УДК 517.927.25

О МЕТОДЕ СЛЕДОВ РЕЗОЛЬВЕНТ, ВЫЧИСЛЕННЫХ ТОЧНО

© 2011 Е.М. Малеко[1]

В статье установлено, что существует ряд методов приближенного вычисления собственных значений различного рода краевых задач для уравнений математической физики. Если положительная степень резольвенты является ядерным оператором, то этим можно воспользоваться в вычислении спектра краевой задачи. Отмечено, что похожие результаты имеются у А.А. Дородницына.

Ключевые слова: спектр, дискретный оператор, гильбертово пространство.

Введение

Проблеме вычисления первых собственных чисел дифференциальных операторов посвящено огромное число исследований. В частности, был разработан ряд методов приближенного вычисления собственных значений различного рода краевых задач для уравнений математической физики. В их числе методы, основанные на применении итерированных функций Грина [7, с. 3–96], и многие другие.

В конце 50-х годов XX века И.М. Гельфанд и Л.А. Дикий [5, с. 12–14] предложили метод вычисления собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля, основанный на применении теории регуляризованных следов дифференциальных операторов [1, с. 191–198; 2, с. 593–596; 4, с. 187–200]. С.А. Шкарин [26, с. 39–44] доказал, что этот метод нельзя использовать для приближенных вычислений первых собственных чисел в том виде, в каком он вначале [5, с. 12–14] был предложен. В.А. Садовничий и В. Е. Подольский [24, с. 133–148; 25, с. 162–164] обосновали метод Гельфанда — Дикого для одного довольно узкого, но тем не менее всюду плотного в соответствующей метрике подкласса S дифференциальных операторов второго порядка.

Одним из наиболее употребительных является метод, основанный на равенствах, связывающих итерированные функции Грина рассматриваемой одномерной краевой задачи с ее собственными значениями:

$$\int_a^b G_k(x,x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-k}, \quad k = 1,2,3,... \tag{1}$$

Наиболее полные исследования в этом направлении принадлежат А.А. Дородницыну [7, с. 3-96]. Суть метода такова: в правых частях равенств (1) обрываем

[1]Малеко Евгений Михайлович (emaleko@rambler.ru, mgtu@magtu.ru), кафедра математики Магнитогорского государственного технического университета, 455000, Российская Федерация, Магнитогорск, пр. Ленина, 38.

ряды до слагаемых с номером N и рассматриваем первые N равенств. Оценивая отброшенные остатки рядов $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-k}$, решаем конечную систему алгебраических уравнений

$$\int_a^b G_k(x,x)dx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-k} + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-k}\right), \quad k = 1,2,3,...,N,$$

относительно неизвестных λ_i, $i = \overline{1,N}$ и получаем приближенные значения собственных чисел тем более точные, чем большее N взято. Метод обладает тем существенным недостатком, что вычисление конкретных значений интегралов левой части (1) зачастую бывает лишь приближенным, да и нахождение самих итерированных функций Грина

$$G_k(x,\xi) := \int_a^b G_{k-1}(x,t)G(t,\xi)dt$$

сталкивается с теми же проблемами, причем сами интегралы в конечном виде через параметры исходной задачи, вообще говоря, не выражаются.

Заслуживает внимания подход в вычислении первых собственных значений, основанный на применении равенств (1): рассматриваем первые N равенств, обрывая ряды до слагаемых с номером N, и, не оценивая отброшенные остатки рядов $\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^{-k}$, решаем конечную систему алгебраических уравнений

$$\int_a^b G_k(x,x)dx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^{-k}, \quad k = 1,2,3,...,N,$$

относительно неизвестных λ_i, $i = \overline{1,N}$, получая при этом приближенные значения собственных чисел.

1. Модифицированный метод А.А. Дородницына

Рассмотрим действующий в СГП $\mathbb{H}$ дискретный с ядерной резольвентой, не обязательно симметрический оператор A. Пусть собственные числа λ_i, $i \in \mathbb{N}$, этого оператора ненулевые и занумерованы с учетом алгебраической кратности по возрастанию модулей, в случае же одинаковых модулей и различных аргументах — по возрастанию аргумента на $[0, 2\pi)$. Оператор $T^{-1} = \sqrt{(A^{-1})^* A^{-1}}$ имеет собственными числами положительные числа s_i такие, что $|\lambda_i^{-1}| \leqslant s_i$ ([3]). Если спектральные следы (они же равны и матричным следам по теореме Лидского)

$$g_m = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-m}, m = 1,2,...,n,$$

