УДК 517.958:531.72

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ МИГРАЦИИ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

© 2011 Л.И. Сербина, А.А. Вендина[1]

В работе при использовании специфических свойств дробных производных предложен метод нахождения асимптотического движения загрязненных подземных вод, возникающий в задачах стабилизации процесса миграции загрязнения. Преимущество данного подхода, по сравнению с традиционными методами анализа таких процессов, заключается в том, что он не требует предварительного определения значений концентрации загрязнения в каждый момент времени и в каждой точке в области стабилизации.

Ключевые слова: дробные производные, асимптотический метод, надземные воды.

Проблема определения области стабилизации процесса загрязнения подземных вод в реологически сложных средах в том случае, когда он начался так давно, что исходное состояние не влияет на заключительную стадию нестационарного процесса, приводит к задачам без начальных условий. В классической теории массопереноса [1] такие задачи традиционно изучаются с помощью предельного перехода обобщенного решения нелокальных математических моделей, в основе которых лежат начально-краевые задачи для модельного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка следующего вида:

$$m\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D^*(x;t)\frac{\partial c}{\partial x}\right] - \frac{\partial[\upsilon(x,t)c]}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}, \qquad (1)$$

где m — пористость; $c = c(x;t)$ — концентрация загрязнения подземных вод в точке $x \in (0,l)$ в момент времени t; D^* — коэффициент конвективной диффузии; υ — скорость движения потока; функция $\frac{\partial N}{\partial t}$ описывает кинетику взаимодействия между движущейся жидкостью и пористой средой.

Модельное уравнение (1), построенное в рамках приближенной аппроксимации структуры порового пространства простыми геометрическими фигурами евклидовой геометрии и справедливости полуэмпирических законов Дарси и Фурье-Фика, не учитывает наличие сложных прямых и обратных связей между гидрогеологическими характеристиками нелинейного процесса миграции загрязнения в нелинейных природных средах. Поэтому в последние годы при решении задач оценки

[1]Сербина Людмила Ивановна (SerbinaL@mail.ru), Вендина Алла Анатольевна (Roven-ka@yandex.ru), отдел математического моделирования геофизических процессов Учреждения Российской академии наук Научно-исследовательского института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А.

состояния и прогноза процесса загрязнения подземных вод рассматриваются альтернативные подходы, существенно использующие методы фрактальной геометрии и математический аппарат дробного интегродифференцирования.

При исследовании пространственно-временных свойств нелинейных эффектов и явлений, возникающих на больших расстояниях от источника загрязнения, почва и почвогрунт интерпретируются как среды, структура пор которых образует множество с фрактальной размерностью d_f. При этом для нелинейного процесса взаимодействия загрязненных подземных вод с чистыми характерно самоподобие в широкой области пространственных и временных масштабов.

Пусть за промежуток времени Δt в элементе Ω пористой среды происходит изменение концентрации загрязнения подземных вод на величину

$$\delta c = \frac{\partial c(x,t)}{\partial t}\Delta t.$$

В соответствии с методами фрактального анализа [2] для скорости изменения концентрации $c_t^{'} = \frac{\partial c(x;t)}{\partial t}$ принимается гипотеза о том, что она определяется как дробная производная в смысле Римана — Лиувилля

$$c_t^{'} \approx D_{0t}^{\alpha} c(x,\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{c(x;\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}. \tag{2}$$

Для широкого класса пористых сред порядок дробной производной $\alpha \in (0;1)$ приближенно полагают равным фрактальной размерности d_f порового пространства почв и почвогрунтов. Дробная размерность α, соответствуя порядку доли поровых каналов или ветвей в почвогрунтах открытых для просачивания загрязненных подземных вод, описывает инвариантность (фрактальность) пространственных и временных свойств процесса миграции.

Получено, что обобщением [3] классического уравнения миграции загрязнения (1) при выполнении гипотезы (2) является дифференциальное уравнение с дробной производной по времени параболического типа:

$$mD_{0t}^{\alpha} c(x;\tau) = D_{\alpha} \frac{\partial^2 c(x;t)}{\partial x^2} - \upsilon_{\alpha} \frac{\partial c(x;t)}{\partial x}, \tag{3}$$

где D_α и υ_α — постоянные коэффициенты фрактальной диффузии и фрактальной скорости конвективного переноса соответственно.

