УДК 517.51:517.98

ФРЕЙМЫ ЭКСПОНЕНТ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

© 2011 Е.С. Голубева[1]

В статье рассматриваются системы экспонент со степенным весом вида $\left(g\left(x\right)\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, где $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Найдены условия на функцию $g\left(x\right)$, а также на последовательность $\left(\lambda_n\right)_{n\in Z}$, для того чтобы система $\left(g\left(x\right)\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ была полной, бесселевой, фреймовой последовательностью, а также базисом Шаудера.

Ключевые слова: бесселева последовательность, фрейм, система экспонент с весом, полные системы.

Введение

В данной работе изучаются свойства систем экспонент с весом в гильбертовом пространстве H. В первой части статьи рассматриваются системы в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Вторая часть посвящена системам экспонент $\left(\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L_2\left(I\right)$, на отрезке I. В третьей части рассматриваются весовые экспоненты $\left(\mid x\mid^{\alpha}\exp^{inx}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$.

1. Системы экспонент в пространстве $\mathbb{C}^N$

Напомним определение фрейма. Пусть H — гильбертово пространство.

Определение 1.1 [4]. Набор векторов $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из H называется фреймом, если существуют константы $A, B > 0$ такие, что для любого $f \in H$ выполняются следующие неравенства:

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |< f, f_k >|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

Числа A и B называются границами фрейма. Наибольшая из нижних границ называется оптимальной нижней границей, а наименьшая из верхних границ — оптимальной верхней границей. Если $A = B$, то фрейм называется жестким, а если $A = B = 1$, то фреймом Парсеваля — Стеклова. Если ограничиться только верхней оценкой в определении фрейма, то мы получим определение бесселевой последовательности.

В этом параграфе рассматривается N-мерное пространство $\mathbb{C}^N$. В конечномерном пространстве любая полная система является фреймом [1]. Отсутствие

[1]Голубева Екатерина Сергеевна (`depcy@yandex.ru`), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

в определении фрейма линейной независимости позволяет строить так называемые переполненные системы, то есть фреймы с большим количеством элементов, чем размерность пространства. Рассмотрим набор векторов $E_m(n) = (E_m(0), E_m(1), \dots, E_m(N-1))$, где $m = 0, 1, \dots, N-1$, определенных следующим образом:

$$E_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \forall n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$E_1(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \frac{2\pi i n}{N}, \forall n = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\dots$$

$$E_{N-1}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \frac{2\pi i n (N-1)}{N}, \forall n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Или сокращенно: $E_m(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp \frac{2\pi i n m}{N}$ $\forall n, m = 0, 1, \dots, N-1$.

Легко доказать, что система $E_0(n), E_1(n), \dots, E_{N-1}(n)$ образует ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}^N$.

Возьмем вектор $g(n) \in \mathbb{C}^N$ и рассмотрим систему вида $(g(n) E_m(n))_{m=0}^{N-1}$, где умножение вектора $g(n)$ на $E_m(n)$ происходит покоординатно. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1.1. Пусть имеется набор $(g(n) E_m(n))_{m=0}^{N-1}$, где $g(n) \in \mathbb{C}^N$. Следующие утверждения эквивалентны:
1) система $(g(n) E_m(n))_{m=0}^{N-1}$ — ортогональный базис $\mathbb{C}^N$;
2) $g(n) \neq 0, \forall n = 0, 1, \dots, N-1$.

Если к тому же $\| g(n) \| = \sqrt{N}$, то $(g(n) E_m(n))_{m=0}^{N-1}$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{C}^N$.

Доказательство.

Докажем, что из 1)$\Longrightarrow$2).
Пусть система $(g(n) E_m(n))_{m=0}^{N-1}$ — ортогональный базис, тогда она является полной системой и $< f(n), g(n) E_m(n) >= 0, \forall m = 0, 1, \dots, N-1 \Longleftrightarrow f(n) = 0, \forall n = 0, 1, \dots, N-1$.
Допустим, что утверждение 2 неверно, то есть $\exists N_1 \in (0, 1, \dots, N-1)$ такое, что $g(N_1) = 0$.