степеней m оператора A^{-1} известны точно, то для приближенного вычисления первых собственных чисел оператора A применим так называемый *модифицированный метод А.А. Дородницына.* Суть его заключается в следующем. Пусть нам не составляет особого труда вычисление следов g_m, $m = 1,2,...,n$, причем по необходимости мы можем как угодно увеличивать n (это можно сделать, имея, например, под рукой быстродействующий компьютер). Тогда для достаточно больших n наибольшие по модулю компоненты $z_i^{(n)}$ $(i = 1,...,N, \quad N << n)$ вектор-решения $\overline{z}^{(n)}$ системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^m = g_m, \quad m = 1,2,...,n,$$

дают приближения числам $1/\lambda_i$, $i = 1, 2, ..., N$, с любой заданной точностью. Данному методу посвящены статьи [8; 10–14; 22; 23] и работы [9; 15–20].

Рассмотрим *метод А.А. Дородницына* приближенного вычисления собственных чисел на примере одной из представленных в работе [6, с. 60-179] (см. также [22]) краевых задач для уравнения Штурма — Лиувилля со спектральным параметром λ

$$\begin{gathered} y'' + (\lambda r(x) + q(x))y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \ell, \\ h_1 y'(0) = hy(0), \quad H_1 y'(\ell) + Hy(\ell) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь функция $q(x)$ предполагается непрерывной и действительно значной на отрезке $[0, \ell]$, h, h_1, H, $H_1 \in \mathbb{R}$, а коэффициент уравнения $r(x)$ имеет вид $r(x) = r_1(x)x^\alpha$, где $\alpha > -1$, $r_1(x)$ – непрерывная положительная функция на $[0, \ell]$. В этой ситуации собственные значения задачи (2) образуют строго возрастающую последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ с асимптотикой

$$\sqrt{\lambda_n} \sim \pi n \Big/ \int\limits_0^\ell \sqrt{r(x)}\, dx \quad (n \to \infty).$$

Функция Грина $G(x, \xi)$ задачи (2) — функция двух переменных на $[0, \ell] \times [0, \ell]$, удовлетворяющая уравнению

$$\partial^2 G(x, \xi)/(\partial x)^2 + q(x)G(x, \xi) = 0$$

и условиям

$$h_1 \partial G/\partial x(0, \xi) = hG(0, \xi), \quad H_1 \partial G/\partial x(\ell, \xi) + HG(\ell, \xi) = 0,$$

$$\partial G/\partial x(\xi - 0, \xi) - \partial G/\partial x(\xi + 0, \xi) = 1.$$

Если $0 \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, то при любых $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$g_m = \int\limits_0^\ell r(x)G_m(x, x)\, dx = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-m}, \tag{3}$$

где $G_1(x, \xi) = G(x, \xi)$, $G_{m+1}(x, \xi) = \int_0^\ell r(t)G_m(x, t)G(t, \xi)\, dt$. Таким образом, если известна функция Грина задачи (2), то можно вычислить все суммы (3). В параграфе 4 работы [6, с. 60–179] автор делает акцент на существенное применение обобщенной ζ-функции

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n + a)^s}$$

в приближенном вычислении поправок

$$\rho_{2m}^{(k)} = \sum_{n=k}^\infty \frac{1}{\lambda_n^{2m}}$$

для системы

$$\sum_{n=0}^{k-1} x_n^{2m} = g_{2m} - \rho_{2m}^{(k)}, \quad 1 \leqslant m \leqslant k, \tag{4}$$

с целью нахождения вектор-решения этой системы, положительные компоненты которого приближают обратные величины собственных значений рассматриваемого дифференциального уравнения. В статье [6, с. 60–179] спектральный параметр λ входит в уравнения с квадратом, и нумерация собственных чисел начинается не с единицы, а с нуля. Причем во введении статьи указано, что к работе [6, с. 60–179] прилагаются таблицы функций $\zeta(s,\nu)$, составленные В.П. Кондаковой, с помощью которых, по мнению автора, можно рассчитывать первые собственные значения.

"Чистую" же (без поправок $\rho_m^{(k)}$) систему

$$\sum_{n=0}^{k-1} x_n^{2m} = g_{2m}, \quad 1 \leqslant m \leqslant k, \tag{5}$$

А.А. Дородницын скорее всего никогда не применял в своих расчетах, так как для получения результата, по точности подобного полученному им, потребовалось бы значительно больше вычислительных затрат, то есть увеличивать количество k уравнений системы (5). Поэтому использование системы (5) (или (6)) для вычисления первых собственных значений следует называть *модифицированным методом А.А. Дородницына.*

Итак, докажем, что при достаточно больших n и произвольном фиксированном N ($N << n$, $|1/\lambda_N| > |1/\lambda_{N+1}|$) N наибольших по модулю компонент $z_i^{(n)}$ вектор-решения $\overline{z}^{(n)}$ системы