Для однозначного определения изучаемого процесса, учитывая фрактальный характер нелинейного режима миграции загрязненных вод в пористых неоднородных средах со сложной топологией порового пространства, следуя [4], к дробному дифференциальному уравнению (3) присоединим нелокальное условие вида

$$D_{0t}^{\alpha} c(x;\tau) = c_0(x) t^{-\alpha}, \tag{4}$$

где $c_0 = c_0(x)$ — некоторая заданная функция.

Математическая модель (3), (4) миграции загрязнения подземных вод существенно расширяет диапазон изменения гидрофизических характеристик изучаемого нелинейного процесса и представляет собой новый способ математического описания асимптотики нелинейного, медленно протекающего во времени, режима миграции загрязненных подземных вод. Задача исследования оценки состояния и прогноза загрязненных подземных вод на больших расстояниях от источника загрязнения сводится к постановке следующей нелокальной задачи.

Задача. Найти в области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < \infty\}$ решение $c = c(x,t)$ уравнения дробной фрактальной миграции (3), удовлетворяющее нелокальному условию (4).

Для решения поставленной задачи используется один из методов интегрирования дифференциальных уравнений, в соответствии с которым искомое решение ищется в виде степенного ряда. Следуя [5] предположим, что искомая функция $c = c(x, t)$ удовлетворяет всем условиям разложимости в степенной ряд, сходящийся в промежутке $(0; l)$. В соответствии с этим предположением решение $c = c(x; t)$ дробного уравнения миграции (3), удовлетворяющее нелокальному условию (4), запишем в виде следующего степенного ряда с дробным показателем $\alpha \in (0; 1)$:

$$c(x; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x) t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} = \frac{a_0(x)}{\Gamma(1)} + \frac{a_1(x) t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{a_2(x) t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \cdots, \quad (5)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Существование и единственность решения задачи (3), (4) обеспечивается выбором коэффициентов $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\ldots, a_n(x), \ldots$ в разложении (5). Для определения неизвестных коэффициентов, применяя свойство оператора дробного дифференцирования для степенной функции:

$$D_{0t}^{\alpha} t^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} t^{\mu-\alpha},$$

представим степенной ряд (5) в виде

$$D_{0t}^{\alpha} c(x; \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x) t^{\alpha(n-1)}}{\Gamma(1+\alpha(n-1))} = \frac{a_0(x) t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{a_1(x)}{\Gamma(1)} + \frac{a_2(x) t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{a_3(x) t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \cdots. \quad (6)$$

В дробно-дифференциальном уравнении (3) заменим функцию степенным рядом (5), над которым проделаны соответствующие операции дифференцирования. В результате получим дробно-степенное выражение:

$$\begin{aligned} & m\frac{a_0(x) t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + m\frac{a_1(x)}{\Gamma(1)} + m\frac{a_2(x) t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + m\frac{a_3(x) t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \cdots = \\ & = D_{\alpha}\frac{a_0^{''}(x)}{\Gamma(1)} + D_{\alpha}\frac{a_1^{''}(x) t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + D_{\alpha}\frac{a_2^{''}(x) t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \cdots - \\ & - \upsilon_{\alpha}\frac{a_0^{'}(x)}{\Gamma(1)} - \upsilon_{\alpha}\frac{a_1^{'}(x) t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} - \upsilon_{\alpha}\frac{a_2^{'}(x) t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \cdots \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда из выражения (7), приравнивая коэффициенты при одинаковых показателях степеней $t^{k\alpha}$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$, получим систему рекуррентных соотношений для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \frac{D_{\alpha}}{m} a_0^{''}(x) - \frac{\upsilon_{\alpha}}{m} a_0^{'}(x), \\ a_2(x) &= \frac{D_{\alpha}}{m} a_1^{''}(x) - \frac{\upsilon_{\alpha}}{m} a_1^{'}(x), \ldots \\ a_n(x) &= \frac{D_{\alpha}}{m} a_{n-1}^{''}(x) - \frac{\upsilon_{\alpha}}{m} a_{n-1}^{'}(x), \ldots \end{aligned} \quad (8)$$

