УДК 517.51+517.98

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФРЕЙМОВ ПАРСЕВАЛЯ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2011 И.С. Рябцов[1]

В работе вводятся два новых класса фреймов Парсеваля в произвольных гильбертовых пространствах конечной или бесконечной размерности: простые и составные фреймы Парсеваля. Доказываются теоремы о представлении составных фреймов Парсеваля при помощи суммирования простых. Описываются различные классы простых фреймов Парсеваля: ортонормированные базисы, равноугольные фреймы Парсеваля и некоторые другие.

Ключевые слова: фреймы Парсеваля, эквивалентность фреймов, представление фреймов, равноугольные фреймы.

Введение

Имеем гильбертово пространство $\mathbb{H}$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и согласованной нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ и $\dim \mathbb{H} = N$.

Определение. Множество векторов $F = \{ f_i \}_{i=1}^{M}$ в пространстве $\mathbb{H}$ называется *фреймом*, если существуют константы $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} |\langle x, f_i \rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Перенесем данное определение на случай $\dim \mathbb{H} = \infty$.

Определение. Последовательность векторов $F = \{ f_i \}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathbb{H}$ называется *фреймом*, если существуют константы $0 < A \leqslant B < \infty$ такие, что

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, f_i \rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}. \tag{1$'$}$$

Можно объединить два предыдущих определения (1) и (1$'$) в общее для конечномерных и бесконечномерных пространств определение фрейма, которое в дальнейшем мы будем использовать как основное

$$A\|x\|^2 \leqslant \sum_{i \in \mathfrak{I}} |\langle x, f_i \rangle|^2 \leqslant B\|x\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}, \tag{2}$$

$$\mathfrak{I} = \{1, \ldots, M\} \quad \text{или} \quad \mathfrak{I} = \mathbb{N}.$$

[1]Рябцов Игорь Сергеевич (tinnulion@mail.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Числа A и B называются *границами фрейма.* Они определены неоднозначно, супремум множества всех нижних и инфимум множества всех верхних границ фрейма называются *оптимальными границами фрейма.*

Правая часть двойного неравенства (2) выполняется для любого конечного множества векторов $F = \{f_i\}_{i=1}^{M}$ как следствие неравенства Коши — Буняковского [1; 2]

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle x, f_i\rangle|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{M} \|f_i\|^2\right) \|x\|^2, \quad x \in \mathbb{H}.$$

Выполнение левой части двойного неравенства (2) влечет полноту системы $\overline{\operatorname{span}}\, F = \mathbb{H}$. Действительно, если $x \perp f_i$ для всех i, то $\|x\| = 0$. Условие полноты оказывается и условием достаточности [1; 2]. Любой набор векторов F пространства $\mathbb{H}$ является фреймом для $\overline{\operatorname{span}}\, F$.

Будем называть фрейм *равномерным,* если $\|f_i\| = \|f_j\|$ для любых i, j. Если, в частности, нормы всех векторов фрейма равны единице, то такой фрейм будем называть *нормированным.* Если оптимальные границы фрейма совпадают ($A = B$), то фрейм называется *жестким.* Если при этом $A = B = 1$, то фрейм будем называть *фреймом Парсеваля.*

Если оптимальные нижняя и верхняя границы фрейма совпадают, то вместо двойного неравенства выполняется равенство

$$A\,\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathfrak{I}} |\langle x, f_i \rangle|^2, \quad \mathfrak{I} = \{1, \ldots, M\} \quad \text{или} \quad \mathfrak{I} = \mathbb{N}. \tag{3}$$

Для жестких фреймов выполняется эквивалентное (3) равенство

$$Ax = \sum_{i \in \mathfrak{I}} \langle x, f_i \rangle f_i, \quad \mathfrak{I} = \{1, \ldots, M\} \quad \text{или} \quad \mathfrak{I} = \mathbb{N}. \tag{4}$$

С каждым фреймом связаны три оператора: *оператор анализа*, *оператор синтеза* и *фреймовый оператор.* В конечномерном случае это будут просто матрицы.

