УДК 519.999

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ПРИНЦИП СВЕДЕНИЯ[1]

© 2011 В.А. Соболев[2] Д.М. Щепакин[3]

Работа посвящена применению метода геометрической декомпозиции для редукции задач об устойчивости при постоянно действующих возмущениях и устойчивости от входа к вектору состояния системы.

Ключевые слова: интегральные многообразия, принцип сведения, устойчивость при постоянно действующих возмущениях, устойчивость от входа к вектору состояния.

1. Предварительные сведения

В работе доказывается принцип сведения для некоторых видов устойчивости. Первые результаты, связанные с принципом сведения, были получены А.М. Ляпуновым [1]. В дальнейшем принцип сведения для устойчивости по Ляпунову был доказан в работе [2]. На системы, обладающие многообразием стационарных состояний, принцип сведения был распространен В.В. Стрыгиным и В.А. Соболевым [3]. В данной работе аналогичный результат получен для устойчивости при постоянно действующих возмущениях и для устойчивости от входа к вектору состояния системы.

Введем необходимые понятия и определения.

Рассмотрим систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x_1} = Ax_1 + f_1(t, x_1, x_2), \\ \dot{x_2} = Bx_2 + f_2(t, x_1, x_2), \end{array} \right. \tag{1}$$

в которой собственные числа матрицы A имеют нулевые вещественные части, а B — устойчивая (гурвицева) матрица. Пусть

$$\|f_i(t, x_1, x_2)\| \leqslant M, \qquad f_i(t, 0, 0) = 0.$$

$$\|f_i(t, x_1, x_2) - f_i(t, \bar{x_1}, \bar{x_2})\| \leqslant \lambda(\|x_1 - \bar{x_1}\| + \|x_2 - \bar{x_2}\|), \quad i = 1, 2,$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-08-00154-а, Государственного контракта № 14.740.11.0155 Минобрнауки РФ, Программы № 15 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН РФ.

[2]Соболев Владимир Андреевич (hsablem@yahoo.com), кафедра технической кибернетики Самарского государственного аэрокосмического университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 151.

[3]Щепакин Денис Михайлович (sowiks@yandex.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где M и λ достаточно малы. Для системы (1) в сделанных предположениях существует интегральное многообразие $x_2 = h(t, x_1)$ такое, что

$$\|h(t,x_1)\| \leqslant DM, \quad \|h(t,x_1) - h(t,\bar{x_1})\| \leqslant \lambda\Delta\|x_1 - \bar{x_1}\|, \quad h(t,0) = 0,$$

для некоторых положительных констант D и Δ [2].

1.1. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_1 = A\overline{x}_1 + f_1(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2) + R(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2), \\ \dot{\overline{x}}_2 = B\overline{x}_2 + f_2(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2) + T(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2), \end{cases} \tag{2}$$

где функции R и T — достаточно малые возмущения.

Определение 1. Нулевое решение (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях (ПДВ), если для всякого положительного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\delta_1(\varepsilon) > 0, \delta_2(\varepsilon) > 0$ таких, что для всякого решения системы (2) с начальными значениями, удовлетворяющими неравенствам

$$\|\overline{x}_1(t_0)\| \leqslant \delta_1, \quad \|\overline{x}_2(t_0)\| \leqslant \delta_1,$$

при произвольных $R(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, $T(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2)$, удовлетворяющих в области $t \geqslant t_0$, $\|\overline{x}_1\| \leqslant \varepsilon$, $\|\overline{x}_2\| \leqslant \varepsilon$ неравенствам

$$\|R(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2)\| \leqslant \delta_2, \quad \|T(t,\overline{x}_1,\overline{x}_2)\| \leqslant \delta_2,$$

выполняются неравенства

$$\|\overline{x}_1(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad \|\overline{x}_2(t)\| \leqslant \varepsilon$$

при всех $t > t_0$ [6].

1.2. Устойчивость от входа к вектору состояния системы

Введем несколько определений [7].

Определение 2. Непрерывная функция $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ относится к классу $\mathcal{K}$, если она возрастающая и $\gamma(0) = 0$.

