leqslant 1$ для $k = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N$.

Доказательство. По лемме 1.2 любой фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\ell_N^2(\mathbb{R})$ можно получить из ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{R})$ с помощью оператора ортогонального проектирования $P: \ell^2(\mathbb{R}) \to \ell_N^2(\mathbb{R})$, т. е. $\varphi_k = Pe_k$ для $k = 1, 2, \ldots$, поэтому

$$a_k^2 = \|\varphi_k\|^2 = \|Pe_k\|^2 \leqslant \|e_k\|^2 = 1$$

для $k = 1, 2, \ldots$.

Вычислим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|Pe_k\|^2 = \|P\|_{HS} = dim\ \ell_N^2(\mathbb{R}) = N$.

▲

Теорема 1.3. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел такая, что $a_k^2 \leqslant 1$ для $k = 1, 2, \ldots$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = N$. Тогда существует ε-почти фрейм Парсеваля — Стеклова $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$ и $\|\varphi_k\|^2 = a_k^2$ для $k = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Разложим сумму $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ на N слагаемых $S_1, S_2, \ldots, S_N$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = S_1 + S_2 + \ldots + S_N$, следующим образом.

К a_1^2 прибавляем a_2^2, полученную сумму $a_1^2+a_2^2$ сравниваем с 1. Если a_1^2+ $+a_2^2>1$, то вычисляем погрешности $\delta_1=a_1^2+a_2^2-1$ и $\delta_2=1-a_1^2$. Далее выбираем $\varepsilon_1=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ и первое слагаемое для разложения $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$

$$S_1=\begin{cases} a_1^2+a_2^2, & \text{если } \varepsilon_1=\delta_1\\ a_1^2, & \text{если } \varepsilon_1=\delta_2.\end{cases}$$

Если $a_1^2+a_2^2<1$, то к данной сумме $a_1^2+a_2^2$ прибавляем a_3^2 и снова сравниваем с единицей. То есть если $a_1^2+a_2^2+a_3^2>1$, то вычисляем погрешности $\delta_1=a_1^2+a_2^2+$ $+a_3^2-1$ и $\delta_2=1-(a_1^2+a_2^2)$. Далее выбираем $\varepsilon_1=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ и первое слагаемое для разложения $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$

$$S_1=\begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2, & \text{если } \varepsilon_1=\delta_1\\ a_1^2+a_2^2, & \text{если } \varepsilon_1=\delta_2\end{cases}=\begin{cases} 1+\varepsilon_1, & \text{если } \varepsilon_1=\delta_1\\ 1-\varepsilon_1, & \text{если } \varepsilon_1=\delta_2.\end{cases}$$

А если $a_1^2+a_2^2+a_3^2<1$, то к данной сумме прибавляем a_4 и снова сравниваем с 1. Процесс продолжаем до тех пор, пока не получим первое слагаемое S_1 для разложения $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$. Предположим, что $S_1=a_1^2+a_2^2+a_3^2=1+\varepsilon_1$.

Далее аналогично получаем второе слагаемое для разложения $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$, то есть к a_4^2 прибавляем a_5^2 и результат $a_4^2+a_5^2$ сравниваем с единицей, пока не получим все N слагаемых $S_1,S_2,\ldots,S_N$, равных $1\pm\varepsilon_k$ для $k=1,2,\ldots,N$.

Таким образом, мы из числовой последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ выделяем конечные или бесконечные числовые подпоследовательности, из которых формируем $S_1,S_2,\ldots,S_N$.

Элементы числовой последовательности из S_1 умножаем на e_1, элементы из S_2 — на e_2, элементы из S_N — на e_N. Таким образом, мы получаем бесконечный набор векторов $\varphi_1=a_1e_1$, $\varphi_2=a_2e_1$, $\varphi_3=a_3e_1$, $\varphi_4=a_4e_2,\ldots$. Проверим, что данные векторы образуют ε-почти фрейм Парсеваля — Стеклова.

