

УДК 517.925+531.01

## НОВЫЙ СЛУЧАЙ ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ К ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЕ

© 2011 М.В. Шамолин<sup>1</sup>

В работе сообщается о результатах по исследованию уравнений движения динамически симметричного четырехмерного ( $4D-$ ) твердого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных двумерных ( $2D-$ ) и трехмерных ( $3D-$ ) твердых тел, взаимодействующих со средой, когда в системе присутствует неконсервативная пара сил, заставляющая центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно [1]. Получено несколько случаев интегрируемости в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде, заполняющей четырехмерное пространство, при наличии некоторой следящей силы.

Пусть четырехмерное твердое тело  $\Theta$  массы  $m$  с гладкой трехмерной границей  $\partial\Theta$  движется в среде, заполняющей четырехмерную область евклидова пространства. При этом тензор инерции тела в некоторой связанной системе координат  $Dx_1x_2x_3x_4$  имеет вид  $\text{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\}$ . Расстояние от точки  $N$  приложения неконсервативной силы  $\mathbf{S}$  до точки  $D$  является функцией некоторого угла  $\alpha$ :  $DN = R(\alpha)$  (ср. с [1–3]). Сила  $\mathbf{S}$  имеет величину  $S = s(\alpha)\text{sgn}\cos\alpha \cdot v^2$ ,  $|\mathbf{v}_D| = v$ , где  $s$  — некоторая функция, характеризующая в системе как рассеяние, так и подкачку энергии [1; 2]. При этом функции  $R$  и  $S$  определим следующим образом (ср. с [1; 2]):  $R = R(\alpha) = A\sin\alpha$ ,  $S = S_v(\alpha) = Bv^2\cos\alpha$ ;  $A, B > 0$ .

Если  $\Omega$  — тензор угловой скорости тела  $\Theta$ ,  $\Omega \in \text{so}(4)$ , то часть уравнений движения, отвечающая алгебре  $\text{so}(4)$ , имеет вид [2]

$$\dot{\Omega}\Lambda + \Lambda\dot{\Omega} + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \quad (1)$$

где  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ ,  $\lambda_1 = (-I_1 + I_2 + I_3 + I_4)/2, \dots, \lambda_4 = (I_1 + I_2 + I_3 - I_4)/2$ ,  $M$  — момент внешних сил, действующих на тело в  $\mathbf{R}^4$ , спроектированный на естественные координаты в алгебре  $\text{so}(4)$ ,  $[\ ]$  — коммутатор в  $\text{so}(4)$ . Кососимметрическая матрица  $\Omega \in \text{so}(4)$  определяется шестью величинами  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$  — своими компонентами в алгебре  $\text{so}(4)$ . При этом, очевидно, выполнены следующие равенства:  $\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i$  для любых  $i, j = 1, \dots, 4$ .

При вычислении момента внешней силы строится отображение  $\mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \text{so}(4)$ , переводящее пару векторов из  $\mathbf{R}^4$  в некоторый элемент из алгебры  $\text{so}(4)$  [2; 3].

Уравнение движения центра масс  $C$  тела  $\Theta$  представится в виде  $m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}$ , где по многомерной формуле Ривальса  $\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{D}\mathbf{C} + E\mathbf{D}\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{w}_D = \mathbf{v}_D +$

<sup>1</sup>Шамолин Максим Владимирович (shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

$+\Omega \mathbf{v}_D$ ,  $E = \dot{\Omega}$ ,  $\mathbf{F}$  — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае  $\mathbf{F} = \mathbf{S}$ ),  $E$  — тензор углового ускорения [1; 2].

Нам необходимо несколько расширить задачу, а именно по прямой  $Dx_1 = DC$  будет действовать следящая сила  $\mathbf{T}$ , введение которой используется для рассмотрения интересующих нас классов движений, в результате чего порядок динамической системы может быть понижен. В данной работе интересен такой класс движения, когда центр масс тела движется прямолинейно и равномерно.

Если  $(0, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$  — координаты точки  $N$  в системе  $Dx_1x_2x_3x_4$ ,  $\{-S, 0, 0, 0\}$  — координаты вектора  $\mathbf{S}$ , то момент силы при проектировании в алгебру  $\mathfrak{so}(4)$  имеет вид

$$\{0, 0, x_{4N}S, 0, -x_{3N}S, x_{2N}S\} \in \mathbf{R}^6 \cong M \in \mathfrak{so}(4).$$

При этом если  $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$  — сферические координаты в  $\mathbf{R}^4$ , то  $x_{2N} = R(\alpha) \cos \beta_1$ ,  $x_{3N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \cos \beta_2$ ,  $x_{4N} = R(\alpha) \sin \beta_1 \sin \beta_2$ .

С учетом всего можно расписать уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} (\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) &= 0, \\ (\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) &= 0, \\ (\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) &= x_{4N}S, \\ (\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) &= 0, \\ (\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) &= -x_{3N}S, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) &= x_{2N}S. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, что существуют три циклических первых интеграла у уравнений (2):  $\omega_1 = \omega_1^0, \omega_2 = \omega_2^0, \omega_4 = \omega_4^0$ , при этом считаем, что  $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_4^0 = 0$ . В результате этого оставшиеся уравнения на  $\mathfrak{so}(4)$  примут следующий вид (здесь  $n_0^2 = AB/2I_2$ ):  $\dot{\omega}_3 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \sin \beta_2$ ,  $\dot{\omega}_5 = -n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta_1 \cos \beta_2$ ,  $\dot{\omega}_6 = n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta_1$ .

