МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© 2011 А.А. Абашкин[1]

Для вырождающегося эллиптического уравнения в полуполосе исследована нелокальная задача, краевые условия которой существенно зависят от изменения коэффициента уравнения при младшей производной.

Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, уравнение Бесселя, базис Рисса, равномерная сходимость ряда.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y}u_y - b^2u = 0 \tag{1.1}$$

в полуполосе $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ y > 0\}$. Для уравнения (1.1) поставим следующую задачу.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям

$$u(x,y) \in C^1(D \cup \{x=0, y>0\}) \cap C^2(D); \tag{1.2}$$

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = 0, \quad \lim_{y\to\infty} u(x,y) = 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{-1}u_y(x,y) = \nu(x), \qquad 2p < -1, \tag{1.4}$$

$$\lim_{y\to 0+} \left(y^{-1}\frac{u_y(x,y)}{\ln(y)} \right) = \nu(x), \qquad 2p = -1, \tag{1.5}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p}u_y(x,y) = \nu(x), \qquad 2p > -1. \tag{1.6}$$

Заметим, что в работе Е.И. Моисеева [1] для уравнения (1.1) исследована аналогичная задача, но условия (1.4)–(1.6) имеют другой вид.

[1]Абашкин Антон Александрович (samcocaa@rambler.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Отметим также, что подобные задачи, но для уравнения

$$y^m u_{xx} + u_{yy} - b^2 y^m u = 0, \quad b > 0, \quad m > 0$$

рассматривались в публикациях [1–3].

Настоящая работа выполнена в русле отмеченной тематики.

2. Единственность решения

Теорема 1. Если решение задачи для уравнения (1.1) с условиями (1.2)–(1.4); (1.2),(1.3),(1.5); (1.2),(1.3),(1.6) существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение какой-либо из этих задач.

Рассмотрим функции

$$v_n(y) = 4\int_0^1 u(x,y)\sin 2\pi nx dx, \quad u_0(y) = 2\int_0^1 u(x,y)(1-x)dx,$$

$$u_n(y) = 4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos 2\pi nx dx.$$

Так как $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то

$$4\int_0^1 (u_{xx} + u_{yy} + \frac{2p}{y}u_y - b^2 u)\sin 2\pi nx dx = 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим интеграл $4\int_0^1 u_{xx}\sin 2\pi nx dx$, который дважды проинтегрируем по частям, учитывая условия (1.3):

$$4\int_0^1 u_{xx}\sin 2\pi nx dx = -4(2\pi n)^2\int_0^1 u\sin 2\pi nx dx = -(2\pi n)^2 v_n. \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) и определения функции $v_n(y)$ следует, что:

$$v_n(y)'' + \frac{2p}{y}v_n(y)' - ((2\pi n)^2 + b^2)v_n(y) = 0. \tag{2.3}$$

Из (1.4), (1.5) и (1.6) получаются условия на $v_n(y)$:

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p} v_n(y)' = 4\int_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx, \qquad 2p > -1, \tag{2.4}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{-1} v_n(y)' = 4\int_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx, \qquad 2p < -1, \tag{2.5}$$

$$\lim_{y\to 0+} \left(\frac{y^{-1} v_n(y)'}{\ln(y)}\right) = 4\int_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx, \qquad 2p = -1. \tag{2.6}$$

Из (1.3) также следует, что

$$\lim_{y\to\infty} v_n(y) = 0. \tag{2.7}$$

Проведем замену: $v_n(y) = y^{-p+\frac{1}{2}} W(b_1 y)$, где $b_1 = \sqrt{(2\pi n)^2 + b^2}$.