- оператор синтеза $F : \{x_i\}_{i \in \mathfrak{I}} \mapsto \sum\limits_{i \in \mathfrak{I}} x_i\, f_i$ — сюръекция из $\mathbb{H}$ в $\ell_2^{\dim \mathbb{H}}$, заметим, что $F(e_k) = f_k$, $k \in \mathfrak{I}$, если e_k — k-й орт пространства $\mathbb{H}$;
- оператор анализа $F^* : x \mapsto \{\langle x, f_i\rangle\}_{i=1}^{M}$ — инъекция из $\ell_2^{\dim \mathbb{H}}$ в $\mathbb{H}$, сопряженный к F;
- фреймовый оператор $S = FF^*$, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.

Замечание. В конечномерных пространствах при $M < \infty$ вышеназванные операторы можно представить обычными матрицами. В частности, произведение $G = F^*F$ дает матрицу Грама системы векторов.

Рассмотрим последний оператор более подробно

$$Sx = FF^*x = \sum_{i \in \mathfrak{I}} \langle x, f_i\rangle\, f_i\,,$$

$$\langle Sx, x\rangle = \langle \sum_{i \in \mathfrak{I}} \langle x, f_i\rangle\, f_i,\ x\rangle = \sum_{i \in \mathfrak{I}} |\langle x, f_i\rangle|^2,\ x \in \mathbb{H}.$$

Следовательно, неравенства (2) и (3) можно переписать с использованием введенных операторов

$$A\,\langle x, x\rangle \leqslant \langle Sx, x\rangle \leqslant B\,\langle x, x\rangle\,,$$

$$AI \leqslant S \leqslant BI\,,$$
$$A\,\langle x,x\rangle = \langle Sx,x\rangle\,, \quad S = AI\,.$$

Здесь имеется в виду стандартная частичная упорядоченность самосопряженных операторов.

В обзоре теории мы не придавали значение наличию или отсутствию коллинеарных векторов во фреймах, поскольку это не влияет на формулировки определений или свойств. Но в дальнейшем будем стараться избегать коллинеарных векторов.

Коллинеарность векторов является отношением эквивалентности, поэтому любой фрейм можно представить в виде объединения непересекающихся классов

$$F = \bigcup_{k\,\in K} F_k\,.$$

Определим оператор V, который позволяет получить из фрейма, содержащего коллинеарные вектора, фрейм без коллинеарных векторов

$$V(F) = \bigcup_{k\,\in K} \{\, W\,(F_k)\,\}\ . \tag{5}$$

Оператор W действует на класс коллинеарных векторов, отображая его в единственный вектор

$$W(\{\alpha_p f\}_{p\,\in\,P}) = \left\{ \sqrt{\sum_{p\,\in\,P} \alpha_p^2} \cdot f \right\}, \quad \alpha_p \neq 0\,.$$

Оператор V действует одинаково для фреймов в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Для конечных фреймов в конечномерных пространствах оператор V можно записать в рекуррентном виде

$$V(F) = V\left(F \setminus \{f_i,\, f_j\} \cup \left\{ \sqrt{\|f_i\|^2 + \|f_j\|^2}\ \frac{f_i}{\|f_i\|} \right\} \right), \tag{6}$$
$$f_i, f_j \in F, \quad \langle\, f_i, f_j\,\rangle = \|f_i\|\|f_j\|, \quad i \neq j\,.$$

Легко видеть, что оператор V подобран таким образом, чтобы не менять оптимальные границы фрейма, на который он действует.

1. Фреймы Парсеваля в конечномерных пространствах

Начнем с наиболее простого случая — фреймы Парсеваля в пространстве $\mathbb{H} = \ell_2^N$, состоящие из M элементов. Очевидно, что $M \geqslant N$, иначе невозможна полнота.

Определение. Назовем фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *составным*, если существует набор неотрицательных констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что система векторов $F_\alpha = \{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ также фрейм Парсеваля, при этом хотя бы одно α_i равно нулю.

