УДК 517.51

ОБ ОДНОЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ОЦЕНКЕ

© 2011 М.Б. Мэдэгэй[1]

Рассматриваются линейные операторы, удовлетворяющие некоторым условиям. Указанные операторы являются частным видом операторов класса S_{2m} (по П.П. Коровкину). Получена оценка величины $|L_n(f,x) - f(x)|$ для $f \in W^2H^{\alpha}_M$, L_n принадлежат классу S_6. Для вывода оценки используется метод интерполяции, описанный в работах Ю.Г. Абакумова, О.Н. Шестаковой.

Ключевые слова: линейные операторы, аппроксимационная оценка, метод интерполяции.

1. Предварительные сведения

Пусть $f(t) \in C\,[a,b]$ или $f(t) \in C_{2\pi}$, $L_n : C\,[a,b] \to C\,[a,b]$ или $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ — последовательность линейных операторов. Последовательность $\{L_n\}$ называется аппроксимирующей, если $\forall f \in C\,[a,b]$ или $\forall f \in C_{2\pi}$ выполняется $\|L_n(f,x) - f(x)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $W \subset C\,[a,b]$ или $W \subset C_{2\pi}$ — некоторое множество (класс) функций. Аппроксимационными оценками называют неравенства вида

$$\|L_n(f,x) - f(x)\| \leqslant \alpha_n \to 0, \tag{1}$$

которые выполняются при условии $f \in W$. Правая часть α_n зависит от характеристик класса W и от характеристик операторов L_n.

Хорошо отработана методика получения оценок вида (1) в случае, если L_n — положительные операторы. Напомним, оператор называется положительным, если $f(t) \geqslant 0 \Rightarrow \forall x \;\; L_n(f,x) \geqslant 0$.

В предлагаемой статье рассматриваются последовательности аппроксимационных операторов, не являющихся положительными.

В [1] приводится следующая схема получения оценок в терминах линейных нормированнных пространств.

Пусть X — линейное нормированное пространство. Множество $K \subset X$ называем конусом, если K — замкнутое выпуклое множество, которое вместе с любым, принадлежащим ему элементом содержит луч, состоящий из элементов вида λp, где $\lambda \geqslant 0$ — действительное число. Если K означает конус, то K^* — множество линейных функционалов с конечной нормой, неотрицательных на K.

[1]Мэдэгэй Марина Батоевна (`medegey@mail.ru`), кафедра прикладной механики и инженерной графики Забайкальского института железнодорожного транспорта — филиала Иркутского государственного университета путей сообщения, 672040, Российская Федерация, г. Чита, ул. Магистральная, 11.

Полагаем, что в X зафиксирована последовательность конусов K_n, $n = 1, 2, ...$ и последовательность элементов p_n, причем $\|p_n\|$ равномерно по n ограничены, $\mu \in X^*$, $F = lin\,\{z_i\}_{i=1}$, при этом полагаем, что $\{z_i\}_{i=1}$ линейно независима (здесь $linM$ означает линейную оболочку множества M).

Будем полагать, что $p \in \Phi = \Phi(F, \{K_n\}, \{p_n\})$, если по p найдутся последовательности положительных чисел c_n и последовательность элементов $g_n \in F$ такие, что $c_n p_n - p + g_n \in K_n$, $-c_n p_n - p + g_n \in -K_n$, при этом $c_n \mu(p_n) \to 0$, $\mu(g_n - p) \to 0$. Схема получения аппроксимационных оценок, предложенная в [1], основана на использовании неравенства

$$|\mu_n(p) - \mu(p)| \leqslant c_n \mu_n(p_n) + |\mu_n(g_n) - \mu(p)|\,, \tag{2}$$

где $\mu_n \in K_n^*$.

Конкретизацией этой схемы является так называемый метод интерполяции (см. [2; 3]). Кратко изложим суть метода. Будем говорить, что последовательность операторов L_n, $L_n : C\,[a, b] \to C\,[a, b]$ или $L_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ удовлетворяет условию $U(m, \{h_n\}, \{k_i\})$, где $m > 0$ — целое, $h_n \downarrow 0$, $n = 1, 2, ...,$ $1 < k_1 < ... < k_{m-1}$, если

$$sign\varphi_n(t) = sign(h_n^2 - (t-x)^2) \prod_{i=1}^{m-1} (k_i^2 h_n^2 - (t-x)^2) \Rightarrow L_n(\varphi_n(t), x) \geqslant 0.$$

Согласно [4] эти операторы принадлежат классу S_{2m}. Заметим, что в периодическом случае запись $(t-x)^2$ означает 2π-периодическую функцию, равную $(t-x)^2$ на $(x - \pi, x + \pi]$.