Тогда для W уравнение (2.3) приобретет следующий вид:

$$W(b_1y)'' + \frac{1}{b_1 y} W(b_1 y)' - (1 + \frac{(p-\frac{1}{2})^2}{b_1^2 y^2}) W(b_1 y) = 0.$$

После замены переменной $z = b_1 y$ и переобозначения $p_1 = p - \frac{1}{2}$ это уравнение принимает вид

$$W(z)'' + \frac{1}{z} W(z)' - (1 + \frac{p_1^2}{z^2}) W(z) = 0.$$

Это модифицированное уравнение Бесселя [4, с. 13], как известно [5, с. 245], общее решение этого уравнения имеет вид:

$$W(z) = C_1 I_{p_1}(z) + C_2 K_{p_1}(z),$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя. Из этого следует, что

$$v_n(y) = C_1 y^{-p_1} I_{p_1}(b_1 y) + C_2 y^{-p_1} K_{p_1}(b_1 y). \tag{2.8}$$

Поскольку $I_\nu(z)$ имеет на бесконечности порядок $\frac{e^z}{\sqrt{z}}$, то, учитывая (2.7), необходимо потребовать, чтобы $C_1 = 0$.

Так как при $z \to 0$ [5, с. 246]

$$K_\nu(z) \sim \frac{\Gamma(|\nu|)}{2^{1-|\nu|} x^{|\nu|}}, \tag{2.9}$$

то, учитывая формулу [4, с. 91]

$$[y^{-\nu} K_\nu]' = y^{-\nu} K_{\nu+1} \tag{2.10}$$

и

$$v_n(y)' = C_2 b_1 y^{-p_1} K_{p_1+1}(b_1 y), \tag{2.11}$$

найдем $\lim\limits_{y\to 0+} y^{2p} v_n(y)' = C_2 b_1 \frac{\Gamma(p_1+1)}{2^{-p_1} b_1^{p_1+1}}$.

При $2p > -1$ условие (2.4) нам дает представление для C_2:

$$C_2 = \frac{2^{-p_1} b_1^{p_1}}{\Gamma(p_1+1)} 4 \int_0^1 \nu(x) \sin 2\pi n x dx.$$

А тогда формулу (2.8) перепишем в виде

$$v_n(y) = \frac{2^{-p_1+2} b_1^{p_1}}{\Gamma(p_1+1)} \int_0^1 \nu(x) \sin 2\pi n x dx y^{-p_1} K_{p_1}(b_1 y). \tag{2.12}$$

При $2p < -1$, учитывая (2.9) и (2.11), найдем

$$\lim_{y\to 0+} y^{-1} v_n(y)' = C_2 b_1 \lim_{y\to 0+} y^{-p_1-1} K_{p_1+1}(b_1 y) = C_2 b_1^{p_1+2} 2^{-p_1-2} \Gamma(-p_1-1).$$

Согласно условию (2.5), имеем следующее:

$$C_2 = \frac{2^{p_1+2} b_1^{-p_1-2}}{\Gamma(-p_1-1)} \int_0^1 \nu(x) \sin 2\pi n x dx,$$

$$v_n(y) = \frac{2^{p_1+2} b_1^{-p_1-2}}{\Gamma(-p_1-1)} \int\limits_0^1 \nu(x) \sin 2\pi n x dx y^{-p_1} K_{p_1}(b_1 y). \tag{2.13}$$

При $2p = -1$, учитывая, что при $z \to 0$ [5, с. 246]

$$K_0(z) \sim ln(\frac{1}{z}) \tag{2.14}$$

и опираясь на формулу (2.11), получим

$$\lim_{y\to 0+} \left(\frac{y^{-1} v_n(y)'}{\ln(y)} \right) = C_2 b_1 \lim_{y\to 0+} \left(\frac{y^{-1} y K_0(b_1 y)}{\ln(y)} \right) = C_2 b_1 \lim_{y\to 0+} \left(\frac{\ln \frac{1}{b_1} - \ln y}{\ln y} \right) = -C_2 b_1.$$

На основании (2.6) будем иметь $C_2 = -4b_1^{-1} \int\limits_0^1 \nu(x) \sin 2\pi n x dx$, а $v_n(y)$ принимает вид

$$v_n(y) = -4b_1^{-1} \int\limits_0^1 \nu(x) \sin 2\pi n x dx y K_{-1}(b_1 y). \tag{2.15}$$

