УДК 512.7

КОГОМОЛОГИЧЕСКИЕ БИРАЦИОНАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ

© 2011 Ю.Ю. Крутиков[1] С.Ю. Попов[2]

Настоящая работа является первым систематическим шагом в получении бирациональной классификации четырехмерных алгебраических торов. Мы вычислили все когомологические бирациональные инварианты данных торов. Описали все четырехмерные алгебраические торы, изучаемый инвариант которых нетривиален.

Ключевые слова: алгебраический тор, бирациональный инвариант, когомологии, каноническая резольвента, бирациональная классификация.

Введение

Пусть T — алгебраический n-мерный тор, определенный над произвольным полем k. Тор T является k-формой тривиального тора $\mathbb{G}_m^n$, т. е. группы $T \otimes_k k_s$ и $\mathbb{G}_{m,k_s}^n$ изоморфны, где k_s — сепарабельное замыкание поля k с группой Галуа $\mathcal{G}$. Группа $\widehat{T}$ рациональных характеров тора T является свободной абелевой группой ранга n, на которой естественно действует группа $\mathcal{G}$. Хорошо известно, что соответствие $T \mapsto \widehat{T}$ определяет дуальность между категориями алгебраических k-торов и $\mathcal{G}$-решеток [1]. Напомним, как определить тор, исходя из $\mathcal{G}$-решетки $\widehat{T}$. Представим группу $\widehat{T}$ в мультипликативной форме, и пусть $k_s[\widehat{T}]$ — групповое кольцо, на котором группа Галуа действует "диагонально". Тогда

$$T = Spec(k_s[\widehat{T}])^{\mathcal{G}}.$$

Пусть теперь X — гладкое проективное многообразие над полем k, содержащее тор T в качестве открытого подмножества (такая проективная модель для тора существует над любым полем, и ее построение описано в следующем пункте), $\overline{X} = X \otimes_k k_s$. Тогда $\mathcal{G}$-модуль $\operatorname{Pic} \overline{X}$ является решеткой. Если Y — другая проективная модель k-тора T, то существует изоморфизм $\mathcal{G}$-модулей $\operatorname{Pic} \overline{X} \oplus S_1 \cong \operatorname{Pic} \overline{Y} \oplus S_2$, где S_1, S_2 — пермутационные $\mathcal{G}$-модули [2]. Модули $\operatorname{Pic} \overline{X}$ и $\operatorname{Pic} \overline{Y}$, связанные таким соотношением, называются *подобными*. Пусть $[\operatorname{Pic} \overline{X}]$ — класс подобия; он является бирациональным инвариантом k-тора T. Решетка $\operatorname{Pic} \overline{X}$ определяет тор T с точностью до стабильной эквивалентности [2]. Возникает задача практического вычисления класса $[\operatorname{Pic} \overline{X}]$ по заданной $\mathcal{G}$-решетке $\widehat{T}$. Эта задача легко сводится к случаю, когда действующая на $\widehat{T}$ группа является конечной. В самом деле, из

[1]Крутиков Юрий Юрьевич (yuri820710@mail.ru), лаборатория "Математические методы защиты информации" Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[2]Попов Сергей Юрьевич (popov160575@yandex.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

компактности группы $\mathcal{G}$ и дискретности решетки $\widehat{T}$ следует, что подгруппа $\mathcal{G}_1$, состоящая из элементов группы $\mathcal{G}$, тривиально действующих на $\widehat{T}$, имеет конечный индекс в $\mathcal{G}$. Пусть $L = k_s^{\mathcal{G}_1}$ — конечное расширение Галуа поля k с группой Галуа $\Pi = \mathcal{G}/\mathcal{G}_1$. Поле L есть минимальное поле разложения k-тора T, то есть L — минимальное поле, над которым тор T разложим, а именно $T \otimes_k L \cong \mathbb{G}^n_{m,L}$. Заметим, что решетка характеров $\widehat{T}$ является Π-модулем, и Π действует на этой решетке точно. Таким образом, имеем целочисленное представление группы Π, а выбор базиса решетки $\widehat{T}$, в котором будем вычислять матрицы действия элементов группы Π на $\widehat{T}$, приводит нас к точному представлению $\varphi : \Pi \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, где $n = \dim T$. Группу $G = \varphi(\Pi)$ называют *группой разложения тора* T; очевидно, что $G \cong \Pi$ и две группы разложения тора T сопряжены в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$. Вернемся к классу Пикара теперь уже на конечном уровне. Вместо $\overline{X}$ можно взять $X_L = X \otimes_k L$. При этом $[\mathrm{Pic}\, \overline{X}] = [\mathrm{Pic}\, X_L]$. Решетка $\mathrm{Pic}\, X_L$, рассматриваемая как Π-модуль, обладает свойством $H^{-1}(\pi, \mathrm{Pic}\, X_L) = 0, \forall \pi \leqslant \Pi$. Назовем Π-модули с таким свойством *вялыми*. Как известно [2], вложение $T \subset X$ определяет точную последовательность Π-модулей

$$0 \longrightarrow \widehat{T} \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow \mathrm{Pic}\, X_L \longrightarrow 0, \qquad (1)$$

где $\widehat{S}$ — пермутационный Π-модуль, порожденный простыми дивизорами из дополнения $X_L \backslash T$. Пусть теперь

$$0 \longrightarrow \widehat{T} \longrightarrow \widehat{S}_1 \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow 0 \qquad (2)$$

другая резольвента модуля $\widehat{T}$, где $\widehat{S}_1$ — пермутационный Π-модуль, а $\widehat{N}$ — вялый. В работе [2] показано, что $[\mathrm{Pic}\, X_L]$ и $[\widehat{N}]$ совпадают. Будем обозначать класс $[\mathrm{Pic}\, X_L]$ символом $p_\Pi(T)$ или просто $p(T)$, если группа Π зафиксирована. Всякую резольвенту Π-модулей вида (2) называют *канонической резольвентой*, так как она позволяет находить основной бирациональный инвариант $p(T)$ тора T. Заметим, что для любой подгруппы π группы Π имеем класс $p_\pi(T)$, который также является бирациональным инвариантом тора T. Класс $p_\pi(T)$ равен $[\widehat{N}]$, где $\widehat{N}$ рассматривается как π-модуль.