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^m = g_m, \quad m = 1, 2, ..., n, \tag{6}$$

будут как угодно точно приближать числа $1/\lambda_i$ для $i = 1, ..., N$, причем вычислим скорость сходимости $z_i^{(n)}$ к соответствующим числам $w_i = 1/\lambda_i$, $i = 1, ..., N$.
Обозначения:
$\psi_k(n) = \sum_{i=n+1}^{\infty} s_i^k, \quad k \in \mathbb{N}$;
$\sigma_k(\overline{w}^{(n)})$, $\sigma_k(\overline{z}^{(n)})$ – k-е элементарные симметрические многочлены от компонент векторов $\overline{w}^{(n)} = (w_1, ..., w_n)$ и $\overline{z}^{(n)} = (z_1^{(n)}, ..., z_n^{(n)})$;
$\sigma_k^{\infty}(w_1, ...) = \lim_{\ell\to\infty} \sigma_k(w_1, ..., w_\ell)$,
$\sigma_k^{\infty}(w_{n+1}, ...) = \lim_{\ell\to\infty} \sigma_k(w_{n+1}, ..., w_\ell)$ – k-е элементарные симметрические многочлены от $w_1, w_2, ...$ и от $w_{n+1}, w_{n+2}, ...$ соответственно.
Последние обозначения имеют место, так как оператор A^{-1} ядерный, и поэтому $|\sigma_k^{\infty}(w_1, ...)| < \infty$, $|\sigma_k^{\infty}(w_{n+1}, ...)| < \infty$.

Рассмотрим следующие многочлены:

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - w_i) = z^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k(\overline{w}^{(n)}) z^{n-k}, \tag{7}$$

$$R_n(z) = \prod_{i=1}^{n} (z - z_i^{(n)}) = z^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k(\overline{z}^{(n)}) z^{n-k}. \tag{8}$$

Тогда для любого комплексного $z \neq 0$ имеем

$$|P_n(z) - R_n(z)| \leqslant |z^n| \sum_{k=1}^{n} |z^{-k}| |\sigma_k(\overline{w}^{(n)}) - \sigma_k(\overline{z}^{(n)})|. \tag{9}$$

Запишем величины $\sigma_k^{\infty}(w_1, ...)$ в виде

$$\sigma_k^{\infty}(w_1, ...) = \sum_{p=0}^{k} \sigma_p(\overline{w}^{(n)}) \sigma_{k-p}^{\infty}(w_{n+1}, ...),$$

где

$$\sigma_0(\overline{w}^{(n)}) = \sigma_0^{\infty}(w_{n+1}, ...) = 0.$$

Тогда, так как

$$\sigma_k(\overline{z}^{(n)}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(g_k - g_{k-1}\sigma_1(\overline{z}^{(n)}) + ... \\ ... + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}(\overline{z}^{(n)})\Big) = \\ = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(g_k - g_{k-1}\sigma_1^{\infty}(w_1, ...) + ... \\ ... + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}^{\infty}(w_1, ...)\right) = \sigma_k^{\infty}(w_1, ...),$$

разности $\sigma_k(\overline{z}^{(n)}) - \sigma_k(\overline{w}^{(n)})$ можно представить следующим образом:

$$\begin{gathered} \sigma_k(\overline{z}^{(n)}) - \sigma_k(\overline{w}^{(n)}) = \sigma_k^{\infty}(w_1, ...) - \sigma_k(\overline{w}^{(n)}) = \\ = \textstyle\sum_{p=0}^{k-1} \sigma_p(\overline{w}^{(n)}) \sigma_{k-p}^{\infty}(w_{n+1}, ...). \end{gathered} \tag{10}$$

Оценим модули разностей $\sigma_k(\overline{z}^{(n)}) - \sigma_k(\overline{w}^{(n)}) = \chi_k(n)$.
При $k = 1$ имеем $|\chi_1(n)| \leqslant \psi_1(n)$. При $k = 2$ получаем, что

$$|\chi_2(n)| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\nu-1} s_{m_1} s_\nu \leqslant \psi_1(0)\psi_1(n),$$

а при $2 < k \leqslant n$:

$$|\chi_k(n)| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \sum_{m_{k-1}=k-1}^{\nu-1} \sum_{m_{k-2}=k-2}^{m_{k-1}-1} ... \sum_{m_1=1}^{m_2-1} s_\nu \prod_{p=1}^{k-1} s_{m_p} =$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} s_\nu \left(\sum_{j_1+j_2+j_3+...=k-1} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} ... \right) <$$

$$< \sum_{\nu=n+1}^{\infty} s_\nu \left(\sum_{r_1+r_2+r_3+...=k-1} \frac{s_1^{r_1}}{r_1!} \frac{s_2^{r_2}}{r_2!} \frac{s_3^{r_3}}{r_3!} ... \right) =$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{\infty} s_\nu \left(\sum_{m=1}^{\infty} s_m \right)^{k-1} \Bigg/ (k-1)! = \psi_1(n)\ \psi_1^{k-1}(0) \big/ (k-1)!,$$