Найдем функцию $a_0(x)$ в рекуррентных соотношениях (8), используя выражение дробно-степенного ряда (6) при $t \to 0$. Учитывая нелокальное условие (4), находим

$$t^{\alpha} D_{0t}^{\alpha} c(x; t) = \frac{a_0(x)}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Откуда

$$a_0(x) = \Gamma(1-\alpha) c_0(x). \quad (9)$$

Остальные неизвестные коэффициенты дробно-степенного ряда (5) находим, подставляя найденное значение коэффициента $a_0(x)$ в рекуррентные соотношения (8). Доказано при использовании метода математической индукции, что они определяются следующей обобщенной биномиальной формулой Лейбница:

$$a_n(x) = \frac{1}{m^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2n-k}\binom{k}{n}(D_\alpha)^{n-k}\upsilon_\alpha^k a_0^{(2n-k)}(x). \tag{10}$$

В силу выражений (5), (9), (10) асимптотическое решение нелокальной задачи (3), (4) представимо в виде следующего дробно-степенного ряда:

$$c(x;t) = a_0(x) + \frac{1}{m^n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2n-k}\binom{k}{n}(D_\alpha)^{n-k}\upsilon_\alpha^k a_0^{(2n-k)}(x)t^{n\alpha}. \tag{11}$$

Дробно-степенной ряд (11) является асимптотическим и может быть использован применительно к любым функциям $c(x;t)$, дифференцируемым необходимое число раз. Численная реализация построенного аналитического алгоритма (11) при заданных значениях гидрогеологических параметров процесса миграции загрязнения подземных вод, в случае когда фрактальный параметр принимает различные числовые значения $\alpha \in (0;1)$, показывает, что с его уменьшением распределение концентрации загрязнения $c = c(x;t)$ подземных вод подчиняется степенному закону убывания, что хорошо согласуется с асимптотическим выражением полного решения [6] начально-краевой задачи для классического уравнения (1).

Численно-аналитический алгоритм решения нелокальной задачи (4) для дифференциального уравнения дробного порядка (3), обобщая ранее известные результаты, представляет собой принципиально новый качественный подход исследования нелинейных эффектов, возникающих при медленно протекающих режимах миграции загрязнения подземных вод.

Литература

[1] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.

[2] Нигматулин Р.Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90. № 3. С. 354–368.

[3] Сербина Л.И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. М.: Наука, 2007. 167 с.

[4] Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2000. 299 с.

[5] Бабенко Ю.И. Тепломассообмен. Методы расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия, 1986. 144 с.

[6] Вендина А.А. Математическое моделирование массопереноса в пористых средах // Научная жизнь. 2008. № 3. С. 21–24.

Поступила в редакцию 20/*X*/2011;
в окончательном варианте — 20/*X*/2011.

ASYMPTOTIC TECHNIQUE FOR THE SOLUTION OF FRACTIONAL EQUATION FOR GROUND-WATER CONTAMINATION MIGRATION

© 2011 L.I. Serbina, A.A. Vendina[2]

A new technique for defining ground-water asymptotic movement using specific properties of fractional derivatives is introduced in this article. Advantage of the given technique in comparison with traditional techniques used for the analysis of such processes is based on the fact that preliminary definition of contamination concentration at every moment and at each point of stabilization area is not necessary.

Key words: fractional derivatives, asymptotic method, ground waters.

Paper received 20/X/2011.
Paper accepted 20/X/2011.

[2]Serbina Lyudmila Ivanovna (SerbinaL@mail.ru), Vendina Alla Anatolievna (Roven-ka@yandex.ru), the Dept. of Mathematical Modelling of Geophysical Processes, Institution of Russian Academy of Sciences Scientific Research Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC of RAS, Nalchik, 360000, Russian Federation.