Интерес к проблеме рациональности алгебраических торов, определенных над незамкнутым полем, не ослабевает уже более сорока лет. Эта проблема почти всегда редуцируется к вычислению основного бирационального инварианта $p(T)$ алгебраического тора T. Один из важных результатов В.Е. Воскресенского состоит в том, что тривиальность этого инварианта равносильна стабильной рациональности алгебраического тора. Уже в момент появления этого результата была высказана гипотеза, что стабильно рациональный тор является рациональным над полем определения. В недавно вышедшей монографии [3] представлено доказательство этой проблемы. Заметим, что данный результат имеет весьма интересное прикладное значение в области торической криптографии: на группах точек рациональных торов, определенных над конечным полем, возможно построение криптосистем с очень хорошими параметрами. С результатами в данном направлении можно ознакомиться в работах [4–6].

Существует несколько направлений исследования рациональности алгебраических торов. Один из них связан с рассмотрением максимальных торов без аффекта в связных полупростых алгебраических группах. В работе [7] впервые В.Е. Воскресенский и Б.Э. Кунявский разобрали случай максимальных торов без аффекта в присоединенных и односвязных классических группах. Их результаты получили обобщение в работе А.А. Клячко [8], в которой он установил выполнение принципа Хассе и слабой апроксимации для максимальных торов без аффекта в полупростых алгебраических группах, определенных над полем алгебраических чисел следующих типов: внутренние формы Шевалле, односвязные группы, присоединенные группы и простые группы. Частные результаты, касающиеся рациональности максимальных торов без аффекта в исключительных алгебраических группах, можно найти в работах [9; 10]. Другой подход — это последовательное изучение торов размерности 1, 2, и т.д. Как известно, все алгебраические торы размерности один и два являются рациональными над полем определения [2]. Первый пример нерационального алгебраического тора — трехмерный тор с биквадратичным полем разложения — был найден Б.Э. Кунявским. Он же получил полную бирациональную классификацию трехмерных алгебраических торов [11]. Уже по поводу четырехмерных торов мало что известно: частные результаты можно найти в работах [9; 10].

Настоящая работа является первым систематическим шагом в получении бирациональной классификации четырехмерных торов. Напомним, что наряду с основным бирациональным инвариантом $p(T)$ алгебраического тора T важное значение имеет и производный когомологический инвариант $H^1(k, \operatorname{Pic} \overline{X})$, так как вычисление этой группы позволяет установить выполнение принципа Хассе и слабой апроксимации, а значит, имеет важное значение не только для бирациональной геометрии алгебраических торов, но и для их арифметических приложений. Для трехмерных алгебраических торов все когомологические бирациональные инварианты были вычислены в статье [9]. Мы же получаем аналогичный полный перечень для четырехмерных алгебраических торов. Отметим также, что, решая данную задачу, мы доказали нерациональность максимального алгебраического тора без аффекта в связной полупростой алгебраической группе, определенной системой корней типа F_4.

1. Каноническая резольвента и методы ее построения

Во введении мы напомнили определение канонической (вялой) резольвенты Воскресенского для алгебраического k-тора T с минимальным полем разложения L, $\Pi = Gal(L/k)$. Кратко опишем алгебраический способ ее нахождения, пользуясь следующим соглашением: для всякого Π-модуля M будем обозначать через $\widehat{M}^0 = \operatorname{Hom}(\widehat{M}, \mathbb{Z})$ двойственный к M Π-модуль.

Имея эпиморфизм Π-модулей $\widehat{S} \twoheadrightarrow \widehat{T}^0$, где $\widehat{S}$ — некоторый пермутационный Π-модуль, рассматриваем гомоморфизмы $\widehat{S}^\pi \to (\widehat{T}^0)^\pi$ для всех подгрупп π группы Π. Добавляя, если необходимо, прямые пермутационные слагаемые к $\widehat{S}$, можно добиться того, что данные отображения станут сюръективными для любой подгруппы π. Тогда рассмотрим точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \widehat{N}^0 \longrightarrow \widehat{S} \longrightarrow \widehat{T}^0 \longrightarrow 0, \tag{3}$$

которая в свою очередь индуцирует точную последовательность когомологий

$$0 \to (\widehat{N}^0)^\pi \to \widehat{S}^\pi \to (\widehat{T}^0)^\pi \to H^1(\pi, \widehat{N}^0) \to 0.$$

А это в свою очередь будет означать, что $H^1(\pi, \widehat{N}^0) = 0, \forall \pi \leqslant \Pi$. Так как

$H^{-1}(\pi,\widehat{N}) = H^1(\pi,\widehat{N}^0) = 0$, то, обратив по двойственности точную последовательность (3), мы получим каноническую резольвенту.

В статье [17] мы обосновали, что для построения канонической резольвенты достаточно проверить условие сюръективности только для подгрупп Π, получающихся в результате работы следующего алгоритма, примененного к $M = \widehat{T}^0$.