Согласно методу интерполяции вывод оценки величины $\|L_n(f(t), x) - f(x)\|$ производится по следующей схеме:

1) фиксируем (произвольным образом) x;

2) вводим вспомогательную функцию $\varphi_n(t) = f(t) - g_n(t)$, зависящую от n, где $g_n(t)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, интерполирующий $f(t)$ в узлах $x \pm h_n$, $x \pm k_i h_n$, $i = 1, ..., m-1$;

3) полагаем

$$p_n(t) = (h_n^2 - (t-x)^2) \prod_{i=1}^{m-1} (k_i^2 h_n^2 - (t-x)^2)$$

и подбираем $c_n > 0$ так, чтобы $|\varphi_n(t)| \leqslant c_n\,|p_n(t)|$;

4) отсюда следует, что $|L_n(\varphi_n(t), x)| \leqslant c_n L_n(p_n(t), x)$;

5) предполагая $L_n(1, x) = 1$, получим
$L_n(f(t), x - f(x) \leqslant c_n L_n(p_n(t), x) + |L_n(g_n(t), x) - f(x)|$;

6) выражаем $L_n(p_n(t), x)$, $\|f(t, x_1, ..., x_{2m}\|$ через h_n и $\beta_n^{(i)} = \left\|L_n((t-x)^i, x)\right\|$ и получаем оценку.

В последнем пункте обозначено $x_1 = x - k_m h_n$, $x_2 = x - k_{m-1} h_n$, ... ,$x_m = x - h_n$, $x_{m+1} = x + h_n$, ..., $x_{2m} = x + k_{2m} h_n$, $f(t, x_1, ..., x_{2m})$ — разделенная разность (см.[5]).

Для любого целого $m \geqslant 1$ известны конкретные аппроксимационные последовательности, удовлетворяющие условиям типа $U(m, \{h_n\}, \{k_i\})$ при некоторых конкретных значениях h_n и k_i.

2. Формулировка результата

Аппроксимационные оценки методом интерполяции получены О.Н. Шестаковой, Е.П. Галайдой (при $m = 1, 2$), Ю.Г. Абакумовым (при $m = 2, 3$). Ниже мы получим новую оценку при значении $m = 3$. Результат оформим в виде теоремы следующего содержания.

Теорема. Пусть дана некоторая монотонная, сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел h_n. Пусть далее оператор L_n удовлетворяет условию

$$sign\varphi_n(t) = sign\prod_{i=0}^{2}(k_i^2h_n^2 - (t-x)^2) \Rightarrow L_n(\varphi_n(t), x) \geqslant 0,$$

$k_0 = 1,\ 1 < k_1 < k_2$. При этом $L_n(1, x) = 1$. Тогда для функции $f(t) \in C\,[a, b]$, $f^{//}(t) \in Lip\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, имеет место оценка