Тем же методом, что и для $v_n(y)$, получаем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять $u_0(y)$:

$$u_0(y)'' + \frac{2p}{y} u_0(y)' - b^2 u_0(y) = 0. \tag{2.16}$$

Из (1.4), (1.5) и (1.6) получаются условия на $u_0(y)$:

$$\lim_{y\to\infty} u_0(y) = 0, \tag{2.17}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p} u_0(y)' = 2 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x) dx, \qquad 2p > -1, \tag{2.18}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{-1} u_0(y)' = 2 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x) dx, \qquad 2p < -1, \tag{2.19}$$

$$\lim_{y\to 0+} \left(\frac{y^{-1} u_0(y)'}{\ln(y)} \right) = 2 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x) dx, \qquad 2p = -1. \tag{2.20}$$

После замены $u_0(y) = y^{-p_1} W(by)$ уравнение (2.16) примет вид:

$$W(by)'' + \frac{1}{y} W(by)' - (1 + \frac{(p_1)^2}{b^2 y^2}) W(by) = 0. \tag{2.21}$$

Если в качестве аргумента рассмотреть by, то уравнение (2.21) — это модифицированное уравнение Бесселя [4, с. 13]. Его решение

$$W(by) = C_1 I_{p_1}(by) + C_2 K_{p_1}(by).$$

Тогда

$$u_0(y) = C_1 y^{-p_1} I_{p_1}(by) + C_2 y^{-p_1} K_{p_1}(by).$$

Так как при $z \to \infty$ $I_\nu(z)$ имеет порядок $\frac{e^z}{\sqrt{z}}$, то необходимо положить $C_1 = 0$. Подобно, как для $v_n(y)$, найдем C_2, используя условия (2.18)–(2.20).

При $2p > -1$

$$C_2 = \frac{2^{-p_1} b^{p_1}}{\Gamma(p_1+1)} 2 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)dx,$$

а $u_0(y)$ в этом случае имеет вид

$$u_0(y) = \frac{2^{-p_1+1} b^{p_1}}{\Gamma(p_1+1)} \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)dx y^{-p_1} K_{p_1}(by). \tag{2.22}$$

При $2p < -1$

$$C_2 = \frac{2^{p_1+2} b^{-p_1-2}}{\Gamma(-p_1-1)} 2 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)dx.$$

Для $u_0(y)$ в этом случае получаем следующее представление:

$$u_0(y) = \frac{2^{p_1+3} b^{-p_1-2}}{\Gamma(-p_1-1)} \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)dx y^{-p_1} K_{p_1}(by). \tag{2.23}$$

При $2p = -1$

$$C_2 = -2b^{-1} \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)dx.$$

Функция $u_0(y)$ в этом случае принимает вид:

$$u_0(y) = -2b^{-1} \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)dx y K_{-1}(by). \tag{2.24}$$

Тем же методом, что и для $v_n(y)$, получаем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять $u_n(y)$:

$$u_n(y)'' + \frac{2p}{y} u_n(y)' - ((2\pi n)^2 + b^2) u_n(y) = -4\pi n v_n(y). \tag{2.25}$$

Из (1.4), (1.5) и (1.6) получаются следующие условия на $u_n(y)$:

$$\lim_{y\to\infty} u_n(y) = 0, \tag{2.26}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p} u_n(y)' = 4 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)\cos 2\pi n x dx, \qquad 2p > -1, \tag{2.27}$$

$$\lim_{y\to 0+} y^{-1} u_n(y)' = 4 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)\cos 2\pi n x dx, \qquad 2p < -1, \tag{2.28}$$

$$\lim_{y\to 0+} \left(\frac{y^{-1} u_n(y)'}{\ln(y)} \right) = 4 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)\cos 2\pi n x dx, \qquad 2p = -1. \tag{2.29}$$

Уравнение (2.25) есть линейное неоднородное дифференциальное уравнение, его решение можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Однородное уравнение совпадает с уравнением (2.3), его решение имеет вид (2.8).