Алгоритм 1.1 (оптимальный перебор подгрупп). Пусть M — $\mathbb{Z}$-модуль без кручения конечного ранга, на котором действует конечная группа Π.

i. Для каждого элемента g группы Π находим $\mathbb{Z}$-подмодуль инвариантов $M^{\langle g\rangle}$, создаем из них список $List$.

ii. Пусть $List' = List$, тогда в $List$ добавляем все возможные попарные пересечения элементов списка $List'$. Если множества $List'$ и $List$ совпадают, то переходим к следующему шагу, иначе повторяем шаг **ii**.

iii. Для каждого элемента $K_i \in List$ вычисляем подгруппу $\pi(K_i)$, состоящую из всех элементов группы Π, тривиально действующих на K_i. Получаем список подгрупп $\{\pi(K_i)\}$.

2. Четырехмерные торы

Пусть T — произвольный четырехмерный k-тор с минимальным полем разложения L и $\Pi = Gal(L/k)$. Пусть G — группа разложения тора T, она является конечной подгруппой в $\mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$. Согласно теореме Жордана, G содержится в одной из максимальных конечных подгрупп W в $\mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$. Таких подгрупп конечное число; все они описаны в статье С.С. Рышкова [13]. Если мы построим каноническую резольвенту с вялым модулем $\widehat{N}$ для алгебраического тора с максимальной группой разложения, то ограничение на подгруппу G даст нам каноническую резольвенту и для тора T, а значит, мы вычислим и $H^1(G,\widehat{N})$. Заметим, что нам достаточно рассмотреть неразложимые максимальные подгруппы, так как в противном случае рассматриваемый тор T является прямым произведением торов меньшей размерности, для которых бирациональная классификация уже проведена [2; 9; 11].

В данной работе мы использовали алгебраический способ нахождения канонической резольвенты; мы просто предъявляли соответствующий модуль $\widehat{S}$, доказывая, что он удовлетворяет необходимым требованиям. Кроме того, известный результат [15] (гл. 4, §6) говорит, что p-компонента группы $H^1(G,\widehat{N})$ содержится в группе $H^1(G_p,\widehat{N})$, где G_p — силовская p-подгруппа в G. Таким образом, мы будем рассматривать не сами максимальные подгруппы в $\mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$, а только их силовские подгруппы, выделяя подгруппы с нетривиальным инвариантом, если такие найдутся. Далее для групп, содержащих выделенные подгруппы в качестве силовских, мы будем вычислять одномерные когомологии. Резюмируя все вышесказанное, мы приходим к следующему плану вычисления когомологических бирациональных инвариантов четырехмерных алгебраических торов:

i. рассматриваем все неразложимые максимальные подгруппы в $\mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$, пользуясь классификацией Рышкова;

ii. для их силовских подгрупп строим канонические резольвенты;

iii. для каждой подгруппы π изучаемой силовской группы вычисляем одномерные когомологии $H^1(\pi,\widehat{N})$ средствами гомологической алгебры;

iv. создаем список подгрупп π из пункта **iii** с $H^1(\pi,\widehat{N}) \neq 0$;

v. находим группы, содержащие подгруппы пункта **iv** в качестве силовских, и средствами гомологической алгебры вычисляем одномерные когомологии для них.

Заметим, что в некоторых случаях удалось установить тривиальность основного бирационального инварианта, что означало тривиальность и соответствующего когомологического инварианта.

В обозначениях статьи [13] максимальные конечные подгруппы в $\mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$ являются группами автоморфизмов следующих квадратичных форм:

$$C_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$
$$S_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4,$$
$$T : 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_1x_4 - 4x_2x_3 - 4x_2x_4 + 2x_3x_4,$$
$$P_4 : 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4,$$
$$B : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_3x_4,$$
$$Q_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4.$$

Торы с этими группами разложения будем обозначать так же, как обозначаются сами квадратичные формы, а их группы разложения — W_0, WS, WT, WP, WB и WQ соответственно.

3. Случай C_4

Как известно [12], тор C_4 с кубической решеткой характеров является рациональным и его основной бирациональный инвариант нулевой.

4. Случай S_4

Как и в предыдущем случае, тор S_4 уже был изучен в гораздо более общей ситуации. В совместной работе [7] изучались максимальные торы без аффекта в присоединенных группах типа A_n. Случай $n = 4$ — это и есть случай S_4. Объясним почему. Если G — это внешняя форма типа A_4, а T — максимальный тор без аффекта в G, то $\widehat{T} = I_4 \otimes I_2$, здесь I_i — стандартное обозначение для ядра пополняющего гомоморфизма $\varepsilon : \mathbb{Z}[\mathbf{S}_{i+1}/\mathbf{S}_i] \to \mathbb{Z}$, а группа $\Pi \cong \mathbf{S}_5 \times \mathbf{S}_2$. Пусть $f_1, ..., f_5$ — естественный пермутационный базис для $\mathbb{Z}[\mathbf{S}_5/\mathbf{S}_4]$, а e_1, e_2 — базис $\mathbb{Z}[\mathbf{S}_2]$. Тогда, выбирая в качестве базиса решетки $\widehat{T}$ элементы $(f_1 - f_2) \otimes (e_1 - e_2), (f_2 - f_3) \otimes (e_1 - - e_2), (f_3 - f_4) \otimes (e_1 - e_2), (f_4 - f_5) \otimes (e_1 - e_2)$, вычисляем группу разложения тора T. Эта группа сохраняет квадратичную форму S_4, более того, она совпадает с ее группой целочисленных автоморфизмов. Итак, у торов T и S_4 есть общая группа разложения, а значит, $p(T) = p(S_4)$. В работе [7], показано, что $p(T) = 0$, значит, все когомологические бирациональные инварианты тора S_4 тривиальны.