Определение 3. Непрерывная функция $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$ из класса $\mathcal{K}$ относится к классу $\mathcal{K}_\infty$, если $\gamma(r) \to \infty$ при $r \to \infty$.

Определение 4. Непрерывная функция $\beta : [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ относится к классу $\mathcal{KL}$, если для каждого фиксированного $s \geqslant 0$ функция $\beta(\cdot, s)$ относится к классу $\mathcal{K}$, и для каждого фиксированного $r \geqslant 0$ функция $\beta(r, \cdot)$ не возрастает, и $\beta(r,s) \to 0$ при $s \to \infty$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(x,u), \tag{3}$$

где переменная x из $\mathbb{R}^n$, а управление u из $\mathbb{R}^p$.

Определение 5. Система (3) называется устойчивой от входа к вектору состояния, если для каждого решения $x(t) = x(t,t_0,x_0,u)$ с начальным условием $x(t_0,t_0,x_0,u) = x_0$ и для каждого входа $u(t)$ существуют такие функции $\beta \in \mathcal{KL}$, $\gamma \in \mathcal{K}$, что выполняется:

$$\|x(t,t_0,x_0,u)\| \leqslant \beta(\|x_0\|, t - t_0) + \gamma(\|u\|_{[t_0,t]}) \quad \forall t \geqslant t_0,$$

где норма $\|\cdot\|_{[t_0,t]}$ задается следующим образом:

$$\|u\|_{[t_0,t]} = \max_{s\in[t_0,t]} \|u(s)\|$$

Определение 6. Функция $V(x)$ называется функцией Ляпунова для системы (3), если существуют функции α_1, $\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$ такие, что выполняется

$$\alpha_1(\|x\|) \leqslant V(x) \leqslant \alpha_2(\|x\|),$$

а полная производная по времени, вычисленная в силу системы (3), удовлетворяет условию

$$\dot V(x,u)\Big|_{(3)} \leqslant -\alpha_3(\|x\|) + \gamma(\|u\|),$$

где α_3 — положительно определенная функция, а $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$.

2. Декомпозиция систем дифференциальных уравнений и принцип сведения

В системе (1) проведем замену $w = x_2 - h(t,x_1)$ и $y = x_1 - v$

$$\begin{cases} \dot v = Av + f_1(t,v,h(t,v)), \\ \dot y = Ay + Y(t,v,y,w), \\ \dot w = Bw + Z(t,v,y,w), \end{cases}$$

где

$$Y(t,v,y,w) = f_1(t,v+y,w+h(t,v+y)) - f_1(t,v,h(t,v)),$$

$$Z(t,v,y,w) = f_2(t,v+y,w+h(t,v+y)) - f_2(t,v+y,h(t,v+y)) -$$

$$-\frac{\partial h}{\partial x_1}(t,v+y)[f_1(t,v+y,w+h(t,v+y)) - f_1(t,v+y,h(t,v+y))].$$

Для функции Z имеет место следующая оценка [4]:

$$\|Z(t,v,y,w)\| \leqslant \lambda N\|w\|.$$

Для этой системы существует интегральное многообразие $y = H(t,v,w)$, и функция $H(t,v,w)$ подчиняется неравенствам:

$$\|H(t,v,w)\| \leqslant \lambda a\|w\|,$$

$$\|H(t,v,w) - H(t,v,\bar w)\| \leqslant \lambda c\|w-\bar w\|, \qquad \|H(t,v,w) - H(t,\bar v,w)\| \leqslant b\|w\|\|v-\bar v\|$$

с некоторыми положительными константами a, c, b [4].

Замена переменных

$$\begin{cases} x_1 = v + H(t,v,z), \\ x_2 = z + h(t,x_1) = z + h(t,v+H(t,v,z)) \end{cases} \tag{4}$$

в системе (1) приводит ее к виду

$$\begin{cases} \dot v = Av + F(t,v), \\ \dot z = Bz + G(t,v,z), \end{cases} \tag{5}$$

где

$$F(t,v) = f_1(t,v,h(t,v)), \qquad G(t,v,z) = Z(t,v,H(t,v,z),z).$$

Таким образом, применение этой замены позволяет осуществить декомпозицию исходной системы, так как первое уравнение преобразованной системы (5) — уравнение

$$\dot{v} = Av + F(t, v) \tag{6}$$

стало независимым.