где $j_m \in \{0, 1\}$, $r_m \in \mathbb{Z}$, $r_m \geqslant 0$, $m \in \mathbb{N}$. Таким образом получили при $1 \leqslant k \leqslant n$ оценку $|\chi_k(n)| < \psi_1(n)\ \psi_1^{k-1}(0) \big/ (k-1)!$ и выполнение для любого комплексного $z \neq 0$ неравенств

$$\begin{gathered} |P_n(z) - R_n(z)| < \\ < |z^n| \textstyle\sum_{k=1}^{n} |z^{-k}| \psi_1(n)\ \psi_1^{k-1}(0) \big/ (k-1)! = \\ = |z|^{n-1} \psi_1(n) \textstyle\sum_{k=1}^{n} (\psi_1(0)/|z|)^{k-1} \big/ (k-1)! < \\ < |z|^{n-1} \psi_1(n) \exp(\psi_1(0)/|z|). \end{gathered} \tag{11}$$

Далее применяем теорему Руше [21] об устойчивости числа нулей для полиномов $P_n(z)$ и $R_n(z) = P_n(z) + \varphi_n(z)$ внутри кругов

$$C_{n,k} := \{z \in \mathbb{C} |\ \ |z - w_k| \leqslant r_{n,k}\}, \quad 1 \leqslant k \leqslant N,$$

при достаточно больших $n >> N$, где $\varphi_n(z) = R_n(z) - P_n(z)$; $r_{n,k} \to 0$ при $n \to \infty$ и $r_{n,k_1} = r_{n,k_2}$, если $w_{k_1} = w_{k_2}$; N — фиксированное натуральное число такое, что $|w_N| > |w_{N+1}|$. Из формулировки теоремы Руше явствует, что если $|P_n(z)| >$ $> |\varphi_n(z)|$ для z таких, что $|z - w_k| = r_{n,k}$, то внутри круга $C_{n,k}$ у полиномов

$P_n(z)$ и $R_n(z)$ будет равное количество нулей. Этим мы сейчас и воспользуемся, причем вместо неравенства $|P_n(z)| > |\varphi_n(z)|$ будем рассматривать неравенство

$$|P_n(z)| > |z|^{n-1}\psi_1(n)\exp(\psi_1(0)/|z|), \tag{12}$$

выполнение которого сразу же влечет и выполнение $|P_n(z)| > |\varphi_n(z)|$, благодаря оценке (11). Итак, для $z \in \partial C_{n,k} := \{z \in \mathbb{C}|\ |z - w_k| = r_{n,k}\}$ из (12) имеем

$$|P_n(z)| = |z|^n \prod_{i=1}^{n} |1 - w_i/z| =$$

$$= |z - w_k|^{\nu_k} |z|^{n-\nu_k} \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^{n} |1 - w_i/z| >$$

$$> |z|^{n-1}\psi_1(n)\exp(\psi_1(0)/|z|),$$

где ν_k — алгебраическая кратность собственного числа $\lambda_k = 1/w_k$ оператора A. Отсюда получаем

$$r_{n,k}^{\nu_k} \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^{n} |1 - w_i/z| > |z|^{\nu_k - 1}\psi_1(n)\exp(\psi_1(0)/|z|), \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \tag{13}$$

Так как оператор A^{-1} ядерный, то произведение $\prod_{i=1}^{\infty}(1 - w_i/z)$ сходится (см.[21]) равномерно на любом компакте, лежащем внутри $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, то есть является однозначной аналитической функцией в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. К тому же на любом компакте, лежащем внутри $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, правая часть

$$\vartheta_n(z) = |z|^{\nu_k - 1}\psi_1(n)\exp(\psi_1(0)/|z|)$$

неравенства (13) будет меньше какого угодно малого числа $\varepsilon > 0$ для $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. В том случае, если удастся доказать (13) на окружностях $\partial C_{n,k}$ с некоторыми радиусами $r_{n,k}$, причем окажется, что $r_{n,k} \to 0$ при $n \to \infty$, то, учитывая справедливость неравенства (12) на окружности

$$\partial C_N := \{z \in \mathbb{C}|\ |z| = (w_N + w_{N+1})/2\},$$

при достаточно больших n (12) можно переписать в виде

$$|z|\exp(-\psi_1(0)/|z|) \prod_{i=1}^{n} |1 - w_i/z| > \psi_1(n),$$

причем очевидно, что

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{z \in \partial C_N} \prod_{i=1}^{n} |1 - w_i/z| > 0$$