5. Случай P_4

Данный тор также был изучен ранее. Так как группа WP получается из WS транспонированием ее элементов, то модуль $\widehat{P_4}$ изоморфен $\widehat{S_4}^0$. С другой стороны, для случая S_4 мы показали, что Π-модуль $\widehat{S_4}$ изоморфен решетке корней $Q(A_4)$, на которой действует группа автоморфизмов $A(A_4) \cong \mathbf{S}_5 \times \mathbf{S}_2$. Известно [14], что двойственной к $W(A_4)$-модулю $\widehat{S_4}$ является решетка весов $P(A_4)$, на которой действует группа $W(A_4) \cong \mathbf{S}_5$. Значит, $\widehat{P_4}$ и $P(A_4)$ изоморфны как $\mathbf{S}_5$-модули. Последнее означает, что существует квадратичное расширение F основного поля k такое, что $P_4 \otimes_k F$ можно рассматривать как максимальный тор без аффекта в односвязной полупростой группе типа A_4. Этот случай был изучен Ле Брюном [16]. Он показал нерациональность данного тора, а также тот факт, что он является прямым множителем в рациональном многообразии. Последнее означает тривиальность его когомологических бирациональных инвариантов.

6. Случай T

Пусть $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ — базис решетки $\widehat{T}$ такой, что образ соответствующего матричного представления Π в $\mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$ есть WT. Группа WT порождается следующими элементами:

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Порядок группы WT равен $144 = 2^4 \cdot 3^2$, поэтому имеется две нетривиальные силовские подгруппы: силовская 2-подгруппа $WT_2 = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ и силовская 3-подгруппа $WT_3 = \langle g_4, g_5 \rangle$.

Найдем каноническую резольвенту в случае WT_2. Соответствующий WT_2-модуль рациональных характеров обозначим $\widehat{TS}$. Если действие некоторого элемента из WT_2 на $\widehat{TS}$ задается матрицей g, то действие этого же элемента на двойственном модуле $\widehat{TS}^0$ в двойственном базисе $\chi^1, \chi^2, \chi^3, \chi^4$ задается матрицей, получающейся обращением и транспонированием матрицы g, то есть $(g^t)^{-1}$. Поэтому можем считать, что на $\widehat{TS}^0$ действует группа $WT_2^t = \langle g_1^t, g_2^t, g_3^t \rangle$. Так как орбита второго базисного элемента равна

$$O(\chi^2) = \pm\{\chi^2, (\chi^2 - \chi^3), (\chi^2 - \chi^4), (\chi^1 + \chi^2 - \chi^3 - \chi^4)\}$$

и порождает $\widehat{TS}^0$, то в качестве накрывающего можно взять модуль ранга 8

$$\widehat{S}^0 = \mathbb{Z}[WT_2/\mathrm{Stab}(\chi^1)].$$

Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \widehat{N}^0 \longrightarrow \widehat{S}^0 \xrightarrow{\varphi} \widehat{TS}^0 \longrightarrow 0, \tag{4}$$

причем можно выбрать пермутационный базис $\xi^1, ..., \xi^8$ модуля $\widehat{S}^0$ так, что

$$\varphi(\xi^1) = \chi^2, \varphi(\xi^2) = \chi^2 - \chi^3, \varphi(\xi^3) = \chi^2 - \chi^4, \varphi(\xi^4) = \chi^1 + \chi^2 - \chi^3 - \chi^4,$$

$$\varphi(\xi^5) = -\chi^2, \varphi(\xi^6) = -\chi^2 + \chi^3, \varphi(\xi^7) = -\chi^2 + \chi^4, \varphi(\xi^8) = -\chi^1 - \chi^2 + \chi^3 + \chi^4,$$

и для него элементы g_1^t, g_2^t, g_3^t можно представить подстановками из группы $\mathbf{S}_8$:

$$g_1^t = (18)(26)(37)(45), g_2^t = (18)(27)(36)(45), g_3^t = (1243)(5687).$$

Применяя алгоритм оптимального перебора, получаем 9 подгрупп π. Ниже в таблице представлены вычисления, показывающие, что последовательность (4) удовлетворяет требованиям сюръективности отображений $(\widehat{S}^0)^\pi \to (\widehat{TS}^0)^\pi$:

№ п/п	$\pi \in WT_2^t$	B — базис $(\widehat{TS}^0)^\pi$	Прообраз B в $(\widehat{S}^0)^\pi$
1	$\langle g_1^t, g_2^t\rangle$	$-\chi^1+\chi^3+\chi^4$	$-\xi^4-\xi^5$
2	$\langle g_1^t(g_3^t)^3g_2^t\rangle$	$-\chi^1-2\chi^4$ $-2\chi^2+\chi^3$	$\xi^3+\xi^4$ $\xi^5+\xi^6$
3	$\langle g_1^tg_3^t\rangle$	χ^1 χ^3	$-\xi^2+\xi^4-\xi^5+\xi^7$ $\xi^1+\xi^6$
4	$\langle g_1^tg_2^t, (g_3^t)^2\rangle$	$\chi^1-2\chi^2+\chi^3+\chi^4$	$\xi^1-\xi^2-\xi^3+\xi^4+\xi^6+\xi^7$
5	$\langle g_1^t(g_3^t)^2g_2^t\rangle$	$\chi^1-\chi^2+\chi^3$ $-\chi^2+\chi^4$	$\xi^1+\xi^2+\xi^4+\xi^5+2\xi^6+\xi^8$ ξ^7
6	$\langle g_1^tg_2^t, g_2^tg_3^t\rangle$	χ^1	$\xi^1+\xi^4+\xi^6+\xi^7$
7	$\langle g_1^t(g_3^t)^2g_2^t\rangle$	$\chi^1-2\chi^3$ $-\chi^3+\chi^4$	$-\xi^3+\xi^4+\xi^5-\xi^6$ $\xi^2+\xi^7$
8	$\langle g_1^tg_2^t, g_3^t\rangle$	$\chi^1+4\chi^2-2\chi^3-2\chi^4$	$\xi^1+\xi^2+\xi^3+\xi^4$
9	$\langle g_2^t, g_1^tg_3^t\rangle$	$\chi^1-2\chi^3$	$\xi^2+\xi^4+\xi^5+\xi^7$