Определение. Назовем фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ *простым*, если он не является составным.

Таким образом множество всех фреймов Парсеваля разделилось на два непересекающихся класса. Докажем, что принадлежность фрейма некоторому классу является инвариантом относительно любого ортогонального преобразования.

Свойство. Для любой ортогональной матрицы Q система векторов $\{Qf_i\}_{i=1}^M$ является простым фреймом Парсеваля тогда и только тогда, когда $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсеваля.

Доказательство. Докажем необходимость. Предположим, что $\{f_i\}_{i=1}^M$ — простой фрейм Парсеваля, а $\{Qf_i\}_{i=1}^M$ — составной фрейм. Тогда, по определению, существует набор коэффициентов трансформации $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что фрейм $\{\alpha_i Qf_i\}_{i=1}^M$ — фрейм Парсеваля, при этом какая-то из констант α_i равна нулю. Но тогда согласно определению (4) для фрейма Парсеваля

$$x = \sum_{i=1}^M \langle x, \alpha_i Q f_i \rangle \alpha_i Q f_i = Q \sum_{i=1}^M \left\langle QQ^T x, Q\alpha_i f_i \right\rangle \alpha_i f_i =$$

$$= Q \sum_{i=1}^M \left\langle Q^T x, \alpha_i f_i \right\rangle \alpha_i f_i = \sum_{i=1}^M \langle x, \alpha_i f_i \rangle \alpha_i f_i \,.$$

Получаем, что система $\{f_i\}_{i=1}^M$ — составной фрейм Парсеваля, что противоречит первоначальному предположению.

Достаточность получается из необходимости при помощи замены $\{f_i\}_{i=1}^M \to \left\{Q^{-1} f_i\right\}_{i=1}^M$. Свойство полностью доказано.

Определение. *Суммой* фреймов $F_1 = \left\{f_i^{F_1}\right\}_{i=1}^{M_1}$ и $F_2 = \left\{f_i^{F_2}\right\}_{i=1}^{M_2}$ будем называть фрейм, состоящий из векторов

$$F_1 \oplus F_2 = V\left(\left\{f_i^{F_1}\right\}_{i=1}^{M_1} \cup \left\{f_i^{F_2}\right\}_{i=1}^{M_2}\right).$$

Число векторов в результирующем фрейме не превосходит $M_1 + M_2$. Операция суммирования является коммутативной и ассоциативной. Разумеется, что

$$F \oplus F = F\,.$$

Отметим тот факт, что в данной операции можно раскрывать скобки без каких-либо ограничений. Рассмотрим *взвешенную сумму* пары фреймов F_1 и F_2

$$\lambda_1 F_1 \oplus \lambda_2 F_2, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1\,.$$

Особенностью этой операции является тот факт, что она превращает пару фреймов Парсеваля в новый фрейм Парсеваля. Данная операция является коммутативной, но не ассоциативной.

Замечание. Операция взвешенного суммирования дает новый метод получения равномерных фреймов Парсеваля. Достаточно складывать имеющиеся простые равномерные фреймы Парсеваля и выбирать весовые коэффициенты так, чтобы суммарный фрейм остался равномерным.

Теорема. Любой фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ без коллинеарных векторов можно представить в виде взвешенной суммы конечного числа простых фреймов Парсеваля.

Доказательство. Случай, когда F является простым фреймом тривиален, и разложение состоит из одного элемента. Далее будем считать, что F — составной фрейм. Докажем, что любой составной фрейм Парсеваля можно представить в виде суммы двух простых или составных фреймов. По определению составного фрейма, существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что существует $1 \leqslant k \leqslant M$, для которого $\alpha_k = 0$, и система векторов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля.