По определению ε-почти фрейма Парсеваля — Стеклова должны выполняться неравенства:

$$(1-\varepsilon)\|x\|^2\leqslant\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}|<x,\varphi_k>|^2\leqslant(1+\varepsilon)\|x\|^2$$

для любого $x\in\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Распишем подробнее $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|<x,\varphi_k>|^2$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|<x,\varphi_k>|^2=|<x,\varphi_1>|^2+|<x,\varphi_2>|^2+|<x,\varphi_3>|^2+|<x,\varphi_4>|^2+\ldots=$$

$$=|<x,a_1e_1>|^2+|<x,a_2e_1>|^2+|<x,a_3e_1>|^2+|<x,a_4e_2>|^2+\ldots=$$
$$=a_1^2x_1^2+a_2^2x_1^2+a_3^2x_1^2+a_4^2x_2^2+\ldots=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)x_1^2+(a_4^2+\ldots)x_2^2+\ldots.$$

Коэффициент перед первой координатой вектора x равняется S_1, перед второй — S_2, … , перед N-й — S_N.

Получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|<x,\varphi_k>|^2=S_1x_1^2+S_2x_2^2+\ldots+S_Nx_N^2, \tag{1.4}$$

где $S_k=1\pm\varepsilon_k$ для $k=1,2,\ldots,N$.

Пусть $\varepsilon = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\{\varepsilon_k\}$. Используя оценки

$$\begin{cases} 1+\varepsilon_k < 1+\varepsilon, \\ 1-\varepsilon_k < 1+\varepsilon \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1+\varepsilon_k > 1-\varepsilon, \\ 1-\varepsilon_k > 1-\varepsilon \end{cases}$$

для (1.4), получим, с одной стороны,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |<x,\varphi_k>|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|x\|^2,$$

а, с другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |<x,\varphi_k>|^2 \geqslant (1-\varepsilon)\|x\|^2.$$

Данные неравенства дают определение ε-почти фрейма Парсеваля — Стеклова для последовательности $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

Если $\varepsilon = 0$, то последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является фреймом Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

▲

Пример фрейма Парсеваля — Стеклова, состоящий из бесконечного числа элементов в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_N$ — стандартный ортонормированный базис. У элемента e_k на k-м месте стоит единица, а все остальные координаты равны нулю.

Тогда несложно проверить, что следующие элементы:

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}}e_N \\ \frac{1}{\sqrt{4}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{4}}e_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{4}}e_N \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{\sqrt{2^k}}e_1 & \frac{1}{\sqrt{2^k}}e_2 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2^k}}e_N \\ \vdots & & & \end{array}$$

образуют фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\ell_N^2(\mathbb{R})$.

2. Блочная конструкция фреймов в пространстве l^2

Во втором параграфе мы рассматриваем бесконечномерное линейное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, которые будем обозначать $l^2(\mathbb{R})$ или $l^2(\mathbb{C})$ соответственно. Если выбор числового поля не влияет на формулировки результатов и определений, то будем использовать обозначение l^2. В пространстве l^2 вводим скалярное произведение и евклидову норму следующим образом:

$$<x,y> = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k,$$

$$\|x\| = \sqrt{<x,x>} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — элементы из l^2.

Определение 2.1 [6]. Набор элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из l^2 называется *фреймом* для пространства l^2, если существуют положительные числа A и B такие, что

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |< x, \varphi_k >|^2 \leqslant B\|x\|^2 \tag{2.1}$$

для всех x из l^2.

Числа A и B называются соответственно нижней и верхней границами фрейма. Инфинум по множеству всех верхних границ — это оптимальная верхняя граница фрейма, а супремум по множеству всех нижних границ — оптимальная нижняя граница фрейма.