Переходя к точной последовательности двойственных модулей, получаем каноническую резольвенту:

$$0 \longrightarrow \widehat{TS} \xrightarrow{\varphi^*} \widehat{S} \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow 0, \tag{5}$$

здесь $\varphi^*(\chi_i)=\chi_i\circ\varphi$. Найдем базис $\varphi^*(\widehat{TS})$:

$$\varphi^*(\chi_1)=\xi_4-\xi_8, \varphi^*(\chi_2)=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4-\xi_5-\xi_6-\xi_7-\xi_8,$$

$$\varphi^*(\chi_3)=-\xi_2-\xi_4+\xi_6+\xi_8, \varphi^*(\chi_4)=-\xi_3-\xi_4+\xi_7+\xi_8.$$

Следовательно, $\varphi^*(\widehat{TS})=\langle \xi_4-\xi_8, \xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4-\xi_5-\xi_6-\xi_7-\xi_8, -\xi_2-\xi_4+\xi_6+ +\xi_8, -\xi_3-\xi_4+\xi_7+\xi_8\rangle = \langle \xi_1-\xi_5, \xi_2-\xi_6, \xi_3-\xi_7, \xi_4-\xi_8\rangle$. Ввиду точности последовательности (5), $\widehat{N}\simeq \widehat{S}/\varphi^*(\widehat{TS})$. Возьмем в качестве базиса $\widehat{S}=\langle \xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4,\xi_1- -\xi_5,\xi_2-\xi_6,\xi_3-\xi_7,\xi_4-\xi_8\rangle$, тогда $\widehat{N}=\langle[\xi_1],[\xi_2],[\xi_3],[\xi_4]\rangle$, где $[\xi_i], i=1...4$ — классы смежности соответствующих элементов. Покажем, что $\widehat{N}$ является пермутационным WT_2-модулем:

$$g_1[\xi_1]=[g_1\xi_1]=[\xi_8]=[\xi_4], g_1[\xi_2]=[\xi_6]=[\xi_2], g_1[\xi_3]=[\xi_7]=[\xi_3], g_1[\xi_4]=[\xi_5]=[\xi_1],$$

$$g_2[\xi_1]=[\xi_8]=[\xi_4], g_2[\xi_2]=[\xi_7]=[\xi_3], g_2[\xi_3]=[\xi_6]=[\xi_2], g_2[\xi_4]=[\xi_5]=[\xi_1],$$

$$g_3[\xi_1]=[\xi_2], g_3[\xi_2]=[\xi_4], g_3[\xi_3]=[\xi_1], g_3[\xi_4]=[\xi_3].$$

Таким образом, $[\widehat{N}]=0$, а соответствующие когомологические бирациональные инварианты нулевые.

Найдем каноническую резольвенту в случае WT_3. Соответствующий WT_3-модуль рациональных характеров обозначим $\widehat{TS}$. На $\widehat{TS}^0$ действует группа $WT_3^t=\langle g_4^t, g_5^t\rangle$. Пусть $\chi^1,\chi^2,\chi^3,\chi^4$ — двойственный базис $\widehat{T}^0$. Так как орбиты элементов $\chi^1, -\chi^1+\chi^2$ и $-\chi^1-\chi^2+\chi^3$ соответственно равны

$$O(\chi^1)=\{\chi^1,\chi^2,-\chi^3,-\chi^4,-\chi^1+\chi^3,-\chi^1+\chi^4,-\chi^2+\chi^3,-\chi^2+\chi^4,\chi^1+\chi^2-\chi^3-\chi^4\},$$

$$O(-\chi^1+\chi^2)=\{-\chi^1+\chi^2,-\chi^1+\chi^2+\chi^3,\chi^1-\chi^3-\chi^4\},$$

$$O(-\chi^1-\chi^2+\chi^3)=\{-\chi^1-\chi^2+\chi^3,-\chi^3+\chi^4,\chi_1+\chi^2-\chi^4\},$$

то они порождают $\widehat{TS}^0$. Тогда в качестве накрывающего можно взять модуль ранга 15

$$\widehat{S}^0 = \mathbb{Z}[WT_3/\mathrm{Stab}(\chi^1)] \oplus \mathbb{Z}[WT_3/\mathrm{Stab}(-\chi^1+\chi_2)] \oplus \mathbb{Z}[WT_3/\mathrm{Stab}(-\chi^1-\chi^2+\chi^3)].$$

Имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow \widehat{N}^0 \longrightarrow \widehat{S}^0 \xrightarrow{\varphi} \widehat{TS}^0 \longrightarrow 0, \tag{6}$$