Рассмотрим двойственный набор коэффициентов $\{\beta_i\}_{i=1}^M$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{\alpha_{max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{max}^2 - 1}}, \quad \alpha_{max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant M} |\alpha_i|.$$

Двойственная система $F_\beta = \{\beta_i f_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля

$$\sum_{i=1}^M \langle x, \beta_i f_i \rangle \beta_i f_i = \sum_{i=1}^M \langle x, \sqrt{\frac{\alpha_{max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{max}^2 - 1}} f_i \rangle \sqrt{\frac{\alpha_{max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{max}^2 - 1}} f_i =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{max}^2 - 1} \sum_{i=1}^M \left(\alpha_{max}^2 - \alpha_i^2\right) \langle x, f_i \rangle f_i =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{max}^2 - 1} \left(\alpha_{max}^2 \sum_{i=1}^M \langle x, f_i \rangle f_i - \sum_{i=1}^M \langle x, \alpha_i f_i \rangle \alpha_i f_i \right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{max}^2 - 1} \left(\alpha_{max}^2 x - x\right) = x.$$

Покажем корректность определения набора $\{\beta_i\}_{i=1}^M$. Докажем, что для всех $1 \leqslant k \leqslant M$ константы β_k имеют смысл и являются вещественными числами, при этом набор $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ не совпадает с набором $\{\beta_i\}_{i=1}^M$. Для этого достаточно доказать, что $\alpha_{max} > 1$ при любом выборе системы $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$, так как числитель неотрицателен, по определению α_{max}.

Предположим противное: существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ такой, что существует $1 \leqslant k \leqslant M$, для которого $\alpha_k = 0$, и система векторов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля, но при этом $\alpha_{max} \leqslant 1$. Оценим сверху границу фрейма $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$

$$\sum_{i=1}^M |\langle x, \alpha_i f_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^M |\alpha_i|^2 |\langle x, f_i \rangle|^2 < \alpha_{max}^2 \sum_{i=1}^M |\langle x, f_i \rangle|^2 = \alpha_{max}^2.$$

Строгое неравенство обеспечивается наличием нулевых компонент в наборе $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$. Противоречие с первоначальным предположением доказывает то, что $\alpha_{max} > 1$.

Для любой пары двойственных наборов $\{\alpha_i\}_{i=1}^M$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^M$ существуют номера $1 \leqslant k \leqslant M$ и $1 \leqslant p \leqslant M$ такие, что $k \neq p$, и при этом

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_k \neq 0, \quad \alpha_p \neq 0, \quad \beta_p = 0. \tag{7}$$

Это свойство следует из определения соотвествующих наборов. Оно завершает доказательство корректности определения набора $\{\beta_i\}_{i=1}^M$.

Любой составной фрейм Парсеваля раскладывается в объединение фреймов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^M$ и $\{\beta_i f_i\}_{i=1}^M$. Возьмем конкретные значения λ_α и λ_β

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\alpha_{max}}, \quad \lambda_\beta = \frac{\sqrt{\alpha_{max}^2 - 1}}{\alpha_{max}}, \quad \lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 = \frac{1}{\alpha_{max}^2} + \frac{\alpha_{max}^2 - 1}{\alpha_{max}^2} = 1$$

и вычислим $F_\alpha \oplus F_\beta$. Поскольку фрейм F коллинеарных векторов не содержит, то единственными парами коллинеарных векторов в сумме могут быть только $\alpha_k f_k$ и $\beta_k f_k$ для $1 \leqslant k \leqslant M$. Подействуем на эту пару оператором V согласно (2)

$$V\left(\{\lambda_\alpha \alpha_i f_i, \lambda_\beta \beta_i f_i\}\right) = \sqrt{\|\lambda_\alpha \alpha_i f_i\|^2 + \|\lambda_\beta \beta_i f_i\|^2}\, \frac{\lambda_\alpha \alpha_i f_i}{\|\lambda_\alpha \alpha_i f_i\|} = \sqrt{\lambda_\alpha^2 \alpha_i^2 + \lambda_\beta^2 \beta_i^2}\, f_i\,,$$

$$\lambda_\alpha^2 \alpha_i^2 + \lambda_\beta^2 \beta_i^2 = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_{max}^2} + \frac{\alpha_{max}^2 - 1}{\alpha_{max}^2} \cdot \frac{\alpha_{max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{max}^2 - 1} = \frac{\alpha_i^2 + \alpha_{max}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{max}^2} = 1\,.$$