и увеличивая при необходимости еще больше n, по теореме Руше можно утверждать, что, во-первых, каждое из чисел $z_i^{(n)}$, $i = 1, ..., N$, обязательно попадет в какой-либо из кругов $C_{n,k}$, $k \in \{1, ..., N\}$; во-вторых, в каждом круге $C_{n,k}$, $k = 1, ..., N$, будет хотя бы одно из чисел $z_i^{(n)}$ с номерами $i \in \{1, ..., N\}$; в-третьих, если $w_j = w_{j+1} = ... = w_{j+m_0-1}$, то круги $C_{n,\ell}$, $\ell = j, ..., j + m_0 - 1$ между собой совпадают, и в $C_{n,j}$ будет находиться ровно m_0 чисел $z_i^{(n)}$ с номерами i из множества $\{1, ..., N\}$, причем нумерацию $z_i^{(n)}$ можно подобрать таким образом, чтобы в каждом круге числа $z_i^{(n)}$ и w_i имели одинаковые номера.

В заключение остается доказать неравенство (13) на окружностях $\partial C_{n,k}$, $k = 1, ..., N$ со стремящимися к нулю радиусами $r_{n,k}$ и найти представления для этих радиусов, то есть фактически доказать сходимость и оценить скорость сходимости чисел $z_i^{(n)}$ к w_i для $i = 1, ..., N$. Исходя из вида неравенства (13), пусть $r_{n,k} = (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$, где константа C пока что неизвестна. Тогда, подставив $(C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$ в (13) вместо $r_{n,k}$, получим для произвольного фиксированного $k \in \{1, ..., N\}$ и любого z на окружности $\partial C_{n,k}$ неравенство

$$C > |z|^{\nu_k - 1} \frac{\exp(\psi_1(0)/|z|)}{\prod_{i=1, w_i \neq w_k}^{n} |1 - w_i/z|}. \tag{14}$$

Так как для $z \in \partial C_{n,k}$ при достаточно больших n выполняются оценки

$$|z|^{\nu_k - 1} < 2|w_1|^{\nu_k - 1} \quad \text{и} \quad \exp(\psi_1(0)/|z|) < \exp(\psi_1(0)/|w_{N+1}|),$$

то будем искать константу C, руководствуясь неравенством

$$C \geqslant 2|w_1|^{\nu_k - 1} \frac{\exp(\psi_1(0)/|w_{N+1}|)}{\prod_{i=1, w_i \neq w_k}^{n} |1 - w_i/z|}. \tag{15}$$

Оценим снизу на окружности $\partial C_{n,k}$ произведение

$$\Pi(z) = \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^{n} |1 - w_i/z|$$

по способу, предложенному А.Ю. Поповым в работе [22]. Итак, пусть $\Pi(z) = \Pi_1(z)\Pi_2(z)$, где

$$\Pi_1(z) = \prod_{\substack{|w_j| \leqslant 0.5|w_N| \\ j \leqslant n}} |1 - w_j/z|,$$

$$\Pi_2(z) = \prod_{\substack{0.5|w_N| < |w_j| \\ w_j \neq w_k}} |1 - w_j/z|.$$

При $z \in \partial C_{n,k}$ имеем $|z| \geqslant |w_k| - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k} \geqslant |w_N| - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$. В силу стремления $\psi_1(n)$ к нулю при достаточно больших n получаем $|z| > 0.9|w_N|$, а значит, при $|w_j| \leqslant 0.5|w_N|$ выполняется неравенство $|w_j/z| < 0.5|w_N|/(0.9|w_N|) < 0.6$. При $0 < t < 0.6$ имеем $1 - t > \exp(-2t)$, поэтому $|1 - w_j/z| \geqslant 1 - |w_j/z| > \exp(-2|w_j|/|z|)$, $z \in \partial C_{n,k}$. Отсюда

$$\Pi_1(z) > \exp(-2 \sum_{j=N+1}^{\infty} |w_j/z|) \geqslant \exp(-2 \sum_{j=N+1}^{\infty} s_j/|z|) >$$
$$> \exp(-2\psi_1(0)/|z|) > \exp(-2\psi_1(0)/|w_{N+1}|).$$

Оценим снизу $\Pi_2(z)$.
При $z \in \partial C_{n,k}$ и $|w_j| > |w_N|/2$, $w_j \neq w_k$ с учетом того, что

$$\alpha_N = \min\{|w_k - w_j| \mid |w_k| \geqslant |w_N|/2,$$
$$|w_j| \geqslant |w_N|/2, \quad w_k \neq w_j\},$$