причем можно выбрать пермутационный базис $\xi^1, ..., \xi^{15}$ модуля $\widehat{S}^0$ так, что

$$\varphi(\xi^1) = \chi^1, \varphi(\xi^2) = \chi^2, \varphi(\xi^3) = -\chi^3, \varphi(\xi^4) = -\chi^4, \varphi(\xi^5) = -\chi^1 + \chi^4,$$
$$\varphi(\xi^6) = -\chi^2 + \chi^4, \varphi(\xi^7) = -\chi^2 + \chi^3, \varphi(\xi^8) = -\chi^1 + \chi^3, \varphi(\xi^9) = \chi^1 + \chi^2 - \chi^3 - \chi^4,$$
$$\varphi(\xi^{10}) = -\chi^1 + \chi^2, \varphi(\xi^{11}) = \xi^1 - \chi^3 - \chi^4, \varphi(\xi^{12}) = -\chi^2 + \chi^3 + \chi^4,$$
$$\varphi(\xi^{13}) = -\chi^1 - \chi^2 + \chi^3, \varphi(\xi^{14}) = -\chi^3 + \chi^4, \varphi(\xi^{15}) = \chi^1 + \chi^2 - \chi^4,$$

и для него g_4^t, g_5^t можно представить подстановками из группы $\mathbf{S}_{15}$:

$$g_4^t = (1,8,3)(2,4,6)(5,9,7)(10,11,12)(13,14,15),$$
$$g_5^t = (1,5,4)(2,3,7)(6,8,9)(10,11,12)(13,15,14).$$

Алгоритм оптимального перебора дает с точностью до сопряжения две подгруппы π. Ниже в таблице представлены вычисления, показывающие, что последовательность (6) удовлетворяет требованиям сюръективности отображений $(\widehat{S}^0)^\pi \to (\widehat{TS}^0)^\pi$:

№ п/п	$\pi \in WT_3^t$	B — базис $(\widehat{TS}^0)^\pi$	Прообраз B в $(\widehat{S}^0)^\pi$
1	$\langle g_4^t (g_5^t)^2 \rangle$	$-\chi^1+\chi^2$	ξ^{10}
		$-\chi^1+\chi^3+\chi^4$	$-\xi^{11}$
2	$\langle g_4^t g_5^t \rangle$	$-\chi^1-\chi^2+\chi^3$	ξ^{13}
		$-\chi^1-\chi^2+\chi^4$	$-\xi^{15}$

Переходя к точной последовательности двойственных модулей, получаем каноническую резольвенту:

$$0 \longrightarrow \widehat{TS} \xrightarrow{\varphi^*} \widehat{S} \longrightarrow \widehat{N} \longrightarrow 0, \tag{7}$$

здесь $\varphi^*(\chi_i) = \chi_i \circ \varphi$. Найдем $\varphi^*(\widehat{TS})$:

$$\varphi^*(\chi_1) = \xi_1 - \xi_5 - \xi_8 + \xi_9 - \xi_{10} + \xi_{11} - \xi_{13} + \xi_{15},$$
$$\varphi^*(\chi_2) = \xi_2 - \xi_6 - \xi_7 + \xi_9 + \xi_{10} - \xi_{12} - \xi_{13} + \xi_{15},$$
$$\varphi^*(\chi_3) = -\xi_3 + \xi_7 + \xi_8 - \xi_9 - \xi_{11} + \xi_{12} + \xi_{13} - \xi_{14},$$
$$\varphi^*(\chi_4) = -\xi_4 + \xi_5 + \xi_6 - \xi_9 - \xi_{11} + \xi_{12} + \xi_{14} - \xi_{15}.$$

Следовательно, $\varphi^*(\widehat{TS}) = \langle \xi_1 - \xi_5 - \xi_8 + \xi_9 - \xi_{10} + \xi_{11} - \xi_{13} + \xi_{15}, \xi_2 - \xi_6 - \xi_7 + \xi_9 + \xi_{10} - \xi_{12} - \xi_{13} + \xi_{15}, -\xi_3 + \xi_7 + \xi_8 - \xi_9 - \xi_{11} + \xi_{12} + \xi_{13} - \xi_{14}, -\xi_4 + \xi_5 + \xi_6 - \xi_9 - \xi_{11} + \xi_{12} + \xi_{14} - \xi_{15} \rangle$. Ввиду точности последовательности (7), $\widehat{N} \simeq \widehat{S}/\varphi^*(\widehat{TS})$. Возьмем в качестве базиса $\widehat{S} = \langle \xi_5, ..., \xi_{15}, \varphi^*(\chi_1), \varphi^*(\chi_2), \varphi^*(\chi_3), \varphi^*(\chi_4) \rangle$, тогда $\widehat{N} = \langle [\xi_5], ..., [\xi_{15}] \rangle$, где $[\xi_i], i = 5, ..., 15$, — классы смежности соответствующих элементов. Выясним, как WT_3 действует на $\widehat{N}$:

$$g_4[\xi_5] = [\xi_9], g_4[\xi_6] = [\xi_2] = [\xi_6] + [\xi_7] - [\xi_9] - [\xi_{10}] + [\xi_{12}] + [\xi_{13}] - [\xi_{15}], g_4[\xi_7] = [\xi_5],$$
$$g_4[\xi_8] = [\xi_3] = [\xi_7] + [\xi_8] - [\xi_9] - [\xi_{11}] + [\xi_{12}] + [\xi_{13}] - [\xi_{14}], g_4[\xi_9] = [\xi_7], g_4[\xi_{10}] = [\xi_{11}],$$

$$g_4[\xi_{11}] = [\xi_{12}], g_4[\xi_{12}] = [\xi_{10}], g_4[\xi_{13}] = [\xi_{14}], g_4[\xi_{14}] = [\xi_{15}], g_4[\xi_{15}] = [\xi_{13}],$$
$$g_5[\xi_5] = [\xi_4] = [\xi_5] + [\xi_6] - [\xi_9] - [\xi_{11}] + [\xi_{12}] + [\xi_{14}] - [\xi_{15}], g_5[\xi_6] = [\xi_8],$$
$$g_5[\xi_7] = [\xi_2] = [\xi_6] + [\xi_7] - [\xi_9] - [\xi_{10}] + [\xi_{12}] + [\xi_{13}] - [\xi_{15}], g_5[\xi_8] = [\xi_9], g_5[\xi_9] = [\xi_6],$$
$$g_5[\xi_{10}] = [\xi_{11}], g_5[\xi_{11}] = [\xi_{12}], g_5[\xi_{12}] = [\xi_{10}], g_5[\xi_{13}] = [\xi_{15}], g_5[\xi_{14}] = [\xi_{13}],$$
$$g_5[\xi_{15}] = [\xi_{14}].$$