Принцип сведения [4]: устойчивость (асимптотическая устойчивость, неустойчивость) системы (1) эквивалента устойчивости (асимптотической устойчивости, неустойчивости) уравнения (6).

Здесь асимптотическая устойчивость и неустойчивость понимаются в смысле Ляпунова.

3. Принцип сведения в задаче устойчивости при постоянно действующих возмущениях

Используем представленный метод декомпозиции для доказательства следующего утверждения.

Теорема 1. Нулевое решение системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях тогда и только тогда, когда устойчиво при постоянно действующих возмущениях нулевое решение уравнения (6).

3.1. Схема обоснования

Произведя в системе (2) замену (4), получим

$$\begin{cases} \dot{\tilde{v}} = A\tilde{v} + F(t, \tilde{v}) + \tilde{R}(t, \tilde{v}, \tilde{z}), \\ \dot{\tilde{z}} = B\tilde{z} + G(t, \tilde{v}, \tilde{z}) + \tilde{T}(t, \tilde{v}, \tilde{z}), \end{cases} \tag{7}$$

$\tilde{R}(t, v, z)$, $\tilde{T}(t, v, z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{R}(t, v, z) = R(t, v + H(t, v, z), z + h(t, v + H(t, v, z))) - \\ - \frac{\partial H}{\partial z}[T(t, v + H(t, v, z), z + h(t, v + H(t, v, z))) - \\ - \frac{\partial h}{\partial x_1} R(t, v + H(t, v, z), z + h(t, v + H(t, v, z)))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t, v, z) = T(t, v + H(t, v, z), z + h(t, v + H(t, v, z))) - \\ - \frac{\partial h}{\partial x_1} R(t, v + H(t, v, z), z + h(t, v + H(t, v, z))). \end{aligned}$$

Имеет место следующее утверждение

Лемма 1. В предположении устойчивости при постоянно действующих возмущениях нулевого решения системы (6) для всякого положительного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$ таких, что для всякого решения системы (7) с начальным значением, удовлетворяющим неравенствам

$$\|\tilde{v}(t_0)\| \leqslant \delta_1, \quad \|\tilde{z}(t_0)\| \leqslant \delta_1,$$

при произвольных $\tilde{R}(t, \tilde{v}, \tilde{z})$, $\tilde{T}(t, \tilde{v}, \tilde{z})$, удовлетворяющих в области $t \geqslant t_0$, $\|\tilde{v}\| \leqslant \varepsilon$, $\|\tilde{z}\| \leqslant \varepsilon$ неравенствам

$$\|\tilde{R}(t, \tilde{v}, \tilde{z})\| \leqslant \delta_2, \quad \|\tilde{T}(t, \tilde{v}, \tilde{z})\| \leqslant \delta_2,$$

выполняются неравенства

$$\|\tilde{v}(t)\| \leqslant \varepsilon, \qquad \|\tilde{z}(t)\| \leqslant \varepsilon$$

при всех $t > t_0$.

Иначе в предположении устойчивости при постоянно действующих возмущениях нулевого решения системы (6) нулевое решение системы (5) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Используя лемму 1, доказывается теорема 1.

3.2. Примеры

Пример 1.

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x} + \mu \sin x = \mu^2 \cos x \sin x, \tag{8}$$

где μ — малый параметр.