$$\begin{gathered}
\|L_n(f(t,x)) - f(x)\| \leqslant \left\|f^{/}\right\| \cdot \beta_n^{(1)} + \frac{\left\|f^{//}\right\|}{2}\beta_n^{(2)} + \\
+\frac{\left[(k_1+k_2+1)(k_1+1)^{\alpha-1} + k_1(k_2-1)^{\alpha-1}\right]}{2k_1k_2(k_1+k_2)(k_2+1)}Mh_n^{\alpha-4}\beta_n^{(6)} + \\
+\frac{k_2^{\alpha+1}(k_1^2-1) + k_1^{\alpha+1}(k_2^2-1) + (k_2^2-k_1^2)}{(\alpha^2+3\alpha+2)(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)}Mh_n^{\alpha-3}\beta_n^{(5)} + \\
+(\frac{k_2^{\alpha+2}(k_1^2-1) + k_1^{\alpha+2}(k_2^2-1) + (k_2^2-k_1^2)}{(\alpha^2+3\alpha+2)(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)} + \\
+\frac{((k_1+k_2+1)(k_1+1)^{\alpha-1} + k_1(k_2-1)^{\alpha-1})(k_1^2+k_2^2+1)}{2k_1k_2(k_1+k_2)(k_2+1)})Mh_n^{\alpha-2}\beta_n^{(4)} + \\
+\frac{k_2^{\alpha+1}(k_1^4-1) + k_1^{\alpha+1}(k_2^4-1) + (k_2^4-k_1^4)}{(\alpha^2+3\alpha+2)(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)}Mh_n^{\alpha-1}\beta_n^{(3)} + \qquad (3) \\
+(\frac{k_2^{\alpha+2}(k_1^4-1) + k_1^{\alpha+2}(k_2^4-1) + (k_2^4-k_1^4)}{(\alpha^2+3\alpha+2)(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)} + \\
+\frac{\left[(k_1+k_2+1)(k_1+1)^{\alpha-1} + k_1(k_2-1)^{\alpha-1}\right](k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)}{2k_1k_2(k_1+k_2)(k_2+1)})Mh_n^{\alpha}\beta_n^{(2)} + \\
+\frac{k_1^2k_2^{\alpha+1}(k_1^2-1) + k_1^{\alpha+1}k_2^2(k_2^2-1) + k_1^2k_2^2(k_2^2-k_1^2)}{(\alpha^2+3\alpha+2)(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)}Mh_n^{\alpha+1}\beta_n^{(1)} + \\
+(\frac{k_1^2k_2^{\alpha+2}(k_1^2-1) + k_1^{\alpha+2}k_2^2(k_2^2-1) + k_1^2k_2^2(k_2^2-k_1^2)}{(\alpha^2+3\alpha+2)(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)(k_1^2-1)} + \\
+\frac{(k_1+k_2+1)(k_1+1)^{\alpha-1} + k_1(k_2-1)^{\alpha-1})k_1k_2}{2(k_1+k_2)(k_2+1)})Mh_n^{\alpha+2},
\end{gathered}$$

здесь $\beta_n^{(i)} = \left\|L_n((t-x)^i, x)\right\|$, где $i = \overline{1,6}$

3. Доказательство теоремы

Фиксируем произвольным образом $x \in [a, b]$ и $n \in N$ и рассматриваем функцию $\varphi_n(t) = f(t) - g_n(t)$, где $g_n(t)$ — полином Лагранжа, интерполирующий функцию $f(t)$ в узлах $x_1 = x - k_2h_n$, $x_2 = x - k_1h_n$, $x_3 = x - h_n$, $x_4 = x + h_n$, $x_5 = x + k_1h_n$, $x_6 = x + k_2h_n$. Обозначим $\varphi_n(t)$ как остаточный член интерполяции.

По определению $\varphi_n(t)$ имеем равенство
$f(t) - f(x) = g_n(t) - f(x) + \varphi_n(t)$.

Отсюда получаем (учитывая, что $L_n(1,x)=1$)

$$\|L_n(f(t),x)-f(x)\| \leqslant \|L_n(g(t),x)-f(x)\| + \|L_n(\varphi_n(t),x)\|\,. \tag{4}$$

Оцениваем первое слагаемое неравенства (4).

Так как функция $f(t)$ имеет в точке x производную до второго порядка включительно ($f(t)\in W^2H_M^\alpha$), то по формуле Тейлора имеем

$$f(t)=f(x)+f^{/}(x)(t-x)+f^{//}(x)\frac{(t-x)^2}{2}+\mu(t).$$

Отсюда

$$g_n(f,t)-f(x)=f^{/}(x)(t-x)+f^{//}(x)\frac{(t-x)^2}{2}+g(\mu,t), \tag{5}$$

где $g(\mu,t)$ — функция, непрерывная относительно $\mu\in[a,b]$ при любом значении $t\in[a,b]$ (является многочленом Лагранжа, интерполирующим функцию $\mu(t)$ в узлах $x_i,\ i=1,...,6$).