Тогда, взяв в качестве вектора $f = \left(0, 0, \dots, \underbrace{1}_{N_1}, \dots, 0 \right)$, получим, что $\forall m = 0, 1, \dots, N-1$, и выполняется:

$$< f(n), g(n) E_m(n) >= 0.$$

Последнее противоречит тому, что система $(g(n) E_m(n))_{m=0}^{N-1}$ полна. Таким образом, $g(n) \neq 0, \forall n = 0, 1, \dots, N-1$.

Докажем, что из 2)$\Longrightarrow$1).
Пусть $g(n) \neq 0, \forall n = 0, 1, \dots, N-1$. Рассмотрим $\forall m = 0, 1, \dots, N-1$ скалярное произведение:

$$< f(n), g(n) E_m(n) >=< f(n) \bar{g}(n), E_m(n) >= 0,$$

где $f(n) \in \mathbb{C}^N$. В силу того что $(E_m(n))_{m=0}^{N-1}$ — ортонормированный базис, получаем $f(n) \bar{g}(n) = 0, \forall n = 0, 1, \dots, N-1$. Но так как $g(n) \neq 0, \forall n = 0, 1, \dots, N-1$, имеем $f(n) = 0, \forall n = 0, 1, \dots, N-1$. Последнее и означает, что система $(g(n) E_m(n))_{m=0}^{N-1}$ полна в $\mathbb{C}^N$.

Проверим ортогональность системы $(g(n)E_m(n))_{m=0}^{N-1}$.

Действительно, имеем:

$$< g(n)E_m(n), g(n)E_k(n) >= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mid g(n)\mid^2 \exp\frac{2\pi in(m-k)}{N}.$$

Обозначим $g_1 = \max_{n=0,1,\ldots,N-1}(\mid g(n)\mid)$, а $g_2 = \min_{n=0,1,\ldots,N-1}(\mid g(n)\mid)$. Используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\exp\frac{2\pi in(m-k)}{N} = \frac{1}{N}\frac{1-\left(\exp 2\pi i\frac{m-k}{N}\right)^N}{1-\exp 2\pi i\frac{m-k}{N}} = 0.$$

Подставляя полученное в скалярное произведения и заменяя $\mid g(n)\mid$ на максимальное и минимальное значение, получим следующие неравенства:

$$g_2^2\sum_{n=0}^{N-1}\exp\frac{2\pi in(m-k)}{N} \leqslant < g(n)E_m(n), g(n)E_k(n) > \leqslant g_1^2\sum_{n=0}^{N-1}\exp\frac{2\pi in(m-k)}{N},$$

откуда следует, что $< g(n)E_m(n), g(n)E_k(n) >= 0, \forall m,k = 0,1,\ldots,N-1, m \neq k$. К тому же $\parallel gE_m \parallel = 1, \forall m = 0,1,\ldots,N-1. \iff \parallel g \parallel = \sqrt{N}$.

▲

Переполненные жесткие фреймы в пространстве C^N можно получать с помощью проекции ортонормированного базиса из пространства $\mathbb{C}^M$ на $\mathbb{C}^N$, где $M > N$ [4].

Пусть $M > N$, определим векторы $(F_k(n))_{k=0}^{M-1}$ следующим образом:

$$F_k(n) = \frac{1}{\sqrt{M}}\exp\frac{2\pi ikn}{M}, \forall n = 0,1,\ldots,N-1,$$

то есть F_k— проекции ортонормированного базиса E_k из $\mathbb{C}^M$ в $\mathbb{C}^N$. Таким образом $(F_k(n))_{k=0}^{M-1}$ — фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\mathbb{C}^N$, причем выполняется $\parallel F_k(n) \parallel = \sqrt{\frac{N}{M}}$ [1].

Заметим, что в конечномерном пространстве любой набор векторов является бесселевой системой в силу неравенства Коши — Буняковского.