Частное решение уравнения (2.25) будем искать в виде $Cy^{\nu}K_{\varphi}(b_1y)$, где C, ν и φ — параметры, подлежащие определению. Подставляя его в уравнение (2.25), получаем, что для того чтобы $Cy^{\nu}K_{\varphi}(b_1y)$ было частным решением (2.25), необходимо, чтобы $\nu = -p_1 + 1$, $\varphi = p_1 - 1$ и, при $2p > -1$

$$C = -p^{-1}\pi n \frac{2^{-p_1+2}b_1^{p_1-1}}{\Gamma(p_1+1)} \int\limits_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx, \tag{2.30}$$

при $2p < -1$

$$C = p^{-1}\pi n \frac{2^{p_1+2}b_1^{-p_1-3}}{\Gamma(-p_1-1)} \int\limits_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx, \tag{2.31}$$

при $2p = -1$

$$C = p^{-1}\pi n 4 b_1^{-2} \int\limits_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx. \tag{2.32}$$

Таким образом, общее решение для (2.25) выглядит следующим образом:

$$u_n(y) = C_1 y^{-p_1} I_{p_1}(b_1y) + C_2 y^{-p_1} K_{p_1}(b_1y) + C y^{-p_1+1} K_{p_1-1}(b_1y), \tag{2.33}$$

где C удовлетворяет (2.30), если $2p > -1$; (2.31), если $2p < -1$; (2.32), если $2p = -1$.

По рассуждениям, аналогичным приведенным для $v_n(y)$ и $u_0(y)$, необходимо положить $C_1 = 0$.

Так же, как для $v_n(y)$, найдем C_2, используя условия (2.27)–(2.29).

В случае $2p > -1$

$$C_2 = \frac{2^{-p_1}b_1^{p_1}}{\Gamma(p_1+1)} 4 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)\cos 2\pi nx dx$$

Тогда формула (2.33) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u_n(y) = {} & \frac{2^{-p_1+2}b_1^{p_1}}{\Gamma(p_1+1)} \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)\cos 2\pi nx dx y^{-p_1} K_{p_1}(b_1y) - \\ & - p^{-1}\pi n \frac{2^{-p_1+2}b_1^{p_1-1}}{\Gamma(p_1+1)} \int\limits_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx y^{-p_1+1} K_{p_1-1}(b_1y). \end{aligned} \tag{2.34}$$

В случае $2p < -1$

$$\begin{aligned} C_2 = {} & \frac{2^{p_1+3}b_1^{-p_1-1}}{\Gamma(-p_1-1)} \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)\cos 2\pi nx dx + \\ & + p^{-1}\pi n \frac{2^{-p_1+3}b_1^{p_1-2}}{\Gamma(p_1+1)} (-p_1) \int\limits_0^1 \nu(x)\sin 2\pi nx dx, \end{aligned}$$

а для $u_n(y)$ получается следующее представление:

$$u_n(y) = [\frac{2^{p_1+3}b_1^{-p_1-1}}{\Gamma(-p_1-1)} \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x)\cos 2\pi nx dx +$$

$$+p^{-1}\pi n\frac{2^{-p_1+3}b_1^{p_1-2}}{\Gamma(p_1+1)}(-p_1)\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdx]y^{-p_1}K_{p_1}+$$

$$+p^{-1}\pi n\frac{2^{p_1+2}b_1^{-p_1-3}}{\Gamma(-p_1-1)}\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdxy^{-p_1+1}K_{p_1-1}(b_1y). \tag{2.35}$$

При $2p=-1$

$$C_2=-4b_1^{-1}\int\limits_0^1\nu(x)(1-x)\cos 2\pi nxdx.$$

Формула (2.33) в таком случае имеет вид

$$u_n(y)=-4b_1^{-1}\int\limits_0^1\nu(x)(1-x)\cos 2\pi nxdxyK_{-1}-\pi n8b_1^{-2}\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdxy^2K_{-2}(b_1y). \tag{2.36}$$

Из формул (2.12), (2.13), (2.15), (2.22), (2.23), (2.24), (2.34), (2.35), (2.36) следует, что если $\nu(x)\equiv 0$, то $u_n(y)=0$ и $v_n(y)=0$, но тогда $u(x,y)\equiv 0$, в силу полноты системы

$$\{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},\ \ \{2(1-x)\},\ \ \{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},$$

что завершает доказательство теоремы.