По интерполяционной формуле Лагранжа

$$\begin{gathered}
g(\mu,t)=\frac{\mu(x-k_2h_n)}{-2k_2(k_1^2-k_2^2)(1-k_2^2)h_n^5}\left[(t-x)^5-k_2h_n(t-x)^4-(k_1^2+1)h_n^2(t-x)^3+\right.\\
\left.+\,k_2(k_1^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_1^2h_n^4(t-x)-k_1^2k_2h_n^5\right]+\\
+\frac{\mu(x-k_1h_n)}{-2k_1(k_2^2-k_1^2)(1-k_1^2)h_n^5}\left[(t-x)^5-k_1h_n(t-x)^4-(k_2^2+1)h_n^2(t-x)^3+\right.\\
\left.+\,k_1(k_2^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_2^2h_n^4(t-x)-k_1k_2^2h_n^5\right]+\\
+\frac{\mu(x-h_n)}{-2(k_2^2-1)(k_1^2-1)h_n^5}\left[(t-x)^5-h_n(t-x)^4-(k_1^2+k_2^2)h_n^2(t-x)^3+\right.\\
\left.+\,(k_1^2+k_2^2)h_n^3(t-x)^2+k_1^2k_2^2h_n^4(t-x)-k_1^2k_2^2h_n^5\right]+\\
+\frac{\mu(x+h_n)}{2(1-k_1^2)(1-k_2^2)h_n^5}\left[(t-x)^5+h_n(t-x)^4-(k_1^2+k_2^2)h_n^2(t-x)^3-\right.\\
\left.-\,(k_1^2+k_2^2)h_n^3(t-x)^2+k_1^2k_2^2h_n^4(t-x)+k_1^2k_2^2h_n^5\right]+\\
+\frac{\mu(x+k_1h_n)}{2k_1(k_1^2-1)(k_1^2-k_2^2)h_n^5}\left[(t-x)^5+k_1h_n(t-x)^4-(k_2^2+1)h_n^2(t-x)^3-\right.\\
\left.-\,k_1(k_2^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_2^2h_n^4(t-x)+k_1k_2^2h_n^5\right]+\\
+\frac{\mu(x+k_2h_n)}{2k_2(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)h_n^5}\left[(t-x)^5+k_2h_n(t-x)^4-(k_1^2+1)h_n^2(t-x)^3-\right.\\
\left.-\,k_2(k_1^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_1^2h_n^4(t-x)+k_1^2k_2h_n^5\right].
\end{gathered} \tag{6}$$

Применяя к выражению (5) последовательность линейных операторов и учитывая при этом (6), получаем

$$\begin{gathered}
L_n(g(t),x)-f(x)=f^{/}(x)L_n(t-x,x)+\frac{f^{//}(x)}{2}\cdot L_n((f-x)^2,x)+\\
+\frac{\mu(x-k_2h_n)}{-2k_2(k_1^2-k_2^2)(1-k_2^2)h_n^5}\cdot L_n((t-x)^5-k_2h_n(t-x)^4-(k_1^2+1)h_n^2(t-x)^3+\\
+k_2(k_1^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_1^2h_n^4(t-x)-k_1^2k_2h_n^5),x)+
\end{gathered}$$

$$+\frac{\mu(x-k_1h_n)}{-2k_1(k_2^2-k_1^2)(1-k_1^2)h_n^5}\cdot L_n((t-x)^5-k_1h_n(t-x)^4-(k_2^2+1)h_n^2(t-x)^3+$$
$$+k_1(k_2^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_2^2h_n^4(t-x)-k_1k_2^2h_n^5),x)+$$
$$+\frac{\mu(x-h_n)}{-2(k_2^2-1)(k_1^2-1)h_n^5}\cdot L_n((t-x)^5-h_n(t-x)^4-(k_1^2+k_2^2)h_n^2(t-x)^3+$$
$$+(k_1^2+k_2^2)h_n^3(t-x)^2+k_1^2k_2^2h_n^4(t-x)-k_1^2k_2^2h_n^5,x)+$$
$$+\frac{\mu(x+h_n)}{1-2(k_1^2)(1-k_2^2)h_n^5}\cdot L_n((t-x)^5+h_n(t-x)^4-(k_1^2+k_2^2)h_n^2(t-x)^3-$$
$$-(k_1^2+k_2^2)h_n^3(t-x)^2+k_1^2k_2^2h_n^4(t-x)+k_1^2k_2^2h_n^5,x)+$$
$$+\frac{\mu(x+k_1h_n)}{2k_1(k_1^2-1)(k_1^2-k_2^2)h_n^5}\cdot L_n((t-x)^5+k_1h_n(t-x)^4-(k_2^2+1)h_n^2(t-x)^3-$$
$$-k_1(k_2^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_2^2h_n^4(t-x)+k_1k_2^2h_n^5,x)+$$
$$+\frac{\mu(x+k_2h_n)}{2k_2(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)h_n^5}\cdot L_n((t-x)^5+k_2h_n(t-x)^4-(k_1^2+1)h_n^2(t-x)^3-$$
$$-k_2(k_1^2+1)h_n^3(t-x)^2+k_1^2h_n^4(t-x)+k_1^2k_2h_n^5,x).$$

Так как $\mu^{//}(t)=f^{//}(t)-f^{//}(x)$, то $\mu^{//}(t)\in Lip\alpha$. Следовательно, выполняется неравенство $\left|\mu^{//}(t)-\mu^{//}(x)\right|\leqslant M\left|t-x\right|^{\alpha}$.