Возьмем $g(n) \in \mathbb{C}^N$ и рассмотрим систему $(g(n)F_k(n))_{k=0}^{M-1}$, справедлива следующая теорема:

Теорема 1.2. Пусть имеется набор $(g(n)F_k(n))_{k=0}^{M-1}$, где $g(n) \in \mathbb{C}^N$. Следующие утверждения эквивалентны:
1) система $(g(n)F_k(n))_{k=0}^{M-1}$ — фрейм в пространстве $\mathbb{C}^N$;
2) $g(n) \neq 0, \forall n = 0,1,\ldots,N-1$.

Доказательство. Доказательство теоремы 1.2 аналогично доказательству теоремы 1.1. Действительно, так как в конечномерном пространстве система является фреймом тогда и только тогда, когда она полна, то для доказательств теоремы 1.2 необходимо доказать эквивалентность того, что система $(g(n)F_k(n))_{k=0}^{M-1}$ полная и $g(n) \neq 0, \forall n = 0,1,\ldots,N-1$. Доказательство данного факта повторяет доказательство теоремы 1.1.

▲

Следствие 1.1. Система $(g(n)F_k(n))_{k=0}^{M-1}$ — фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\mathbb{C}^N \iff \mid g(n)\mid = 1, \forall n = 0,1,\ldots,N-1$.

Действительно, воспользовавшись тем, что $(F_k(n))_{k=0}^{M-1}$ — фрейм Парсеваля — Стеклова в пространстве $\mathbb{C}^N$, получим:

$$\sum_{k=0}^{M-1} |< f(n), g(n) F_k(n) >|^2 = \sum_{k=0}^{M-1} |< f(n)\bar{g}(n), F_k(n) |^2 >= \| f(n) g(n) \|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} | f(n) |^2 | g(n) |^2 .$$

Взяв в качестве $B = \max_{n=0,1,\ldots,N-1} | g(n) |^2$ и $A = \min_{n=0,1,\ldots,N-1} | g(n) |^2$, окончательно имеем:

$$A \| f(n) \|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{M-1} |< f(n), g(n) F_k(n) >|^2 \leqslant B \| f(n) \|^2 .$$

Таким образом, $A = B = 1 \Longleftrightarrow | g(n) | = 1$.

Заметим, что если в качестве веса взять $g(n) = | n |^\alpha, \forall n = 0, 1, \ldots, N-1$, то система $(| n |^\alpha F_k(n))_{k=0}^{M-1}$ — фрейм $\Longleftrightarrow \alpha = 0$.

2. Системы экспонент $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp i\lambda_k x\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2(I)$

Известно, что система экспонент $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp ikx\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$. По определению фрейма сразу получаем, что система $(\exp ikx)_{k\in\mathbb{Z}}$ образует жесткий фрейм в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$ с границами $A = B = 2\pi$.

Рассмотрим систему экспонент более общего вида, а именно возьмем последовательность вещественных чисел $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ и отрезок $I \subset \mathbb{R}$. Если система $\left(\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ образует фрейм в $L^2(I)$, то такая система называется фреймом экспонент или же фреймом Фурье.

Напомним некоторые определения.

Определение 2.1. Число λ называется точкой сгущения последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, если любая окрестность с центром в этой точке содержит элементы последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}} \neq \lambda$. То есть можно записать в виде $\forall\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon)$ такое, что $| \lambda_N - \lambda | < \epsilon$, $\lambda_N \neq \lambda$.

Определение 2.2. Последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ называется отделимой, если $\forall i \neq j$ выполняется $\inf_{i\neq j} | \lambda_i - \lambda_j | > \delta$, где $\delta > 0$.

Определение 2.3. Последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ называется относительно отделимой, если ее можно представить в виде объединения конечного числа отделимых последовательностей.

Для заданной последовательности $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ фреймовый радиус определяется следующим образом: $R(\lambda_k) = \sup(R)$, для которых $(\exp i\lambda_n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм для $L^2(-R,R)$.