Перейдем от уравнения к системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \mu \sin x_1 + \mu^2 \cos x_1 \sin x_1. \end{cases} \tag{9}$$

Интегральные многообразия $h(x_1)$ и $H(v,z)$ можно получить в виде:

$$h(x_1) = -\mu \sin x_1,$$

$$H(v,z) = -z + \mu(-\sin(z-v) + \sin v \ \ln z - \sin v \ Ci(z) + \cos v \ Si(z) - \sin v) + \ldots,$$

где

$$Si(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin s}{s} ds, \qquad Ci(z) = \int\limits_0^z \frac{\cos s}{s} ds.$$

После декомпозиции мы получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\mu \sin v, \\ \dot{z} = -z + z\mu \cos(v + H(v,z)). \end{cases} \tag{10}$$

По теореме 1 устойчивость нулевого решения при постоянно действующих возмущениях системы (9) эквивалентна устойчивости нулевого решения при постоянно действующих возмущениях первого уравнения системы (10):

$$\dot{v} = -\mu \sin v. \tag{11}$$

Докажем по достаточному признаку [6], что нулевое решение уравнения (11) устойчиво при постоянно действующих возмущениях. Для этого составим функцию Ляпунова и докажем, что она является положительно определенной функцией, ее полная производная по времени в силу уравнения (11) есть отрицательно определенная функция, и в некоторой области ее частные производные ограничены:

$$V(v) = 2\sin^2 \frac{v}{2}.$$

Это положительно определенная функция в некоторой окрестности нуля.

Полная производная по времени в силу уранвения (11) будет равна

$$\dot{V}(v) = -\mu \sin^2 v.$$

Это отрицательно определенная функция в некоторой окрестности нуля.

При этом частная производная

$$\frac{\partial V}{\partial v} = \sin v$$

ограничена.

Таким образом, нулевое решение уравнения (11) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, следовательно, такой же устойчивостью обладает и нулевое решение системы (9), и, что то же самое, нулевое решение уравнения (8).

4. Принцип сведения для устойчивости от входа к вектору состояния системы

Будем рассматривать систему (1) с управлением в правой части:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u, \\ \dot{x}_2 = Bx_2 + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u, \end{cases} \tag{12}$$

где $|g_i(u, v)| \leqslant \Gamma, \qquad (i = 1, 2)$.

Произведя в этой системе замену (4), получим

$$\begin{cases} \dot{v} = Av + F(v) + g_3(v, z)u, \\ \dot{z} = Bz + G(v, z) + g_4(v, z)u, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} g_3 = {} & g_1(v + H(v, z), z + h(v + H(v, z))) - \\ & -\frac{\partial H}{\partial z}[g_2(v + H(v, z), z + h(v + H(v, z))) - \\ & -\frac{\partial h}{\partial x_1} g_1(v + H(v, z), z + h(v + H(v, z)))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4 = {} & g_2(v + H(v, z), z + h(v + H(v, z))) - \\ & -\frac{\partial h}{\partial x_1} g_1(v + H(v, z), z + h(v + H(v, z))). \end{aligned}$$

Имеет место

Теорема 2. Система (12):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u, \\ \dot{x}_2 = Bx_2 + f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u \end{cases}$$

устойчива от входа к вектору состояния системы тогда и только тогда, когда устойчива от входа к вектору состояния система

$$\dot{v} = Av + F(v) + g_3(v, 0)u. \tag{14}$$

4.1. Схема обоснования

Используя неравенства для функций $h(x_1)$, $H(u, z)$, $Z(u, y, z)$, описанные в пунктах 1 и 2 и теорему об интегральных неравенствах [5], доказывается

Лемма 2. Система (13) устойчива от входа к вектору состояния тогда и только тогда, когда устойчива от входа к вектору состояния система (14).

Используя это предложение, доказывается теорема 2.

4.2. Примеры

Пример 2.

$$\ddot{x} + \dot{x} + \mu\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) = \mu^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + u. \tag{15}$$

Перейдем от уравнения к системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_2 - \mu\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + \mu^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + u. \end{cases} \tag{16}$$

Уравнения интегральных многообразий будут иметь следующий вид:

$$h(x_1) = -\mu\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right),$$

$$H(v,z) = -z + \mu\left(-\frac{z^5}{120} + \frac{z^4 v}{24} + z^3\left[\frac{1}{6} - \frac{v^2}{12}\right] + z^2\left[-\frac{1}{4} + \frac{v^3}{24}\right]\right) + \ldots.$$

После процедуры декомпозиции мы получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{v} = -\mu\left(v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!}\right) - \frac{\partial H}{\partial z}(v,z)u, \\ \dot{z} = -z + \mu\left(1 - \frac{(v+H)^2}{2!} + \frac{(v+H)^4}{4!}\right) + u. \end{cases} \tag{17}$$