Таким образом мы получили представление фрейма F в виде

$$F = \lambda_\alpha F_\alpha \oplus \lambda_\beta F_\beta\,. \tag{8}$$

Если полученные фреймы F_α и F_β являются простыми, то процесс разложения окончен. В противном случае, чтобы получить разложение в сумму простых фреймов Парсеваля, нужно применить приведенный выше метод несколько раз. Введем оператор D по следующей рекурсивной формуле:

$$D\left(F, k\right) = \begin{cases} \lambda_\alpha\, D\left(F_\alpha, k+1\right) \oplus \lambda_\beta\, D\left(F_\beta, k+1\right)\,, & F \text{ — составной фрейм,} \\ F\,, & F \text{ — простой фрейм.} \end{cases}$$

Остается доказать, что глубина рекурсии k не превосходит некоторой константы. Согласно только что доказаному свойству (7), при увеличении k на единицу также на единицу уменьшается число векторов во фреймах F_α и F_β

$$|F_\alpha| \leqslant |F| - 1\,, \quad |F_\beta| \leqslant |F| - 1\,.$$

Исходя из того, что фреймы Парсеваля с наименьшим числом векторов — это ортонормированные базисы, получаем оценку $k \leqslant M - N$, где M — размерность фрейма при $k = 0$, а N — размерность пространства.

Замечание. Доказанная теорема гарантирует существование представления фрейма Парсеваля в виде суммы, а также его конечность, но единственность представления из теоремы не следует. В качестве примера рассмотрим составной фрейм Парсеваля в пространстве ℓ_2^2 со следующей матрицей:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$FF^* = I\,.$$

Данный фрейм не содержит коллинеарных векторов, поэтому, согласно только что доказанной теореме, его можно представить в виде взвешенной суммы конечного числа простых фреймов Парсеваля. Приведем пример представления в виде суммы двух простых фреймов Парсеваля

$$\alpha = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2},\ 0,\ 0,\ 0\right\}, \quad \beta = \left\{0,\ 0,\ 0,\ \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right\},$$

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad F_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_\alpha F_\alpha^* = F_\beta F_\beta^* = I\,, \quad F = \frac{1}{\sqrt{2}}\, F_\alpha \oplus \frac{1}{\sqrt{2}}\, F_\beta\,.$$

Мы получили разложение исходного фрейма на два фрейма Мерседес-Бенц (их простота очевидна). Теперь заметим, что

$$\langle f_1, f_4\rangle = \langle f_2, f_5\rangle = \langle f_3, f_6\rangle = 0\,.$$

Исходный фрейм состоит их трех ортогональных подсистем. Приведем пример представления в виде суммы трех простых фреймов Парсеваля

$$\alpha = \left\{\sqrt{3},\ 0,\ 0, \sqrt{3},\ 0,\ 0\right\}, \beta = \left\{0, \sqrt{3},\ 0,\ 0, \sqrt{3},\ 0\right\}, \gamma = \left\{0,\ 0, \sqrt{3},\ 0,\ 0, \sqrt{3}\right\},$$

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad F_\beta = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad F_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Класс равноугольных фреймов Парсеваля

Определение. Будем называть нормированный фрейм $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ в пространстве ℓ_2^N *равноугольным*, если существует константа $c \in [\,0, 1)$ такая, что выполняется следующее условие:

$$|\langle f_i, f_j\rangle| = \begin{cases} 1, & i = j\,, \\ c, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{9}$$

В работах [5; 7] доказывается, что произвольный равноугольный фрейм является жестким тогда и только тогда, когда

$$c = \sqrt{\frac{M-N}{N\,(M-1)}}\,. \tag{10}$$

Из формулы видно, что для любой пары M и N существует не более одного равноугольного жесткого фрейма с точностью до ортогонального преобразования. Известно [5], что для большинства таких пар жесткие фреймы не существуют. Примерами равноугольных жестких фреймов являются ортонормированные базисы, системы Мерседес-Бенц и другие [5].