Заметим, что если $\left(\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм для $L^2(-R,R)$ для некоторого $R > 0$, то $\left(\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм для $L^2(-R_1,R_1)$, где $R_1 \in (0,R)$. Действительно, если $\left(\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$— фрейм $\forall f(x) \in L^2(-R,R)$, то $\left(\exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм $\forall \tilde{f}(x) = f(x)\chi_{[-R_1,R_1]} \in L^2(-R_1,R_1)$.

Говорят, что отделимая последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет однородную плотность $d > 0$, если существует такое число $L > 0$, что $\mid \lambda_k - \frac{k}{d} \mid\leqslant L, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Попробуем выявить связь между свойствами системы $(\exp i\lambda_n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ и последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность вещественных чисел, тогда следующие утверждения эквивалентны:
1) система $(\exp i\lambda_n x)$— бесселева последовательность в $L^2[-\pi,\pi]$;
2) последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ относительно отделима.

Доказательство.

Докажем, что если $(\exp i\lambda_n x)$ — бесселева последовательность, то $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ относительно отделима. Рассуждаем от противного, допустим, что $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ не является относительно отделимой, т. е. можем выделить такую подпоследовательность Λ_N, в которой будет как минимум N элементов из Λ таких, что $\forall\epsilon > 0$, $\exists\lambda_n \in \Lambda_N :\mid \lambda_n - \lambda \mid< \epsilon$, отсюда следует, что $\parallel \exp i\lambda_n x - \exp i\lambda x \parallel< \epsilon$.
Рассмотрим следующую сумму:

$$\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |< \exp i\lambda x, \exp i\lambda_k x >|^2} \geqslant \sqrt{\sum_{\lambda_k\in\Lambda_N} |< \exp i\lambda x, \exp i\lambda_k x >|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{\lambda_k\in\Lambda_N} |< \exp i\lambda x, \exp i\lambda x - (\exp i\lambda x - \exp i\lambda_k x) >|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{\lambda_k\in\Lambda_N} |< \exp i\lambda x, \exp i\lambda x > - < \exp i\lambda x, \exp \lambda x - \exp i\lambda_k x >|^2} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{N} \parallel \exp i\lambda x \parallel^2 - \parallel \exp i\lambda x \parallel \sqrt{N} \parallel \exp i\lambda x - \exp i\lambda_k x \parallel\geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{N} \parallel \exp i\lambda x \parallel (\parallel \exp i\lambda x \parallel \quad -\epsilon) \longrightarrow \infty, N \longrightarrow \infty.$$

Это противоречит тому, что система является бесселевой, а значит, наше предположение неверно, и последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ относительно отделена. Доказательство обратного утверждения приведено в [1]. В частности, второе утверждение теоремы эквивалентно тому, что $(\exp i\lambda_n x)$— бесселева последовательность в $L^2(I)$ для любого ограниченного интервала $I \subset \mathbb{R}$.

3. Системы весовых экспонент $\left(g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$

Рассмотрим систему $\left(g(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, где в качестве окна возьмем функцию $g(x) =\mid x \mid^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Посмотрим, каким образом значения параметра α влияют на свойства системы $\left(\mid x \mid^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Теорема 3.1. Рассмотрим систему $\left(\mid x \mid^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Справедливы следующие утверждения:
1) система $\left(\mid x \mid^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является полной тогда и только тогда, когда $\alpha > -\frac{1}{2}$;
2) система $\left(\mid x \mid^\alpha \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является бесселевой последовательностью тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant 0$;

3) система $\left(\mid x\mid^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является минимальной тогда и только тогда, когда $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$; и ее биортогональная система удовлетворяет нижнему неравенству в определении фрейма $\Longleftrightarrow 0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$;
4) система $\left(\mid x\mid^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является фреймом тогда и только тогда, когда $\alpha=0$.

Доказательство.

Докажем первое утверждение, заметим, что функция $g\left(x\right)=\mid x\mid^{\alpha}\in L^{2}[-\pi,\pi]$ $\Longleftrightarrow \alpha>-\frac{1}{2}$. Действительно, вычислим квадрат нормы:

$$\parallel g\left(x\right)\parallel_{2}^{2}=\int_{-\pi}^{\pi}\mid x\mid^{2\alpha}dx=\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\mid_{-\pi}^{\pi}<\infty\Longleftrightarrow 2\alpha+1>0\Longleftrightarrow\alpha>-\frac{1}{2}.$$

Проверим полноту системы в этом случае.