Согласно теореме 2, устойчивость от входа к вектору состояния системы (16) эквивалентна устойчивости от входа к вектору состояния первого уравнения системы (17) при $z \to 0$, то есть уравнения:

$$\dot{v} = -\mu\left(v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!}\right) - \frac{\partial H}{\partial z}(v,0)u. \tag{18}$$

Составим теперь для уравнения (18) функцию Ляпунова:

$$V(v) = |v|.$$

Для этой функции выполняются неравенства:

$$\frac{|v|}{2} \leqslant V(v) \leqslant 2|v|.$$

Вычислим теперь полную производную этой функции по времени в силу системы (18):

$$\dot{V}(v,u) = -sgn(v)\mu\left(v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!}\right) - \frac{\partial H}{\partial z}(v,0)u, \quad v \geqslant 0.$$

Для этой функции выполняется неравенство:

$$\dot{V} \leqslant -\frac{\mu}{120}|v|^2 + c\|u\|_{[t_0,t]},$$

где c — константа, ограничивающая $\frac{\partial H}{\partial z}$.

Таким образом, уравнение (18) устойчиво от входа к вектору состояния, а значит и система (16), и, что то же самое, уравнение (15) устойчиво от входа к вектору состояния.

5. Приложения

5.1. Доказательство леммы 1

В предположениях леммы нулевое решение уравнения (6) устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Для уравнения $\dot{z} = Bz$ $(Re\lambda_i(B) < 0)$ существует функция Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы. Пусть $V(z) = (Vz, z)$, где V — матрица этой квадратичной формы. Вычислив полную производную по времени в силу этого уравнения, получим квадратичную форму с матрицей $VB + B^T V = -K$, где K — некоторая положительно определенная матрица. Искомая матрица V — решение матричного уравнения Ляпунова, которая может быть представлена в виде:

$$V = \int\limits_0^{+\infty} e^{B^t s} K e^{Bs} ds.$$

Покажем, что эта функция подходит для доказательства устойчивости при постоянно действующих возмущениях нулевого решения $z = 0$ второго уравнения системы (5) по достаточному признаку [6].

Ограниченность частных производных квадратичной формы в некоторой ограниченной области очевидна. Вычислим теперь полную производную этой функции по времени в силу уравнения

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_i}(B_i z + G_i(t, v(t), z)) = -(Kz, z) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_i} G_i(t, v(t), z) =$$

$$= -(Kz, z) + \sum_{i=1}^{n} 2(\gamma_{1i} z_1 + ... + \gamma_{ni} z_n) G_i(t, v(t), z),$$

где $\gamma_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ — элементы матрицы V. Так как

$$\|G(t, v, z)\| = \|Z(t, v, H(t, v, z), z)\| \leqslant \lambda N \|z\|,$$

то $\left\| \dfrac{\partial V}{\partial z_i} G_i(t, v, z) \right\| \leqslant 2\|V\| \lambda N \|z\|^2$, где λ достаточно мала. Если мы теперь в качестве K возьмем единичную матрицу, то $\|(Kz, z)\| = \|z\|^2$. При $\lambda \leqslant 2\|V\|N$ получим, что $\dot{V}$ — отрицательно определенная функция.

Таким образом, было доказано следующее утверждение.

В предположении устойчивости при постоянно действующих возмущениях нулевого решения системы (6) для всякого положительного $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, существуют два других положительных числа $\delta_1(\varepsilon) > 0, \delta_2(\varepsilon) > 0$ таких, что для всякого решения системы

$$\begin{cases} \dot{\overline{v}} = A\overline{v} + F(t, \overline{v}) + \overline{R}(t, \overline{v}), \\ \dot{\overline{z}} = B\overline{z} + G(t, \overline{v}, \overline{z}) + \overline{T}(t, \overline{v}, \overline{z}) \end{cases}$$

с начальными значениями, удовлетворяющими неравенствам

$$\|\overline{v}(t_0)\| \leqslant \delta_1, \quad \|\overline{z}(t_0)\| \leqslant \delta_1,$$