Теорема. Для любого равноугольного жесткого фрейма $F = \{f_i\}_{i=1}^M$ существует один и только один фрейм Парсеваля, получаемый перенормировкой $\{\sqrt{\frac{N}{M}}f_i\}_{i=1}^M$ векторов фрейма, причем этот фрейм является простым.

Доказательство. Тот факт, что система $\{\sqrt{\frac{N}{M}}f_i\}_{i=1}^M$ является фреймом Парсеваля, является тривиальным следствием того, что граница любого нормированного жесткого фрейма равна $\frac{M}{N}$ [2].

Докажем, что полученный фрейм простой. Воспользуемся определением (2). Подставим вместо вектора x каждый из векторов f_k и получим необходимое условие того, что фрейм является фреймом Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{M} |\langle f_k, \alpha_i \sqrt{\tfrac{N}{M}} f_i\rangle|^{\,2} = \sqrt{\tfrac{N}{M}} \sum_{i=1}^{M} |\alpha_i|^{\,2} |\langle f_k, f_i\rangle|^{\,2} = ||f_k||^{\,2} = 1\,, \quad k = \overline{1, M}\,.$$

Введем следующее обозначение $y_i = |\alpha_i|^2$. Получаем систему линейных уравнений

$$Cy = e\,, \quad C = \sqrt{\tfrac{N}{M}}\,\mathrm{circ}\left\{1, c^2, \ldots, c^2\right\}, \quad e = \{1\,,\,\ldots\,,\,1\}^T\,.$$

Матрица C является невырожденной при $c^2 \neq 1$, система уравнений имеет единственное решение. Подстановкой легко проверить, что решение всегда положительно и имеет следующий вид:

$$y_k = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}c^2(M-1)+\sqrt{M}}\,,$$

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}c^2(M-1)+\sqrt{M}}}\,, \quad k = \overline{1, M}\,.$$

Это противоречит определению составного фрейма, где требуется хотя бы одно значение α_k, равное нулю, так как это автоматически влечет равенство нулю всех констант. Полученное противоречие доказывает, что полученный фрейм Парсеваля простой.

Отметим важное для дальнейшего изложения утверждение, касающееся существования равноугольных фреймов.

Утверждение. Равноугольные фреймы при $c > 0$ существуют только в конечномерных пространствах.

Доказательство. Предположим, что $\mathbb{H}$ — произвольное бесконечномерное гильбертово пространство. Пусть $F = \{f_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ — равноугольный фрейм в этом пространстве, и выполняется двойное неравенство (2). Поскольку $\dim \mathbb{H} = \infty$, то $|\mathfrak{I}| = \infty$, как минимум это множество счетное. Положив в определении (3) фрейма $x = f_1$, получим нарушение неравенства Бесселя

$$\sum_{\mathfrak{I}} |\langle\, x, f_i \rangle|^2 = \sum_{\mathfrak{I}} |\langle\, f_1, f_i \rangle|^2 = 1 + c^2\, |\mathfrak{I}| = \infty\,.$$

3. Другие примеры простых фреймов

Класс простых фреймов не ограничивается ортонормированными базисами и равноугольными фреймами Парсеваля.