Для этого возьмем функцию $f\left(x\right)\in L^{2}[-\pi,\pi]$ такую, что $f\left(x\right)\neq 0$ п. в. и $<f\left(x\right),\mid x\mid^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>=0,\forall n\in\mathbb{Z}$.

Тогда

$$<f\left(x\right),\mid x\mid^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>=<f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>=0.$$

Функция $f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha}\in L^{1}[-\pi,\pi]$, заметим, что $<f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>$ — коэффициенты Фурье функции $f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha}$. В силу единственности коэффициентов Фурье L^{1}-функции имеем, что $f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha}=0$ п. в. Отсюда получаем, что $f\left(x\right)=0$ п. в., таким образом, система $\left(\mid x\mid^{\alpha}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является полной тогда и только тогда, когда $\alpha>-\frac{1}{2}$.

Докажем второе утверждение, для этого рассмотрим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mid<f\left(x\right),\mid x\mid^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>\mid^{2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mid<f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>\mid^{2},$$

используя равенство Парсеваля – Стеклова, и то, что $<f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>$ – коэффициенты Фурье функции $f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha}$, получим:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mid<f\left(x\right)\mid x\mid^{\alpha},\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>\mid^{2}=\int_{-\pi}^{\pi}\mid f\left(x\right)\mid^{2}\mid x\mid^{2\alpha}dx.$$

Функция $\mid x\mid^{2\alpha}$ ограничена сверху на отрезке $[-\pi,\pi]$ константой, отличной от 0 $\Longleftrightarrow\alpha\geqslant 0$, а именно $\mid x\mid^{2\alpha}\leqslant\pi^{2\alpha}$.
В этом случае имеем:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mid<f\left(x\right),\mid x\mid^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>\mid^{2}\leqslant B\parallel f\parallel_{2}^{2},$$

где $B=\pi^{2\alpha}$.

Докажем третье утверждение. Для этого нужно показать, что к системе $\left(f_{n}\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}=\left(\mid x\mid^{\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ существует биортогональная система $\left(\tilde{f}_{n}\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}\in L^{2}[-\pi,\pi]$.

Проверим, что биортогональной системой будет $\left(\tilde{f}_{n}\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{Z}}=$ $=\left(\mid x\mid^{-\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, где $\tilde{g}\left(x\right)=\mid x\mid^{-\alpha}$. Для этого рассмотрим скалярное произведение:

$$<f_{n}\left(x\right),\tilde{f}_{m}\left(x\right)>=\frac{1}{2\pi}<\mid x\mid^{\alpha}\exp inx,\mid x\mid^{-\alpha}\exp imx>=\frac{1}{2\pi}<\exp inx,\exp imx>=\delta_{nm}.$$

Заметим, что функции $\tilde{f}_n(x) \in L^2[-\pi,\pi] \iff \tilde{g}(x) \in L^2[-\pi,\pi]$

$$\| \tilde{g}(x) \|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} | x |^{-2\alpha} \, dx = \frac{| x |^{-2\alpha+1}}{-2\alpha+1} |_{-\pi}^{\pi} < \infty \iff \alpha < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, система $\left(| x |^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является минимальной тогда и только тогда, когда $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Рассмотрим

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f, | x |^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^2 | x |^{-2\alpha} .$$

Так как на отрезке $[-\pi,\pi]$ функция $| x |^{-2\alpha}$ ограничена снизу константой, отличной от $0 \iff 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, а именно $A = \pi^{-2\alpha}$, то имеем:

$$A \| f \|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f, | x |^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >|^2 .$$

Таким образом, биортогональная система удовлетворяет нижнему неравенству в определении фрейма.

Заметим, что $A \leqslant | x |^{2\alpha} \leqslant B \iff \alpha = 0$. Таким образом, система $\left(| x |^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp 2\pi inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является фреймом тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. ▲

Замечание.