Если оптимальная верхняя и нижняя границы совпадают, т. е. $A = B$, то фрейм называется *жестким.* Если $A = 1$, то фрейм называют *фреймом Парсеваля — Стеклова.*

Рассмотрим финитные векторы пространства ℓ^2, координаты которых запишем в строки бесконечной матрицы. Эта матрица имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi_{M_1N_1} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \Phi_{M_2N_2} & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi_{M_kN_k} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где

$$\Phi_{M_kN_k} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1N_k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2N_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{M_k1} & \varphi_{M_k2} & \dots & \varphi_{M_kN_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(k)} \\ \varphi_2^{(k)} \\ \vdots \\ \varphi_{M_k}^{(k)} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

причем $M_k,\ N_k \in \ell^2_{N_k}$ и $M_k \geqslant N_k$.

Теорема 2.1. Пусть $A = inf\ A_k > 0$ для числовой последовательности$\{A_k\}$, ограниченной снизу. Пусть $B = sup\ B_k > 0$ для числовой последовательности $\{B_k\}$, ограниченной сверху, причем $A \leqslant B < \infty$. Тогда строки матрицы Ψ образуют фрейм в пространстве ℓ^2 с границами A и B тогда и только тогда, когда строки матрицы $\Phi_{M_kN_k}$ образуют фрейм пространства $\ell^2_{N_k}$ для всех k с границами A_k и B_k.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть строки матрицы Ψ образуют фрейм в пространстве ℓ^2 с границами A и B. По определению фрейма это означает, что выполнено следующее равенство:

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_k} |< x, \varphi_l^{(k)} >|^2 \leqslant B\|x\|^2, \quad \forall x \in \ell^2. \tag{2.4}$$

Так как неравенства должны выполняться для любого $x \in \ell^2$, то возьмем

$$x := x_{N_1} = (x_1, x_2, \dots, x_{N_1}, 0, 0, \dots) \in \ell^2.$$

Подставим этот x в неравенства (2.4). Тогда получим:

$$A\|x_{N_1}\|^2 \leqslant \sum_{l=1}^{M_1} |< x_{N_1}, \varphi_l^{(1)} >|^2 \leqslant B\|x_{N_1}\|^2, \quad \forall x_{N_1} \in \ell^2_{N_1}.$$

А это означает, что строки матрицы Φ_{M_1,N_1} образуют фрейм в пространстве $\ell^2_{N_1}$ с границами A и B.

Теперь возьмем

$$x := x_{N_2} = (0, \dots, 0, x_{N_1+1}, x_{N_1+2}, \dots, x_{N_1+N_2}, 0, \dots) \in \ell^2$$

и подставим его в (2.4), получим:

$$A\|x_{N_2}\|^2 \leqslant \sum_{l=1}^{M_2} | < x_{N_2}, \varphi_l^{(2)} > |^2 \leqslant B\|x_{N_2}\|^2, \quad \forall x_{N_2} \in \ell^2_{N_2}.$$

Значит, строки матрицы $\Phi_{M_2N_2}$ образуют фрейм в пространстве $\ell^2_{N_2}$ с границами A и B. Продолжая этот процесс, получим, что строки всех матриц $\Phi_{M_kN_k}$ образуют фрейм в пространстве $\ell^2_{N_k}$ с границами A и B.

($\Leftarrow$) Пусть строки матрицы $\Phi_{M_kN_k}$ образуют фрейм в пространстве $\ell^2_{N_k}$ с границами A_k и B_k, то есть:

$$A_1\|x_{N_1}\|^2 \leqslant \sum_{l=1}^{M_1} | < x_{N_1}, \varphi_l^{(1)} > |^2 \leqslant B_1\|x_{N_1}\|^2, \quad \forall x_{N_1} \in \ell^2_{N_1}; \tag{2.5}$$

$$A_2\|x_{N_2}\|^2 \leqslant \sum_{l=1}^{M_2} | < x_{N_2}, \varphi_l^{(2)} > |^2 \leqslant B_2\|x_{N_2}\|^2, \quad \forall x_{N_2} \in \ell^2_{N_2}; \tag{2.6}$$

и так далее для каждой матрицы Φ_{M_k,N_k}.