3. Существование решения

Теорема 2. Если $\nu(x)\in C[0,1]$, то решения задач (1.3), (1.4); (1.3), (1.5); (1.3), (1.6) для уравнения (1.1) существуют и представимы в виде суммы ряда

$$u(x,y)=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}u_n\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}v_nx\sin 2\pi nx \tag{3.1}$$

где при $2p>-1$ u_0, v_n, u_n определяются соответствено формулами (2.12), (2.22), (2.34), при $2p<-1$ u_0, v_n, u_n определяются формулами (2.13), (2.23), (2.35) и при $2p=-1$ u_0, v_n, u_n определяются формулами (2.15), (2.24), (2.36).

Доказательство. Поскольку системы функций

$$\{4\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},\ \ \{2(1-x)\},\ \ \{4(1-x)\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},$$
$$\{x\sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty},\ \ \{1\},\ \ \{\cos 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.2}$$

образуют базис Рисса в L_2 [6], то ряд (3.1) сходится для каждого $y\in L_2(0,1)$. Если мы докажем его равномерную сходимость, то этот ряд будет являться разложением по базису Рисса (3.2) для своей суммы. Таким образом, в той области, где ряд (3.1) сходится равномерно, его сумма будет удовлетворять уравнению (1.1) и условиям (1.3).

Рассмотрим ряд из абсолютных значений коэффициентов при $\cos 2\pi nx$, то есть из $|u_n|$ при $y\geqslant\delta>0$. Из формул (2.34), (2.35), (2.36) следует, что в слагаемых, входящих в u_n при любом p, присутствуют четыре типа множителей, зависящих от n: 1) b_1^l, 2) $\int\limits_0^1\nu(x)(1-x)\cos 2\pi nxdx$, 3) $\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdx$ и 4) $K_{\varphi}(b_1y)$. Рассмотрим их при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(2\pi n)^2+b^2}}{n}=2\pi.$$

Поэтому $b_1\sim 2\pi n$ при $n\to\infty$, а значит, $b_1^l\sim(2\pi n)^l$ и $K_\varphi(b_1y)\sim K_\varphi(2\pi ny)$.

При $z\to\infty$ $K_\varphi(z)\sim\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}$, откуда следует, что

$$K_\varphi(b_1y)\sim\frac{e^{-2\pi ny}}{\sqrt{2\pi ny}}\quad n\to\infty. \tag{3.3}$$

Осталось рассмотреть множители типа 2) и 3), а они будут убывать при $n\to\infty$ как коэффициенты ряда Фурье.

Поскольку по формулам (2.34), (2.35), (2.36) все слагаемые в каждом u_n имеют множитель типа $K_\varphi(b_1y)$, который по формуле (3.3) убывает экспоненциально, а остальные множители, зависящие от n, как показано выше, имеют степенной характер в бесконечности или убывают, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ сходится равномерно.

Аналогично доказывается равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|$.

Из равномерной сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_n|$ следует равномерная сходимость ряда (3.1) для $y\geqslant\delta>0$.