Тот факт, что система $\left(| x |^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ при $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$ — базис Шаудера, является классическим результатом К.И. Бабенко [3].

Теперь в качестве веса возьмем функцию $g(x) = | x + a |^{\alpha}$, где $| a | > \pi$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Система $\left(| x + a |^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является полной, минимальной, фреймовой последовательностью, базисом Шаудера $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ в пространстве $L^2[-\pi,\pi]$.

Доказательство.

Заметим, что $g(x) = | x + a |^{\alpha} \in L^2[-\pi,\pi]$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Действительно:

$$\| g(x) \|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} | x + a |^{2\alpha} \, dx = \frac{(x+a)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} |_{-\pi}^{\pi} < \infty$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Проверим полноту данной системы, для этого возьмем $f \in L^2[-\pi,\pi]$, для которой $< f(x), | x + a |^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >= 0, \forall n \in \mathbb{Z}$.

$$< f(x), | x + a |^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >=< f(x) | x + a |^{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx > .$$

В силу единственности коэффициентов Фурье функции $f(x) | x + a |^{\alpha} \in L^1[-\pi,\pi]$ имеем, что $f(x) = 0$ п. в., таким образом система является полной. Проверим, будет ли система фреймом, для этого рассмотрим:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), | x + a |^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x) | x + a |^{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >|^2,$$

в силу того, что $< f(x) \mid x+a \mid^{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >$ — коэффициенты Фурье функции $f(x) \mid x+a \mid^{\alpha}$, используя равенство Парсеваля — Стеклова, получим:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x) \mid x+a \mid^{\alpha}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \mid f(x) \mid^2 \mid x+a \mid^{2\alpha} dx.$$

Так как функция $\mid x+a \mid^{2\alpha}$ на $[-\pi,\pi]$ ограничена и сверху и снизу константами, отличными от 0 для всех α, то имеем следующее:

$$A \parallel f(x) \parallel^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), \mid x+a \mid^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >|^2 \leqslant B \parallel f(x) \parallel^2 .$$

Проверим минимальность системы $\left(\mid x+a \mid^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. Заметим, что биортогональной системой будет $\left(\tilde{f}_n(x)\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\mid x+a \mid^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, в самом деле:

$$< f_n, \tilde{f}_m > = \frac{1}{2\pi} <\mid x+a \mid^{\alpha} \exp inx, \mid x+a \mid^{-\alpha} \exp imx > = \frac{1}{2\pi} < \exp inx, \exp imx > = \delta_{nm}.$$

При этом $\parallel \tilde{f}_n(x) \parallel^2 = \parallel \mid x+a \mid^{-\alpha} \parallel = \int_{-\pi}^{\pi} \mid x+a \mid^{-2\alpha} dx < \infty$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом, система $\left(\mid x+a \mid^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является минимальной, легко проверяется, что биортогональная система также будет являться фреймом.

Проверим, будет ли система $\left(\mid x+a \mid^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ базисом Шаудера. Так как для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ данная система является и полной и минимальной, то по критерию базисности [6] нужно проверить следующее неравенство:

$$\parallel \sum_{n\in\mathbb{Z}} < f(x), \tilde{f}_n(x) > f_n(x) \parallel \leqslant M \parallel f(x) \parallel,$$

$\forall f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$. Заметим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), \tilde{f}_n(x) > f_n(x) \mid^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), \mid x+a \mid^{-\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx >\mid x+a \mid^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx \mid^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \mid\mid x+a \mid^{\alpha} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x) \mid x+a \mid^{-\alpha}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx \mid^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \mid\mid x+a \mid^{2\alpha} \mid f(x) \mid^2 \mid x+a \mid^{-2\alpha} dx = \parallel f \parallel^2 .$$

Для оценки мы использовали неравенство Бесселя ($\sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x) \mid x+a \mid^{-\alpha}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx$ — ряд Фурье функции $f(x) \mid x+a \mid^{-\alpha} \in L^1[-\pi,\pi]$, он сходится к $f(x) \mid x+a \mid^{-\alpha}$). Таким образом, система $\left(\mid x+a \mid^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ являтся базисом Шаудера для любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

▲

Теорема 3.3. Система $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}\setminus(0)}$ является полной, минимальной, бесселевой последовательностью, не является базисом Шаудера.