Найдем его бирациональный инвариант $H^1(WT_3, \widehat{N})$. Воспользуемся последовательностью "ограничение-инфляция":

$$0 \longrightarrow H^1(WT_3/\langle g_4\rangle, \widehat{N}^{\langle g_4\rangle}) \xrightarrow{Inf} H^1(WT_3, \widehat{N}) \xrightarrow{Res} H^1(\langle g_4\rangle, \widehat{N}).$$

Так как $H^1(\langle g_4\rangle, \widehat{N}) = 0$ в силу вялости модуля $\widehat{N}$, и $WT_3/\langle g_4\rangle \cong \langle g_5\rangle$, имеем

$$H^1(\langle g_5\rangle, \widehat{N}^{\langle g_4\rangle}) \cong H^1(WT_3, \widehat{N}).$$

Решая уравнение $g_4\alpha = \alpha$, находим базис инвариантного $\mathbb{Z}$-подмодуля:

$$\widehat{N}^{\langle g_4\rangle} = \langle \tau_1 = [\xi_5] + [\xi_7] + [\xi_9], \tau_2 = [\xi_{10}] + [\xi_{11}] + [\xi_{12}], \tau_3 = [\xi_{13}] + [\xi_{14}] + [\xi_{15}],$$
$$\tau_4 = [\xi_8] - [\xi_9] - [\xi_{11}] + [\xi_{13}], \tau_5 = [\xi_6] - [\xi_8] - [\xi_{10}] + [\xi_{14}]\rangle.$$

Имеем следующее действие g_5 на $\widehat{N}^{\langle g_4\rangle}$:

$$g_5(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5) = (\tau_1 + 2\tau_2 - 2\tau_3 + 3\tau_4 + 3\tau_5, \tau_2, \tau_3, -\tau_2 + \tau_3 - \tau_4 - \tau_5, \tau_4).$$

Так как $\langle g_5\rangle$ циклическая, то $H^1(\langle g_5\rangle, \widehat{N}^{\langle g_4\rangle}) \cong H^{-1}(\langle g_5\rangle, \widehat{N}^{\langle g_4\rangle}) \cong Ker(g_5^2 + g_5 + + e)/Im(g_5 - e)$. Вычисления приводят к результатам:

$$Ker(g_5^2 + g_5 + e) = Im(g_5 - e) = \langle \tau_2 - \tau_3 + 3\tau_4, \tau_4 - \tau_5\rangle.$$

Следовательно, $H^1(WT_3, \widehat{N}) \cong H^1(\langle g_5\rangle, \widehat{N}^{\langle g_4\rangle}) = 0$.

7. Случай B

Пусть $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ — базис решетки $\widehat{B}$ такой, что образ соответствующего матричного представления Π в $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$ есть WB. Группа WB порождается следующими элементами

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, g_6 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Порядок WB равен $288 = 2^5 \cdot 3^2$, поэтому имеется две нетривиальные силовские подгруппы: силовская 2-подгруппа $WB_2 = \langle g_1, g_2, g_3, g_4\rangle$ и силовская 3-подгруппа $WB_3 = \langle g_5, g_6\rangle$. Проведя вычисления, аналогичные предыдущему случаю, можно убедиться, что для каждой из подгрупп WB_2 и WB_3 вялый модуль $\widehat{N}$ является пермутационным WB_2- и WB_3-модулем соответственно. А значит, когомологические инварианты тривиальны.

8. Случай Q_4

В статье [13] последняя неразложимая максимальная группа — это группа целочисленных автоморфизмов квадратичной формы:

$$Q_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4.$$

Эта группа имеет порядок $|WQ| = 2^7 \cdot 3^2$. В статье [9] рассмотрена другая максимальная конечная подгруппа WF в $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$ того же порядка, сохраняющая квадратичную форму

$$F_4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Эта группа является точным целочисленным представлением группы Вейля системы корней типа F_4, вычисленным в базисе стандартной решетки L_2 (см. [14]), которая и является решеткой корней (= решеткой весов) для F_4. Группы WQ и WF целочисленно эквивалентны. В статье [17] полностью изучен случай WF. Таким образом, случай Q_4 рассмотрен и с учетом результатов работы [9] о трехмерных алгебраических торах мы можем приступить к формулировке основного результата работы. Прежде примем следующее соглашение. Каждой матрице из $O(4, \mathbb{Z})$ поставим в соответствие четырехмерный массив, каждый элемент которого показывает, на каком месте в соответствующем столбце матрицы стоит ± 1. Через τ обозначим такую матрицу $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, а через $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ обозначим матрицу перехода от базиса стандартной решетки L_0 к базису стандартной решетки L_2. Покажем на примере, как по обозначению в нижеследующей теореме восстановить элемент WF.

$$(-2\,4\,3\,1)\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = A \mapsto T^{-1}AT =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in WF.$$