при произвольных $\overline{R}(t, \overline{v})$, $\overline{T}(t, \overline{v}, \overline{z})$, удовлетворяющих в области $t \geqslant t_0$, $\|\overline{v}\| \leqslant \varepsilon$, $\|\overline{z}\| \leqslant \varepsilon$ неравенствам

$$\|\overline{R}(t, \overline{v})\| \leqslant \delta_2, \quad \|\overline{T}(t, \overline{v}, \overline{z})\| \leqslant \delta_2,$$

выполняются неравенства

$$\|\overline{v}(t)\| \leqslant \varepsilon, \qquad \|\overline{z}(t)\| \leqslant \varepsilon$$

при всех $t > t_0$.

В силу произвольности $\overline{R}(t, \overline{v})$ можно утверждать, что утверждение леммы 1 доказано.

5.2. Доказательство теоремы 1

Устойчивость нулевого решения системы (6) эквивалентна устойчивости нулевого решения системы (5). Рассмотрим решения систем (2) и (7). Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно ограничить $\|\overline{x}_1(t_0)\|$ и $\|\overline{x}_2(t_0)\|$ так, что $\|\tilde{v}(t_0)\|$ и $\|\tilde{z}(t_0)\|$ будут меньше $\delta_1(\varepsilon)$. Также докажем, что для того же $\varepsilon > 0$ можно ограничить функции R, T в ε-окрестности нуля так, что из этого будет следовать ограниченность функций $\tilde{R}, \tilde{T}$ числом $\delta_2(\varepsilon)$ в ε-окрестности нуля. Вследствие выполнения неравенств

$$\|x_1\| = \|v + H(t, v, z)\| \leqslant \|v\| + \lambda a \|z\|,$$

$$\|x_2\| = \|z + h(t, x_1)\| \leqslant \|z\| + \lambda\Delta\|x_1\| \leqslant \lambda\Delta\|v\| + (1 + \lambda^2\Delta a)\|z\|,$$

а также устойчивости при постоянно действующих возмущениях нулевого решения (5), это будет означать устойчивость при постоянно действующих возмущениях нулевого решения системы (1) по определению.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$, по числу $\overline{\varepsilon} = \min\left\{\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{1+\lambda a}, \dfrac{\varepsilon}{\lambda^2\Delta a + \lambda\Delta + 1}\right\}$ выберем δ_1 так, чтобы имела место устойчивость нулевого решения системы (5). Введем следующее обозначение:

$$\xi = \min\left\{\frac{\delta_1}{a\lambda}, \delta_1\right\}.$$

Найдем такое $\sigma > 0$, что из условия $\|\theta\| \leqslant \sigma$ следовало бы, что $\|h(t, \theta)\| \leqslant \frac{\xi}{3}$. Это можно сделать вследствие того, что $h(t, 0) = 0$.

Если теперь

$$\|x_1(t_0)\| \leqslant \min\left\{\sigma, \frac{\delta_1}{3}\right\}, \qquad \|x_2(t_0)\| \leqslant \frac{\xi}{3},$$

то будет выполняться

$$\|z(t_0)\| \leqslant \delta_1, \qquad \|v(t_0)\| \leqslant \delta_1.$$

Таким образом, из условия $\|x_i(t_0)\| \leqslant \min\left\{\sigma, \dfrac{\delta_1}{3}, \dfrac{\xi}{3}\right\} = \min\left\{\sigma, \dfrac{\xi}{3}\right\}$ $(i = 1, 2)$ следует, что $\|v(t_0)\| \leqslant \delta_1, \|z(t_0)\| \leqslant \delta_1$.