Замена угловых скоростей  $z_1 = \omega_3 \cos \beta_2 + \omega_5 \sin \beta_2$ ,  $z_2 = -\omega_3 \sin \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_5 \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \omega_6 \sin \beta_1$ ,  $z_3 = \omega_3 \sin \beta_2 \sin \beta_1 - \omega_5 \cos \beta_2 \sin \beta_1 + \omega_6 \cos \beta_1$  после учета условий, понижающих порядок общей системы, позволяет рассматривать "совместные" уравнения движения на касательном расслоении  $T\mathbb{S}^3$  трехмерной сферы ( $\sigma = DC$ )

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \sigma \cos \alpha [n_0^2 v^2 \sin^2 \alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)], \\ \dot{\alpha} &= -z_3 + \sigma n_0^2 v \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sigma \sin \alpha (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)/v, \\ \dot{z}_3 &= n_0^2 v^2 \sin \alpha \cos \alpha - (z_1^2 + z_2^2) \operatorname{ctg} \alpha, \quad \dot{z}_2 = z_2 z_3 \operatorname{ctg} \alpha + z_1^2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \\ \dot{z}_1 &= z_1 z_3 \operatorname{ctg} \alpha - z_1 z_2 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \quad \dot{\beta}_1 = z_2 \operatorname{ctg} \alpha, \\ \dot{\beta}_2 &= -z_1 \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{csc} \beta_1. \end{aligned} \quad (3)$$

В системе седьмого порядка появилась независимая подсистема шестого порядка, в которой отделяется независимая подсистема пятого порядка (3). Для полного интегрирования необходимо знать, вообще говоря, шесть независимых первых интегралов. Однако после замен переменных и введения нового дифференцирования  $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ ,  $z_* = z_2/z_1$ ,  $z = n_0 v Z$ ,  $z_k = n_0 v Z_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $z_* = Z_*$ ,  $n_0 v \cdot \mapsto \cdot$  она приводится к виду ( $b = \sigma n_0, [b] = 1$ )

$$v' = v \Psi(\alpha, Z, Z_3), \quad \Psi(\alpha, Z, Z_3) = b \cos \alpha [\sin^2 \alpha - (Z^2 + Z_3^2)],$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_3 + b \sin \alpha \cos^2 \alpha + b \sin \alpha (Z^2 + Z_3^2), \\ Z_3' &= \sin \alpha \cos \alpha - Z^2 \operatorname{ctg} \alpha - Z_3 \Psi(\alpha, Z, Z_3), \quad Z' = Z Z_3 \operatorname{ctg} \alpha - Z \Psi(\alpha, Z, Z_3), \end{aligned} \quad (4)$$

$$Z_*' = Z \sqrt{1 + Z_*^2} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta_1, \quad \beta_1' = \frac{Z Z_*}{\sqrt{1 + Z_*^2}} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (5)$$

$$\beta_2' = -\frac{Z_1}{\sqrt{1+Z_*^2}} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{csc} \beta_1.$$

Видно, что система пятого порядка (3) распалась на независимые подсистемы еще более низкого порядка: система (4) — третьего, а система (5) (после замены независимого переменного) — второго. Поэтому для полной интегрируемости достаточно указать два независимых интеграла системы (4), один — системы (5) и два дополнительных интеграла, "привязывающих" оставшиеся уравнения. При этом заметим, что систему (4) можно рассматривать на касательном расслоении  $TS^2$  двумерной сферы.

Полная система седьмого порядка обладает аналитическим первым интегралом вида  $v^2(1 - 2bZ_3 \sin \alpha + (Z^2 + Z_3^2)) = V_C^2$ , поскольку центр масс движется прямолинейно и равномерно.

Система (4) принадлежит к классу систем, возникающих в динамике трехмерного ( $3D-$ ) твердого тела, и обладает двумя независимыми первыми интегралами, являющимися трансцендентными функциями фазовых переменных (в смысле комплексного анализа) и выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций (ср. с [1–3]):

$$\frac{Z^2 + Z_3^2 - bZ_3 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{Z \sin \alpha} = C_1 = \operatorname{const}, \quad G(Z, Z_3, \sin \alpha) = C_2 = \operatorname{const}.$$

Система (5) имеет первый интеграл в виде

$$\frac{\sqrt{1+Z_*^2}}{\sin \beta_1} = C_3 = \operatorname{const},$$

и, в свою очередь, дополнительный первый интеграл, позволяющий определить величину  $\beta_2$ , представлен как

$$\pm \frac{\cos \beta_1}{\sqrt{C_3^2 - 1}} = \sin\{C_3(\beta_2 + C_4)\}, \quad C_4 = \operatorname{const}.$$

## Литература

- [1] Шамолин М.В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твердого тела. М.: Экзамен, 2007. 352 с.
- [2] Шамолин М.В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырехмерного твердого тела в сопротивляющейся среде // Доклады РАН. 2000. Т. 375. № 3. С. 343–346.
- [3] Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи матем. наук. 1998, Т. 53. Вып. 3. С. 209–210.