Теорема. Пусть T — четырехмерный алгебраический k-тор с группой разложения W, X — гладкая проективная модель тора T, $\overline{X} = X \otimes k_s$. Тогда
i. когомологический бирациональный инвариант $H^1(W, \operatorname{Pic} \overline{X}) = \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда, когда

i.i. тор $T = T_1 \times_k T_3$, где T_1 — произвольный одномерный k-тор, а T_3 — трехмерный k-тор, группа разложения которого целочисленно эквивалентна одной из следующих групп:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

или

i.ii. группа W целочисленно эквивалентна одной из следующих групп в обозначениях соглашения выше

№ п/п	Порядок подгруппы W	Система образующих W
1	4	$(-1-234), (-12-3-4)$
2	4	$(-12-34), (-1432)$
3	8	$(-12-34), (1-23-4), (-1432)$
4	8	$(-143-2), (-12-34)$
5	8	$(-12-34), (1432), (-1-23-4)$
6	8	$(1-4-32), (-1-2-34)$
7	8	$(34-1-2), (-12-34)$
8	16	$(-143-2), (123-4), (-12-34)$
9	16	$(-2341), (1-23-4)$
10	16	$(34-1-2), (-1432), (-12-34)$
11	16	$(34-1-2), (-1-234), (-21-43)$
12	16	$(-2341), (14-32)$
13	32	$(-2341), (-1432), (1-23-4)$
14	48	$(2431) \cdot \tau, (-1-234)$
15	48	$(-2341), \tau$
16	96	$(-12-34) \cdot \tau, (-2341)$

ii. когомологический бирациональный инвариант $H^1(W, \operatorname{Pic} \overline{X}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда, когда группа W целочисленно эквивалентна одной из следующих групп в обозначениях соглашения выше

№ п/п	Порядок подгруппы W	Система образующих W
1	8	$(34-1-2), (2-1-43)$
2	24	$(2-4-31) \cdot \tau, (-3-412)$

iii. в остальных случаях $H^1(W, \operatorname{Pic} \overline{X}) = 0$.

Авторы статьи благодарят В.Е. Воскресенского за постоянное внимание и поддержку, а также Б.Э. Кунявского за полезные замечания и исправления.

Литература

[1] Borel A. Linear algebraic groups. N. Y.; Amsterdam, 1969.

[2] Воскресенский В.Е. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.

[3] Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп. М.: МЦНМО, 2009.

[4] Rubin K., Silverberg A. Algebraic tori in cryptography, in High Primes and Misdemeanours: lectures in honour of the 60th birthday of Hugh Cowie Williams, American Mathematical Society, Providence: Fields Institute Communications Series; Rhoad Island. 2004. P. 317–326.

[5] Rubin K., Silverberg A. Torus-Based Cryptography // Advances of Cryptology — Crypto 2003, Lecture Notes in Computer Science 2729, Springer. 2003. P. 349–365.

[6] Dijk M. van, Woodruff D. Asymptotically Optimal Communication for Torus-Based Cryptography, M. Franklin (Ed.): CRYPTO 2004, Lecture Notes in Computer Science 3152. 2004. Springer. P. 157–178.

[7] Воскресенский В.Е., Кунявский Б.Э. О максимальных торах в полупростых алгебраических группах // Деп. в ВИНИТИ, 1984. № 1269.
[8] Клячко А.А. Прямые слагаемые перестановочных модулей и бирациональная геометрия. Арифметика и геометрия многообразий. Самара, 1992.
[9] Попов С.Ю. Решетки Галуа и их бирациональные инварианты // Вестник Самарского государственного университета. 1998. № 4(10). С. 71–83.
[10] Белова Л.А. Модули четверной группы Клейна и их когомологические инварианты // Вестник Самарского государственного университета. 2008. № 6(65). С. 59–70.
[11] Кунявский Б.Э. О трехмерных алгебраических торах // Исследования по теории чисел. Саратов: СГУ, 1987. С. 90–111.
[12] Воскресенский В.Е. Проективные инвариантные модели Демазюра // Известия АН СССР. Сер. Математическая, 1982. Т. 46. Вып. 2. С. 195–210.
[13] Рышков С.С. Максимальные конечные подгруппы целочисленных $n \times n$ матриц // Труды МИАН им. В.А. Стеклова, 1972. Т. 128. С. 183–211.
[14] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Системы корней. М.: Мир, 1972.
[15] Алгебраическая теория чисел // под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха. М.: Мир, 1969.
[16] Le Bruyn L. Generic norm one tori // Nieuw Arch. Wiskd. IV. 1995. Ser. 13. P. 401–407.
[17] Крутиков Ю.Ю. Бирациональные инварианты тора без аффекта в исключительной группе типа F4 // Вестник Самарского государственного университета. 2009. № 6(72). С. 57–68.

Поступила в редакцию 26/*VI*/2010;
в окончательном варианте — 26/*VI*/2010.

THE COHOMOLOGICAL BIRATIONAL INVARIANTS FOR 4-DIMENSIONAL TORI

© 2011 Yu.Yu. Krutikov[3] S.Yu. Popov[4]

This paper is the first systematic step to obtain the birational classification of 4-dimensional tori. All the cohomological birational invariants of this tori are calculated. All the 4-dimensional tori with nontrivial invariants are described.

Key words: algebraic torus, birational invariant, cohomology, flasque resolution, birational classification.

Paper received 26/*VI*/2010.
Paper accepted 26/*VI*/2010.

[3]Krutikov Yuri Yurievich (yuri820710@mail.ru), Laboratory of Mathematical Methods for Information Security, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.
[4]Popov Sergey Yurievich (popov160575@yandex.ru), the Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.