Рассмотрим следующую сумму:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_k} | < x, \varphi_l^{(k)} > |^2 = \sum_{l=1}^{M_1} | < x, \varphi_l^{(1)} > |^2 + \sum_{l=1}^{M_2} | < x, \varphi_l^{(2)} > |^2 + \dots \tag{2.7}$$

Оценим (2.7) с помощью неравенств (2.5), (2.6):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_k} | < x, \varphi_l^{(k)} > |^2 \leqslant B_1\|x_{N_1}\|^2 + B_2\|x_{N_2}\|^2 + \dots \leqslant \sup_k\{B_k\}\|x\|^2 = B\|x\|^2 \quad \forall x \in \ell^2$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_k} | < x, \varphi_l^{(k)} > |^2 \geqslant A_1\|x_{N_1}\|^2 + A_2\|x_{N_2}\|^2 + \dots \geqslant \inf_k\{A_k\}\|x\|^2 = A\|x\|^2 \quad \forall x \in \ell^2.$$

Таким образом, получаем следующие неравенства:

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{M_k} | < x, \varphi_l^{(k)} > |^2 \leqslant B\|x\|^2 \quad \forall x \in \ell^2.$$

А это означает, что строки матрицы Ψ образует фрейм в пространстве l^2 с границами A и B, где $A = \inf_k A_k$, $B = \sup_k B_k$.

▲

Определение 2.2. Пусть $M_k \geqslant N_k$, $k = 1, 2, \dots$ — две последовательности натуральных чисел; строки $M_k \times N_k$ матрицы $\Phi_{M_kN_k}$ (2.3) образуют фрейм с границами A_k и B_k в пространстве $\ell^2_{N_k}$. Фрейм, образованный строками матрицы Ψ (2.2), будем называть *блочным фреймом.*

Согласно теореме 2.1, определенный выше блочный фрейм имеет границы $A = \inf_k A_k$ и $B = \sup_k B_k$.

Следствие 2.1. Пусть M, N — натуральные числа, $M \geqslant N$ и пусть $\alpha = \sqrt{\frac{N}{M}}$. В бесконечномерном гильбертовом пространстве существует фрейм Парсеваля — Стеклова с одинаковыми нормами, равными α.

Доказательство. Зафиксируем натуральные числа M и N, $M \geqslant N$. И пусть $\Phi_{M_k N_k} = \Phi_{MN}$ для всех k, и строки матрицы Φ_{MN} образуют фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве ℓ^2_N из M элементов с одинаковыми нормами, равными $\alpha = \sqrt{\frac{N}{M}}$. Тогда по теореме 2.1 строки матрицы Φ тоже образуют фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве ℓ^2 с одинаковыми нормами, равными α.

▲

Литература

[1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск: РХД, 2004. 464 с.

[2] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.

[3] Bodmann B.G., Casazza P.G. The road to equal-norm Parseval frames // Journal of Functional Analysis. 2010. Vol. 258. P. 397–420

[4] Садовничий В.А. Теория операторов: учеб. для вузов с углубленным изучением математики. М.: Дрофа, 2004. 384 с.

[5] Кашин Б.С., Куликова Т.Ю. Замечание об описании фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 941–945.

[6] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2002.

Поступила в редакцию 10/*III*/2011;
в окончательном варианте — 10/*III*/2011.

BLOCK FRAMES IN THE ℓ^2 SPACE

 M.A. Likhobabenko[2]

ε-nearly Parceval — Steklov infinite frames in the space $l^2_N(\mathbb{R})$ with prescribed norms are considered. This paper proposes block construction of frames in the space ℓ^2.

Key words: ε-nearly Parceval — Steklov frames, trace of operator, block-diagonal matrix, block frame.

Paper received 10/*III*/2011.
Paper accepted 10/*III*/2011.

[2]Likhobabenko Maria Alexandrovna (`Marijalapshina@rambler.ru`), the Dept. of Theory of Functions and Functional Analysis, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.