имеем

$$|1 - w_j/z| = |z|^{-1}|z - w_j| = |z|^{-1}|z - w_k + w_k - w_j| \geqslant$$
$$\geqslant |z|^{-1}(|w_k - w_j| - |z - w_k|) \geqslant |z|^{-1}(\alpha_N - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}) \geqslant$$
$$\geqslant (\alpha_N - (C\psi_1(n))^{1/\nu_k})/(|w_k| + (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}).$$

Предел правой части последнего неравенства при $n \to \infty$ равен $\alpha_N/|w_k|$, причем

$$\alpha_N/|w_k| \geqslant \alpha_N/|w_1| \geqslant \alpha_N/s_1 > \alpha_N/\psi_1(0),$$

поэтому при достаточно больших n модули всех сомножителей произведения $\Pi_2(z)$ не меньше $\alpha_N/\psi_1(0)$. А так как количество всех сомножителей в $\Pi_2(z)$ не превосходит $2\psi_1(0)/|w_N|$, то произведение

$$\Pi_2(z) \geqslant (\alpha_N/\psi_1(0))^{2\psi_1(0)/|w_N|}.$$

Подставляя оценки для $\Pi_1(z)$ и $\Pi_2(z)$ в $\Pi(z) = \Pi_1(z)\Pi_2(z)$, получим оценку

$$\Pi(z) > e^{-2\psi_1(0)/|w_{N+1}|}(\alpha_N/\psi_1(0))^{2\psi_1(0)/|w_N|}, \ \ z \in \partial C_{n,k}. \tag{16}$$

Заменяя в неравенстве (15) произведение $\Pi(z) = \prod_{i=1, w_i \neq w_k}^{n} |1 - w_i/z|$ его нижней оценкой (16), выведем выражение для константы C:

$$C = 2|w_1|^{\nu_k - 1} e^{3\psi_1(0)/|w_{N+1}|}(\psi_1(0)/\alpha_N)^{2\psi_1(0)/|w_N|}. \tag{17}$$

Таким образом, при достаточно большом n компоненты $z_k^{(n)}$, $k = 1, ..., N$, вектор-решения $\overline{z}^{(n)}$ системы (6) будут удовлетворять неравенствам

$$|z_k^{(n)} - w_k| \leqslant r_{n,k}, \quad k = 1, ..., N,$$

где $r_{n,k} = (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}$, а константа C определена выражением (17). В результате доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть ν_k — алгебраическая кратность собственного числа λ_k оператора A, $k \in \mathbb{N}$, причем существует номер $j = j(k)$ такой, что $\lambda_j = ... = \lambda_{j+\nu_k-1}$ и $k \in \{j, ..., j+\nu_k-1\}$; g_m — спектральные следы степеней m оператора A^{-1}, $m = = 1, ..., n$, $\mathbb{N} \ni N$ — произвольное фиксированное число такое, что $1/\lambda_{N+1} < 1/\lambda_N$. Тогда можно так занумеровать компоненты $z_i^{(n)}$, $i = 1, ..., N$, вектор-решения $\overline{z}^{(n)}$ системы*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^m = g_m, \quad m = 1, 2, ..., n,$$

что для любого $n > N$ будут выполняться неравенства

$$|z_k^{(n)} - w_k| \leqslant (C\psi_1(n))^{1/\nu_k}, \quad k = 1, ..., N, \tag{18}$$

где

$$C = 2|w_1|^{\nu_k - 1} e^{3\psi_1(0)/|w_{N+1}|}(\psi_1(0)/\alpha_N)^{2\psi_1(0)/|w_N|},$$

$$w_\ell = 1/\lambda_\ell, \ \ \lambda_\ell \in \mathbb{N}, \quad \psi_1(\zeta) = \sum_{i=\zeta+1}^{\infty} s_i, \ \ \zeta \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\alpha_N = \min\{|w_k - w_j|| \ |w_k| \geqslant |w_N|/2, |w_j| \geqslant |w_N|/2, w_k \neq w_j\},$$

s_i — собственные числа оператора $\sqrt{(A^{-1})^* A^{-1}}$.

2. Демонстрация метода на примере некоторых дифференциальных уравнений

Пример 1. ДУ второго порядка с нулевыми граничными условиями. Пусть на отрезке [0,1] задано ДУ второго порядка

$$y'' + \lambda x(1+x)^2 y = 0$$
с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ (19)
и спектральным параметром λ.