Осталось доказать то, что сумма этого ряда удовлетворяет условию (1.4), если $2p>-1$, (1.5), если $2p<-1$, и (1.6), если $2p=-1$. Для этого исследуем на равномерную сходимость ряд (3.1), почленно продифференцируемый по y, то есть ряд

$$u_0'+\sum_{n=1}^{\infty}u_n'\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}v_n'x\sin 2\pi nx. \tag{3.4}$$

Его коэффициенты при $2p>-1$

$$v_n'=\frac{2^{-p_1+2}b_1^{p_1+1}}{\Gamma(p_1+1)}\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdxy^{-p_1}K_{p_1+1}(b_1y), \tag{3.5}$$

$$u_n'=\frac{2^{-p_1+2}b_1^{p_1+1}}{\Gamma(p_1+1)}\int\limits_0^1\nu(x)(1-x)\cos 2\pi nxdxy^{-p_1}K_{p_1+1}(b_1y)- \tag{3.6}$$

при $2p<-1$

$$v_n'=\frac{2^{p_1+2}b_1^{-p_1-1}}{\Gamma(-p_1-1)}\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdxy^{-p_1}K_{p_1+1}(b_1y), \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}u_n'=[\frac{2^{p_1+3}b_1^{-p_1}}{\Gamma(-p_1-1)}\int\limits_0^1\nu(x)(1-x)\cos 2\pi nxdx+\\+p^{-1}\pi n\frac{2^{-p_1+3}b_1^{p_1-1}}{\Gamma(p_1+1)}(-p_1)\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdx]y^{-p_1}K_{p_1+1}+\\+p^{-1}\pi n\frac{2^{p_1+2}b_1^{-p_1-2}}{\Gamma(-p_1-1)}\int\limits_0^1\nu(x)\sin 2\pi nxdxy^{-p_1+1}K_{p_1}(b_1y)\end{gathered} \tag{3.8}$$

при $2p = -1$

$$v'_n = -4 \int\limits_0^1 \nu(x) \sin 2\pi nx dx y K_0(b_1 y), \tag{3.9}$$

$$u'_n = -4 \int\limits_0^1 \nu(x)(1-x) \cos 2\pi nx dx y K_0 - \pi n 8 b_1^{-1} \int\limits_0^1 \nu(x) \sin 2\pi nx dx y^2 K_{-1}(b_1 y). \tag{3.10}$$

Из формул (3.5)–(3.10) следует, что коэффициенты при $\cos 2\pi nx$ и $x \sin 2\pi nx$ у ряда (3.4) имеют такую же структуру, как и для ряда (3.1), то есть являются суммами, в которых все слагаемые имеют множители, зависящие от n, тех же четырех видов. И каждое слагаемое также имеет множитель вида $K_\varphi(b_1 y)$. А значит, ряд (3.5) сходится равномерно по тем же соображениям, что и ряд (3.1). Из равномерной сходимости следует, что его сумма является частной производной по y от суммы ряда (3.1). Следовательно, сумма ряда (3.1) удовлетворяет условию (1.4), если $2p > -1$, (1.5) если $2p < -1$ и (1.6), если $2p = -1$, что завершает доказательство теоремы.

Литература

[1] Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 11. С. 1565–1567.

[2] Валитов И.Р. Решение нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом // Труды международной научной конференции. Уфа: Гилем, 2003. Т. 1. С. 100–110.

[3] Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом // Труды международной научной конференции. Уфа: Гилем, 2003. Т. 1. С. 213–219.

[4] Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. Т. 2. 296 с.

[5] Олвер Ф. Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.

[6] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1100.

Поступила в редакцию $27/IV/2010$;
в окончательном варианте — $20/VI/2011$.

ONE-VALUED SOLVABILITY OF A NONLOCAL PROBLEM FOR THE AXISYMMETRIC HELMHOLTZ EQUATION

 A.A. Abashkin[2]

A nonlocal boundary value problem for degenerate elliptic equation is considered. Boundary value of this problem considerably depend on low derivative coefficient changes. Existence and uniqueness of a solution are proved.

Key words: non-local problem, Bessel equation, Riesz basis, uniform convergence of series.

Paper received 27/*IV*/2010.
Paper accepted 20/*VI*/2011.

[2]Abashkin Anton Alexandrovich (samcocaa@rambler.ru), Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.