Доказательство. Докажем, что $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}\setminus(0)}$ является полной, для этого возьмем функцию $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$ такую, что $f(x)\neq 0$ п. в., для которой $<f(x), \mid x\mid \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>=<f(x)\mid x\mid, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx>=0, \forall n\neq 0$. В силу единственности коэффициентов Фурье функции $f(x)x\in L^1[-\pi,\pi]$ получим, что $xf(x)=c\Rightarrow f(x)=\frac{c}{x}$. Но так как функция $\frac{c}{x}\notin L^2[-\pi,\pi]$, то в силу того, что $f(x)\in L^1[-\pi,\pi]$, имеем, что $c=0$, а значит, $f(x)=0$ п. в. Это и доказывает, что система является полной.

Докажем, что $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}\setminus(0)}$ является бесселевой, для этого для любой функции $f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим

$$\sum_{n\neq 0}|<f(x), x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx)>|^2\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}|<f(x), x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx)>|^2=$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|<f(x)x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx)>|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\mid f\mid^2\mid x\mid^2\leqslant B\parallel f\parallel^2 .$$

В данной оценке использовали равенство Парсеваля — Стеклова и то, что функция $\mid x\mid^2$ на $[-\pi,\pi]$ ограничена сверху константой, отличной от 0, а именно $B=\pi^2$.

Теперь проверим минимальность, для этого в качестве биортогональной последовательность возьмем следующую: $\left(\tilde{f}_n(x)\right)_{\forall n\neq 0}=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\exp inx-1}{x}\right)_{\forall n\neq 0}$. Проверим биортогональность, для этого для любого $n\neq 0$ распишем:

$$\frac{1}{2\pi}<x\exp inx, \frac{\exp imx-1}{x}>=\frac{1}{2\pi}<\exp(inx),\exp imx>-\frac{1}{2\pi}<\exp inx, 1>=\delta_{nm}.$$

Проверим, что $\tilde{f}_n(x)\in L^2[-\pi,\pi]$.

$$\parallel\tilde{f}_n\parallel^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mid\frac{\exp inx-1}{x}\mid^2 dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{x^2}\left(\cos^2(nx)+\sin^2(nx)+1-2\cos nx\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(2-2\cos nx)}{x^2}dx=\frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos nx}{x^2}dx=$$

$$=\frac{4}{2\pi}(1-\cos nx)\left(-\frac{1}{x}\right)|_0^{\pi}+\frac{8\pi n}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{x}dx=\frac{8}{2\pi}(-1)^n-\frac{8}{2\pi}+\frac{8}{2\pi}\pi n\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{x}dx<\infty.$$

Таким образом, $\tilde{f}_n(x)\in L^2[-\pi,\pi]$.

Докажем, что данная система не является базисом Шаудера. Будем рассуждать от противного, допустим, что $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}\setminus(0)}$ является базисом Шаудера, при этом данная система является равномерно ограниченной, отсюда следует, что биортогональная система тоже должна быть равномерно ограниченной, но это не так, действительно, так как $\int_0^{\pi}\frac{sinnx}{x}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$, при $n\longrightarrow\infty$, то получаем что $\parallel\tilde{f}_n(x)\parallel\longrightarrow\infty$ при $n\longrightarrow\infty$. Таким образом, наше предположение неверно, система $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}\setminus(0)}$ не является базисом Шаудера.