Вычислим приближенно первые собственные числа соответствующего задаче (19) дискретного оператора $T := -\ d^2/dx^2$, действующего в СГП $\mathbb{H} = L_2^{\omega}(0,1)$ с весом $\omega = x(1+x)^2$. Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f со следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$,

$$f'' \in \mathbb{H}, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

Функция Грина $G(x,\xi)$ для (19) равна

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} x(1-\xi) & \text{при } x \leqslant \xi, \\ \xi(1-x) & \text{при } \xi \leqslant x, \end{array} \right. \tag{20}$$

а итерированные функции Грина $G_m(x,\xi)$, $m = 2, 3, ...$, вычисляются по формулам

$$G_m(x,\xi) = \int_0^1 t(1+t)^2 G_{m-1}(x,t) G(t,\xi) dt. \tag{21}$$

Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$g_m = \int_0^1 x(1+x)^2 G_m(x,x) dx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}. \tag{22}$$

Для любой функции $f \in \mathbb{H}$ выполняется включение

$$(T^{-1}f)(x) := \int_0^1 \xi(1+\xi)^2 G(x,\xi) f(\xi) d\xi \in \mathbb{H},$$

причем T^{-1} — оператор самосопряженный и ядерный.

Пусть в обозначениях теоремы 1.1 имеем $n = 14$, $N = 3$. Используя математический пакет Maple 8, вычислим по формулам (22) значения величин g_m для $m = 1, 2, ..., 14$:
g_1 = 13/60,
g_2 = 47/2310,
g_3 = 7687/2882880,
g_4 = 382625992373/1113144184152000,
g_5 = 39446435710547/891654113750400000,
g_6 = 8384922805250828080381/1471322426310265911782400000,
g_7 = 4426839389513424312551450689/6026389525924218148069532160000000,
g_8 = 5589545532378812961766855704244096813/5901442328447457656753312650718
9084160000000,
g_9 = 51239977144804622644949932535363065403/4195029221247462997029376487808
865075200000000,
g_{10} = 759507002777652098292162700168590890819461007393/48212608964874426314
10432105806231231940145152000000000000,
g_{11} = 2359404483552780488094196783337542451760417939089411/116120846314625
29568762209766061820925857387020288000000000000,
g_{12} = 11173313455733847225213831217292817932312651514453526685260159407517/
42633886315912513141278437963553008044046998139660958314310008832000000000000,
g_{13} = 8837450932196663395221615652449288784004821435252995086075437313750167/261
43099088917553058231938159250704532609619259240099638334897415782400000000000000,
g_{14} = 11838429075490236920920329668344069564155935218893108684632790683643
905078675989/2715041885763677027065599707574068370641370526678880822884
879944189628278374400000000000000000.

Теперь по формулам

$$\sigma_k(\overline{z}^{(14)}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(g_k - g_{k-1}\sigma_1(\overline{z}^{(14)}) + ...$$
$$... + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}(\overline{z}^{(14)})\Big),$$

$k = 1, ..., 14$, определим значения коэффициентов разложения многочлена

$$R_{14}(z) = \prod_{i=1}^{14}(z - z_i^{(14)}) = z^{14} + \sum_{k=1}^{14}(-1)^k \sigma_k(\overline{z}^{(14)}) z^{14-k}$$

по степеням z:
$\sigma_1(\overline{z}^{(14)}) = 13/60$,
$\sigma_2(\overline{z}^{(14)}) = 7373/554400$,
$\sigma_3(\overline{z}^{(14)}) = 44797/117936000$,
$\sigma_4(\overline{z}^{(14)}) = 2035017710153/178103069464320000$,
$\sigma_5(\overline{z}^{(14)}) = -622116618943/111563762712450048000$,
$\sigma_6(\overline{z}^{(14)}) = 27701150489949545134497/17655869115723190941388800000$,
$\sigma_7(\overline{z}^{(14)}) = -3692987068330634890057 1369/306798012228869287538085273600000 00$,

$\sigma_8(\overline{z}^{(14)}) = 78803308937225845619878884324010943/674450551822566589343235731510732390400000000$,
$\sigma_9(\overline{z}^{(14)}) = -2673031698325092542151773747649179082 24533/23225527581683304035273321162164512956940288000000000$,
$\sigma_{10}(\overline{z}^{(14)}) = 49451319845277063891766685213858143370 50066127/422572383623389171560785456319858720221606707200000000000000$,
$\sigma_{11}(\overline{z}^{(14)}) = -13502589888518818913659140450241511508367326691894 2863/1108721840612042323225415788463582662000863312697098240000000000000000$,
$\sigma_{12}(\overline{z}^{(14)}) = 1016801155675605113353627462452796833168824311762384332497442 62497/7870871319860771656851403931732863023516368887322023073411078553600000000000000000$,
$\sigma_{13}(\overline{z}^{(14)}) = -62460043001481411028355699327207430206014633177083265233987482492 1417487/448615580365825210479260058812742089779581066488560109793826839654825984000000000000000$,
$\sigma_{14}(\overline{z}^{(14)}) = 2790501446222632124927568055343846956336242723565420697858720160392759904235 1419/18348746707970159108368789296459658424861771359391636397569270459186996928577536000000000000000000$.