Два раза интегрируя обе части неравенства (учитывая при этом, что $\mu(x)=$ $=\mu^{/}(x)=\mu^{//}(x)=0$), получаем

$$|\mu(t)|\leqslant\frac{M\left|t-x\right|^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

$$|L_n(g(t),x)-f(x)|\leqslant\left|f^{/}(x)\right|\cdot|L_n(t-x,x)|+\frac{\left|f^{//}(x)\right|}{2}\cdot\left|L_n((t-x)^2,x)\right|+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha-3}\left|L_n((t-x)^5,x)\right|}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+1}}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+1}}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{1}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha-2}\left|L_n((t-x)^4,x)\right|}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+2}}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+2}}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{1}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha-1}\left|L_n((t-x)^3,x)\right|}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+1}(k_1^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+1}(k_2^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2+k_1^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha}\left|L_n((t-x)^2,x)\right|}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+2}(k_1^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+2}(k_2^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2+k_2^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha+1}\left|L_n((t-x),x)\right|}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_1^2k_2^{\alpha+1}}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+1}k_2^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2k_2^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha+2}}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_1^2k_2^{\alpha+2}}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+2}k_2^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2k_2^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right].$$

Переходим от модуля к норме. При этом обозначаем $\beta_n^{(i)}=\left\|L_n((t-x)^i,x)\right\|$.

$$\|L_n(g(t),x)-f(x)\|\leqslant\left\|f^{/}\right\|\cdot\beta_n^{(1)}+\frac{\left\|f^{//}\right\|}{2}\beta_n^{(2)}+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha-3}}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+1}}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+1}}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{1}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]\beta_n^{(5)}+$$

$$+\frac{Mh_n^{\alpha-2}}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+2}}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+2}}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{1}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]\beta_n^{(4)}+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha-1}}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+1}(k_1^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+1}(k_2^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2+k_1^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]\beta_n^{(3)}+ \quad (7)$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha}}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_2^{\alpha+2}(k_1^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+2}(k_2^2+1)}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2+k_2^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]\beta_n^{(2)}+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha+1}}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_1^2k_2^{\alpha+1}}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+1}k_2^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2k_2^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right]\beta_n^{(1)}+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha+2}}{\alpha^2+3\alpha+2}\left[\frac{k_1^2k_2^{\alpha+2}}{(k_2^2-k_1^2)(k_2^2-1)}+\frac{k_1^{\alpha+2}k_2^2}{(k_2^2-k_1^2)(k_1^2-1)}+\frac{k_1^2k_2^2}{(k_2^2-1)(k_1^2-1)}\right].$$

Оцениваем второе слагаемое неравенства (4). По интерполяционной формуле Ньютона имеем

$$|\varphi(t)|=|f(t;x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6)|\,\big|(t-x)^6-(k_1^2+k_2^2+1)h_h^2-$$
$$-(k_1^2+k_2^2+1)h_h^2(t-x)^4+(k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)h_n^4(t-x)^2-k_1^2k_2^2h_n^6\big|.$$

Оцениваем вначале разделенную разность

$$|f(t;x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6)|\leqslant\frac{1}{2k_2(k_1+k_2)h_n^2}\times$$
$$\times\Big(\frac{|f(x_4;t;x_5;x_6)|+|f(x_3;x_4;t;x_5)|+|f(x_2;t;x_3;x_4)|+|f(x_1;x_2;t;x_3)|}{(k_2+1)h_n}+$$
$$+\frac{|f(x_3;t;x_4;x_5)|+|f(x_2;x_3;t;x_4)|}{k_1h_n}\Big).$$

Для любых $t_1,t_2,t_3,t_4\in[a,b]:t_1<t_2<t_3<t_4$

$$|f(t_1;t_2;t_3;t_4)|=\frac{|f(t_2;t_3;t_4)|-|f(t_1;t_2;t_3)|}{t_4-t_1}=$$
$$=\frac{1}{t_4-t_1}\left|\frac{f^{//}(\xi_2)-f^{//}(\xi_1)}{2}\right|\leqslant\frac{|\xi_2-\xi_1|^\alpha}{2(t_4-t_1)}\leqslant\frac{M}{2}(t_4-t_1)^{\alpha-1},$$

где $\xi_1\in[t_1;t_3]$, $\xi_2\in[t_2;t_4]$.