Пример. Рассмотрим следующую матрицу:

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Столбцы этой матрицы образуют фрейм Парсеваля в пространстве ℓ_2^3

$$S = FF^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,.$$

Отметим основные свойства построенного фрейма

$$\|f_1\|_2^2 = \|f_2\|_2^2 = \|f_3\|_2^2 = \frac{2}{3}\,, \quad \|f_4\|_2^2 = 1\,,$$

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle f_2, f_3\rangle = \langle f_1, f_3\rangle = -\frac{1}{3}\,,$$

$$\langle f_1, f_4\rangle = \langle f_2, f_4\rangle = \langle f_3, f_4\rangle = 0\,.$$

Этот фрейм не является ни равномерным, ни равноугольным, но при этом является простым фреймом Парсеваля. Действительно, если бы он был составным, то существовал бы набор $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ такой, что $\{\alpha_1 f_1, \alpha_2 f_2, \alpha_3 f_3, \alpha_4 f_4\}$ — фрейм Парсеваля и хотя бы одна компонента этого набора равна нулю. Без ограничения общности можно считать, что нулю будет равна одна и только одна компонента вектора α, в противном случае оставшаяся система векторов не может быть полной в ℓ_2^3.

Если теперь предположить, что $\alpha_4 = 0$, то оставшаяся система векторов не будет полной в ℓ_2^3. Если какая-то из компонент α_1, α_2 или α_3 равна нулю, то оставшаяся система будет содержать три неортогональных вектора, а фреймы Парсеваля при $M = N$ исчерпываются ортонормированными базисами. Следовательно, занулить какую-либо компоненту набора вектора $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ нельзя, и исходный фрейм Парсеваля простой.

4. Фреймы Парсеваля в бесконечномерных пространствах

Назовем фрейм ограниченным, если $\exists\, \epsilon > 0 \,:\, \forall i = \overline{1, M}\ \ \|f_i\| > \epsilon$.

Теорема. Любой ограниченный составной фрейм Парсеваля $F = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ без коллинеарных векторов можно представить в виде суммы двух простых или составных фреймов Парсеваля.

Доказательство. Это утверждение более слабое, чем аналогичное для конечномерных пространств.

По определению составного фрейма существует набор констант $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что существует $k \in \mathbb{N}$, для которого $\alpha_k = 0$, и система векторов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является фреймом Парсеваля.

Рассмотрим двойственный набор коэффициентов $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\beta_i = \sqrt{\frac{\alpha_{sup}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{sup}^2 - 1}}, \quad \alpha_{sup} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |\alpha_i|\,.$$

Супремум существует благодаря ограниченности исходного фрейма. Двойственная система $F_\beta = \{\beta_i f_i\}_{i=1}^{\infty}$ является фреймом Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle\, x, \beta_i f_i \,\rangle\, \beta_i f_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle\, x, \sqrt{\frac{\alpha_{sup}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{sup}^2 - 1}} f_i \,\rangle \sqrt{\frac{\alpha_{sup}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{sup}^2 - 1}} f_i =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{sup}^2 - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\alpha_{sup}^2 - \alpha_i^2\right) \langle\, x, f_i \,\rangle\, f_i =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{sup}^2 - 1} \left(\alpha_{sup}^2 \sum_{i=1}^{\infty} \langle\, x, f_i \,\rangle\, f_i - \sum_{i=1}^{\infty} \langle\, x, \alpha_i f_i \,\rangle\, \alpha_i f_i \right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{sup}^2 - 1} \left(\alpha_{sup}^2 x - x\right) = x\,.$$

Для всех $k \in \mathbb{N}$ константы β_k имеют смысл и являются вещественными числами, при этом набор $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ не совпадает с набором $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Оценим сверху границу фрейма $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle\, x, \alpha_i f_i \,\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \, |\langle\, x, f_i \,\rangle|^2 < \alpha_{sup}^2 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle\, x, f_i \,\rangle|^2 = \alpha_{sup}^2 \,.$$

Строгое неравенство обеспечивается наличием нулевых компонент в наборе $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$, и $\alpha_{sup} > 1$.

Наборы $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ не совпадают по определению: существует номер $k \in \mathbb{N}$ такой, что $\alpha_k = 0$ и $\beta_k \neq 0$.