Введем новое обозначение

$$\overline{\xi} = \min\left\{\frac{\overline{\varepsilon}}{a\lambda}, \overline{\varepsilon}\right\}.$$

Найдем такое $\sigma > 0$, что из условия $\|\theta\| \leqslant \sigma$ следовало бы, что $\|h(t, \theta)\| \leqslant \frac{\overline{\xi}}{3}$. Обозначим теперь

$$\tilde{\varepsilon} = \min\left\{\overline{\sigma}, \frac{\overline{\xi}}{3}\right\}.$$

Если мы теперь по числу $\tilde{\varepsilon}$ выберем число $\delta_2(\tilde{\varepsilon})$, то получим, что из условий

$$\|R(t, x_1, x_2)\| \leqslant \delta_2(\tilde{\varepsilon}), \qquad \|T(t, x_1, x_2)\| \leqslant \delta_2(\tilde{\varepsilon})$$

в области

$$\|x_1\| = \|v + H(t, v, z)\| \leqslant \tilde{\varepsilon}, \qquad \|x_2\| = \|z + h(t, v + H(t, v, z))\| \leqslant \tilde{\varepsilon}$$

следует, что

$$\|R(t, v, z)\| \leqslant \delta_2(\tilde{\varepsilon}) \leqslant \delta_2(\overline{\varepsilon}), \qquad \|T(t, v, z)\| \leqslant \delta_2(\tilde{\varepsilon}) \leqslant \delta_2(\overline{\varepsilon}),$$

если

$$t > t_0, \qquad \|v\| \leqslant \overline{\varepsilon}, \qquad \|z\| \leqslant \overline{\varepsilon}.$$

Для функций $\tilde{R}$ и $\tilde{T}$ такую же оценку можно получить, взяв вместо $\delta_2(\tilde{\varepsilon})$ число $\dfrac{\delta_2(\tilde{\varepsilon})}{3c^2}$, где

$$c = \max\left\{\left\|\frac{\partial h}{\partial x_1}(t, v, z)\right\|, \left\|\frac{\partial H}{\partial z}(t, v, z)\right\|, 1\right\}, \qquad (\|v\| \leqslant \overline{\varepsilon}, \|z\| \leqslant \overline{\varepsilon}).$$

Таким образом, получили, что из устойчивости нулевого решения при постоянно действующих возмущениях системы (6) следует аналогичная устойчивость нулевого решения системы (1).

Докажем теперь, что из неустойчивости нулевого решения при постоянно действующих возмущениях системы (6) следует аналогичная неустойчивость нулевого решения системы (1).

Допустим, что нулевое решение системы (6) неустойчиво при постоянно действующих возмущениях. Так как первая подсистема системы (6) — это уравнение движения по интегральному многообразию $x_2 = h(t, x_1)$ системы (1), то система (1) не может быть устойчивой.

5.3. Доказательство леммы 2

Рассмотрим первую подсистему системы (13)

$$\dot{v} = Av + F(v) + g_3(v, z)u. \tag{19}$$

и систему (14).

Допустим, система (14) устойчива от входа к вектору состояния. Тогда для нее существует функция Ляпунова [7], то есть существует такая функция $V(v)$, что для нее существуют такие функции α_1, α_2, $\gamma \in \mathcal{K}_\infty$ и положительно определенная функция α_3, что выполняется:

1. $\alpha_1(\|v\|) \leqslant V(v) \leqslant \alpha_2(\|v\|)$,
2. $\dot{V}(v, u)\Big|_{(14)} \leqslant -\alpha_3(\|v\|) + \gamma(\|u\|)$.

Покажем, что эта функция является функцией Ляпунова и для системы (19). Первое условие выполняется, так как оно не зависит от системы. Вычислим полную производную по времени функции $V(v)$ в силу системы (19). Имеем

$$\dot{V}(v, u)\Big|_{(19)} = \frac{\partial V}{\partial v}(Av + F(v) + g_3(v, z)u) =$$
$$= \frac{\partial V}{\partial v}(Av + F(v) + g_3(v, 0)u - g_3(v, 0)u + g_3(v, z)u) =$$
$$= \dot{V}(v, u)\Big|_{(14)} + g_3(v, z)u - g_3(v, 0)u \leqslant$$

$$\leqslant -\alpha_3(\|v\|) + \gamma(\|u\|) + \|g_3(v,z) - g_3(v,0)\|\|u\| \leqslant -\alpha_3(\|v\|) + \gamma(\|u\|) + 2\Gamma\|u\|,$$

но $\gamma(\|u\|) + 2\Gamma\|u\| \in \mathcal{K}_\infty$, а функция $V(t,v)$ является функцией Ляпунова для системы (19), и тогда система (19) устойчива от входа к вектору состояния по критерию [7]. Таким образом, из устойчивости от входа к вектору состояния системы (14) следует устойчивость от входа к вектору состояния системы (19).