Оцениваем отдельно абсолютные величины разделенных разностей третьего порядка:

$$|f(x_4;t;x_5;x_6)|=|f(x_1;x_2;t;x_3)|\leqslant\frac{M}{2}(k_2-1)^{\alpha-1}h_n^{\alpha-1},$$
$$|f(x_3;t;x_4;x_5)|=|f(x_2;t;x_3;x_4)|\leqslant\frac{M}{2}(k_1+1)^{\alpha-1}h_n^{\alpha-1}.$$

Подставляем полученные оценки в оценку разделенной разности, содержащей t

$$|f(t;x_1;x_2;x_3;x_4;x_5;x_6)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{Mh_n^{\alpha-4}}{2k_2(k_1+k_2)}\left[\frac{(k_2-1)^{\alpha-1}+(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_2+1}+\frac{(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_1}\right],$$

и слагаемое получает оценку

$$\|L_n(\varphi(t),x)\|\leqslant\frac{Mh_n^{\alpha-4}}{2k_2(k_1+k_2)}\left[\frac{(k_2-1)^{\alpha-1}+(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_2+1}+\frac{(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_1}\right]\beta_n^{(6)}+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha-2}(k_1^2+k_2^2+1)}{2k_2(k_1+k_2)}\left[\frac{(k_2-1)^{\alpha-1}+(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_2+1}+\frac{(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_1}\right]\beta_n^{(4)}+ \quad (8)$$

$$+\frac{Mh_n^{\alpha}(k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)}{2k_2(k_1+k_2)}\left[\frac{(k_2-1)^{\alpha-1}+(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_2+1}+\frac{(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_1}\right]\beta_n^{(2)}+$$
$$+\frac{Mh_n^{\alpha+2}k_1^2k_2}{2(k_1+k_2)}\left[\frac{(k_2-1)^{\alpha-1}+(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_2+1}+\frac{(k_1+1)^{\alpha-1}}{k_1}\right].$$

Суммируя оценки (7) и (8), получаем указанный в теореме результат.

Заметим, что полученная оценка верна и в том случае, если k_1, k_2 зависят от n ($k_1 = k_1(n)$, $k_2 = k_2(n)$). Разумеется, должны выполняться неравенства $1 < k_1(n) < k_2(n)$.

Литература

[1] Абакумов Ю.Г., Забелина Н.А., Шестакова О.Н. О последовательностях линейных функционалов и некоторых операторах класса S_{2m} // Сибирский математический журнал. 2000. № 2. С. 247–252.

[2] Шестакова О.Н. Аппроксимативные свойства некоторых операторов класса S_m и их двумерных аналогов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Владивосток, 2004. 18 с.

[3] Абакумов Ю.Г. Последовательности линейных функционалов и аппроксимационные свойства линейных операторов. Чита: ЧитГУ, 2004. 179 с.

[4] Коровкин П.П. Сходящиеся последовательности линейных операторов // Успехи математических наук. 1962. Т. 17. № 4(106). С. 147–152.

[5] Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975. 632 с.

Поступила в редакцию 30/IV/2011;
В окончательном варианте — 30/IV/2011.

ON ONE APPROXIMATION ESTIMATE

© 2011 M.B. Medegey[2]

Linear operators satisfying some conditions are considered. The given operators are a particular kind of class S_{2m} operators (by P.P. Korovkin). The estimate of the value $|L_n(f,x) - f(x)|$ for the $f \in W^2H_M^{\alpha}$ is received, L_n belongs to the class S_6. For the estimate derivation the interpolation method is used, described in the works by Yu.G. Abakumov and O.N. Shestakova.

Key words: linear operators, approximation estimate, interpolation method.

Paper received 30/IV/2011.
Paper accepted 30/IV/2011.

[2]Medegey Marina Batoyevna (medegey@mail.ru), the Dept. of Applied Mechanics and Engineering Graphics, Trans-Baikal Railway Transport Institute, Chita, 672040, Russian Federation.