Любой составной фрейм Парсеваля раскладывается в объединение фреймов $\{\alpha_i f_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\beta_i f_i\}_{i=1}^{\infty}$. Возьмем конкретные значения λ_α и λ_β

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\alpha_{sup}}, \quad \lambda_\beta = \frac{\sqrt{\alpha_{sup}^2 - 1}}{\alpha_{max}}, \quad \lambda_\alpha^2 + \lambda_\beta^2 = \frac{1}{\alpha_{max}^2} + \frac{\alpha_{max}^2 - 1}{\alpha_{max}^2} = 1$$

и вычислим $F_\alpha \oplus F_\beta$. Поскольку фрейм F коллинеарных векторов не содержит, то единственными парами коллинеарных векторов в сумме могут быть только $\alpha_k f_k$ и $\beta_k f_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Подействуем на эту пару оператором V, согласно (5)

$$V\left(\{\lambda_\alpha \alpha_i f_i, \lambda_\beta \beta_i f_i\}\right) = \sqrt{\|\lambda_\alpha \alpha_i f_i\|^2 + \|\lambda_\beta \beta_i f_i\|^2}\, \frac{\lambda_\alpha \alpha_i f_i}{\|\lambda_\alpha \alpha_i f_i\|} = \sqrt{\lambda_\alpha^2 \alpha_i^2 + \lambda_\beta^2 \beta_i^2} f_i \,,$$

$$\lambda_\alpha^2 \alpha_i^2 + \lambda_\beta^2 \beta_i^2 = \frac{\alpha_i^2}{\alpha_{sup}^2} + \frac{\alpha_{sup}^2 - 1}{\alpha_{sup}^2} \cdot \frac{\alpha_{sup}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{sup}^2 - 1} = \frac{\alpha_i^2 + \alpha_{sup}^2 - \alpha_i^2}{\alpha_{sup}^2} = 1 \,.$$

Таким образом мы получили представление фрейма F в виде

$$F = \lambda_\alpha F_\alpha \,\oplus\, \lambda_\beta F_\beta \,.$$

Если полученные фреймы F_α и F_β являются простыми, то процесс разложения окончен. В противном случае мы можем продолжить процесс рекурсивно для фреймов F_α и F_β.

Литература

[1] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Birkhäuser. Boston, 2002.

[2] Casazza P.G., Tremain J.C. A brief introduction to Hilbert space frame theory and its applications, Department of Mathematics, University of Missouri, Columbia, MO 65211-4100. URL: http/framerc.org.

[3] Истомина М.Н., Певный А.Б. О расположении точек на сфере и фрейме Мерседес-Бенц // Математическое просвещение. 2007. Сер. 3. Вып. 11.

[4] Novikov S.Ya., Ryabtsov I.S. Optimization of Frame Representations for Compressed Sensing and Mercedes-Benz Frame // Избранные вопросы математической физики и p-адического анализа: сб. ст. // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С.211–219.

[5] Casazza P.G., Redmond D., Tremain J.C. Real Equiangular Frames, CISS Meeting Information Sciences and Systems. Princeton, NJ, 2008.

[6] Lemmens P.W.H., Seidel J.J. Equiangular lines // J. Algebra. 1973. № 24. P. 494–512.

[7] On the existence of equiangular tight frames / M. Sustik [et al.] // Linear Algebra Appl. 2007. № 426(2–3). P. 619–635.

Поступила в редакцию $22/IV/2011$;
в окончательном варианте — $22/IV/2011$.

REPRESENTATION OF PARSEVAL FRAMES IN HILBERT SPACES

 I.S. Ryabtsov[2]

In this paper we introduce two new classes of Parseval frames in arbitrary Hilbert spaces of finite or infinite dimension: simple and composite Parseval frames. Theorems of representation of composite Parseval frames by summation of simple ones are proved. Few classes of simple frames are described: orthonormal basis, equiangular Parseval frames and some other examples.

Key words: Parseval frames, frame equivalence, frame representations, equiangular frames.

Paper received $22/IV/2011$.
Paper accepted $22/IV/2011$.

[2]Ryabtsov Igor Sergeevich (tinnulion@mail.ru), the Dept. of Functional Analysis and Function Theory, Samara State University, 443011, Russian Federation.