▲

Замечание. Теорема 3.3. справедлива и в том случае, если мы убираем любой элемент из системы $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Действительно, уберем k-й элемент, то есть рассмотрим систему $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\neq k}$. Докажем, что она полна, для этого возьмем функцию $f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$, $f(x) \neq 0$ такую, что $< f(x), x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx >= =< xf(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx >= 0, \forall n \neq k$. В силу единственности коэффициентов Фурье L^1-функции $xf(x)$ имеем

$$xf(x) = \frac{c_k}{\sqrt{2\pi}}\exp ikx,$$

$$f(x) = \frac{c_k \exp ikx}{\sqrt{2\pi}x}.$$

Подсчитаем норму функции $f(x)$:

$$\| f(x) \|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{| c_k |^2 | \exp ikx |^2}{x^2}dx = \frac{| c_k |^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx}{x^2} = \infty.$$

Так как $f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$, то $c_k = 0$, следовательно, $f(x) = 0$ п. в.

Проверим, будет ли система бесселевой, для этого для любой функции $f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$ рассмотрим

$$\sum_{n\neq k} |< f(x), x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx) >|^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx) >|^2 =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x)x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(inx) >|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} | f(x) |^2 | x |^2 \leqslant B \| f(x) \|^2$$

в силу равенства Парсеваля — Стеклова и того, что функция $| x |^2$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ ограничена сверху константой, отличной от 0, а именно $B = \pi^2$.

Проверим минимальность, для этого в качестве биортогональной возьмем следующую систему:

$$\left(\tilde{f}_n(x)\right)_{n\neq k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\exp inx - \exp ikx}{x}\right)_{n\neq k}.$$

Для любых $n, m \neq k$ рассмотрим скалярное произведение:

$$\frac{1}{2\pi} < \frac{\exp inx - \exp ikx}{x}, \exp imx >= \frac{1}{2\pi} < \exp inx, \exp imx > -\frac{1}{2\pi} < \exp ikx, \exp imx >= \delta_{nm}.$$

Проверим, будет ли $\tilde{f}_n(x) \in L^2[-\pi,\pi]$.

$$\| \tilde{f}_n(x) \|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{| \exp 2\pi inx - \exp ikx |^2}{x^2} = \frac{4}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(n-k)x}{x^2}dx =$$

$$= \frac{-8}{2\pi}(1-\cos(n-k)\pi) + \frac{8}{2\pi}\pi(n-k)\int_0^{\pi}\frac{\sin(n-k)x}{x} < \infty.$$

Таким образом, система $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp inx\right)_{n\neq k}$ являетя минимальной. Рассуждая аналогично, как и в доказательстве теоремы 3.2, получим, что данная система не является базисом Шаудера.

Заключение

В конце статьи хотелось бы перечислить ряд вопросов, требующих дальнейшего исследования: будет ли система $(\exp i\lambda_n x)$ бесселевой в $L^2[-\pi,\pi]$, если она удовлетворяет нижнему неравенству в определении фрейма, и как изменятся свойства системы $\left(x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp 2\pi inx\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, если уберем из нее конечное число элементов.

Литература

[1] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2002.

[2] Heil C., Kutyniok G. Density of frames and Shauder bases of windowed exponentials // Houston Jornal of Mathematics. 2008. Vol. 34. № 2.

[3] Бабенко К.И. О сопряженных функциях // Доклады Академии наук СССР. 1948. Вып. 62. № 2.

[4] Кашин Б.С., Куликова Т.Ю. Замечание об аппроксимационных свойствах фреймов общего вида // Матем. заметки. 2002. Т. 72. Вып. 2. С. 312–315.

[5] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.

[6] Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ, 2008.

Поступила в редакцию 10/*III*/2011;
в окончательном варианте — 22/*III*/2011.

THE SYSTEM OF WEIGHTED EXPONENTIALS WITH POWER WEIGHTS

© 2011 E.S. Golubeva[2]

The system of weighted exponentials $\left(| x |^\alpha \exp^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ with power weights is considered in this paper, where $\lambda_n \in \mathbb{R}$. We find conditions on power indicator α which provide such properties of the system as to be a frame, Bessel system, Schauder basis in the space $L^2[-\pi,\pi]$.

Key words: Bessel sequence, frame, system of weighted exponentials, complete systems.

Paper received 10/*III*/2011.
Paper accepted 22/*III*/2011.

[2]Golubeva Ekaterina Sergeevna (`depcy@yandex.ru`), the Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.