Если теперь предположить, что система (19) устойчива от входа к вектору состояния и построить для нее функцию Ляпунова, то, проведя аналогичные оценки, получим, что из устойчивости от входа к вектору состояния системы (19) следует устойчивость от входа к вектору состояния системы (14).

Рассмотрим вторую подсистему системы (13):

$$\dot{z} = Bz + G(v,z) + g_4(v,z)u.$$

Общее решение этой системы выглядит следующим образом:

$$z(t,t_0,z_0,u) = e^{B(t-t_0)}z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{B(t-s)}\left[G(v(s),z(s)) + g_4(v(s),z(s))u(s)\right]ds.$$

Тогда

$$\|z(t,t_0,z_0,u)\| \leqslant Ke^{-\chi(t-t_0)}\|z_0\| + \int\limits_{t_0}^{t} Ke^{-\chi(t-s)}\left[\lambda N\|z(s)\| + \Gamma\|u(s)\|\right]ds,$$

где χ — некоторая положительная константа.

Допустим, выполняется условие $\lambda < \dfrac{\chi}{KN}$.

Тогда, в силу теоремы об интегральных неравенствах [5], можно получить следующую оценку:

$$\|z(t,t_0,z_0,u)\| \leqslant Ke^{(K\lambda N-\chi)(t-t_0)}\|z_0\| + \frac{K\Gamma}{\chi}\|u\|_{[t_0,t]}\left(1 - \frac{\chi K\lambda N}{(\chi - K\lambda N)(2\chi - K\lambda N)}\right).$$

Из полученных оценок следует устойчивость системы (13) в предположениях устойчивости системы (14). Из неустойчивости системы (14) следует неустойчивость (19) — первой подсистемы системы (13), а значит, и всей системы. Предложение доказано.

5.4. Доказательство теоремы 2

Из устойчивости системы (14) по лемме 2 следует устойчивость системы (13). Из этого факта и из выполнения неравенств

$$\|x_1(t)\| \leqslant \|v(t)\| + \|H(v,z)\| \leqslant \|v(t)\| + \lambda a\|z(t)\|,$$

$$\|x_2(t)\| \leqslant \|z(t)\| + \|h(x_1)\| \leqslant \|z(t)\| + \lambda\Delta\|x_1(t)\| \leqslant \lambda\Delta\|v(t)\| + (1+\lambda^2\Delta N)\|z(t)\|$$

сразу следует, что система (12) устойчива от входа к вектору состояния, что завершает доказательство.

Литература

[1] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

[2] Плисс В.А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1977. 304 с.

[3] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.

[4] Sobolev V.A. Integral manifolds and decomposition of nonlinear differential systems // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1988. № 23. P. 73–79.

[5] Воропаева Н.В., Соболев В.А. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем. М.: Физматлит, 2009. 256 с.

[6] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

[7] Michael Malisoff, Frédéric Mazenc. Constructions of Strict Lyapunov Functions. London: Springer–Verlag, 2009. 386 p.

Поступила в редакцию 22/*III*/2011;
в окончательном варианте — 22/*III*/2011.

INTEGRAL MANIFOLDS AND THE REDUCTION PRINCIPLE

 V.A. Sobolev,[4] D.M. Shchepakin[5]

The paper is devoted to the application of geometric decomposition method to the order reduction of problems of stability under persistent disturbances and input-to-state stability.

Key words: integral manifolds, reduction principle, stability under persistent disturbances, input-to-state stability.

Paper received 22/*III*/2011.
Paper accepted 22/*III*/2011.

[4]Sobolev Vladimir Andreevich (`hsablem@yahoo.com`), the Dept. of Technical Cybernetics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russian Federation.

[5]Shchepakin Denis Mihailovich (`sowiks@yandex.ru`), the Dept. of Differential Equations and Theory of Management, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.