Остается найти наибольшие по модулю нули $z_i^{(14)}$, $i = 1, 2, 3$ $(N = 3)$ многочлена $R_{14}(z)$. Вычислим нули многочлена с точностью до двадцати значащих цифр:
$z_1^{(14)} = 0.13066226939995098241$,
$z_2^{(14)} = 0.10174090216633693808$,
$z_3^{(14)} = 0.070555731413648684564 + 0.041406799607177006 26\ i$.

Тогда $\lambda_1 \approx 1/z_1^{(14)} = 7.6533187781933255419$,
$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(14)} = 9.8288886643160757003$,
$\lambda_3 \approx |1/z_3^{(14)}| = 12.223665386780278538$.

Для сравнения подсчитаем в том же математическом пакете также с точностью до двадцати значащих цифр нули $\widetilde{z}_i^{(14)}$, $i = 1, 2, 3$, многочлена

$$\widetilde{R}_{14}(z) = \prod_{i=1}^{14}(z - \widetilde{z}_i^{(14)}) = z^{14} + \sum_{k=1}^{14}(-1)^k \sigma_k(\widetilde{\overline{z}}^{(14)}) z^{14-k},$$

у которого величины $\sigma_k(\widetilde{\widetilde{z}}^{(14)})$, $k = 1, ..., 14$, получены с помощью известных сумм $\widetilde{g}_m = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2m}$, $m = 1, ..., 14$:
$\widetilde{g}_1 = 1/6\ \pi^2$,
$\widetilde{g}_2 = 1/90\ \pi^4$,
$\widetilde{g}_3 = 1/945\ \pi^6$,
$\widetilde{g}_4 = 1/9450\ \pi^8$,
$\widetilde{g}_5 = 1/93555\ \pi^{10}$,
$\widetilde{g}_6 = 691/638512875\ \pi^{12}$,
$\widetilde{g}_7 = 2/18243225\ \pi^{14}$,
$\widetilde{g}_8 = 3617/325641566250\ \pi^{16}$,
$\widetilde{g}_9 = 43867/38979295480125\ \pi^{18}$,
$\widetilde{g}_{10} = 174611/1531329465290625\ \pi^{20}$,
$\widetilde{g}_{11} = 155366/13447856940643125\ \pi^{22}$,
$\widetilde{g}_{12} = 236364091/201919571963756521875\ \pi^{24}$,
$\widetilde{g}_{13} = 1315862/11094481976030578125\ \pi^{26}$,
$\widetilde{g}_{14} = 6785560294/564653660170076273671875\ \pi^{28}$.
Результаты расчетов таковы:
$\widetilde{\widetilde{z}}_1^{(14)} = 0.99999999999999999981 \approx 1$,
$\widetilde{\widetilde{z}}_2^{(14)} = 0.25000000005168208540 \approx 1/4$,
$\widetilde{\widetilde{z}}_3^{(14)} = 0.11110689644850172554 \approx 1/9$.

Пример 2. ДУ второго порядка.

Пусть на отрезке [0,1] задано ДУ второго порядка

$$-\ xy'' - y' = \lambda y \tag{23}$$

со спектральным параметром λ при следующих условиях:

$$y(x) \text{ ограничено при } x \to 0,\ \ y(1) = \alpha y'(1),\ \ \alpha < 0. \tag{24}$$

Вычислим приближенно первые собственные числа соответствующего задаче (23)–(24) дискретного оператора $T := -\ xd^2/dx^2 - d/dx$, действующего в СГП $\mathbb{H} = L_2(0,1)$. Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f со следующими свойствами: f и f' — абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$, $f'' \in \mathbb{H}$ и f удовлетворяет условиям (24). Так как общее решение $y(x) = C_1 \ln x + C_2$ уравнения $xy'' + y' = 0$ удовлетворяет условиям (24) только при $C_1 = C_2 = 0$, то функцию Грина задачи (23)–(24) можно построить. Используя классический алгоритм построения функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения, получаем

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) = \begin{cases} -\alpha - \ln \xi & \text{при } x \leqslant \xi, \\ -\alpha - \ln x & \text{при } \xi \leqslant x. \end{cases} \tag{25}$$

Итерированные функции Грина $G_m(x,\xi)$, $m = 2, 3, ...$, вычисляются по формулам

$$G_m(x,\xi) = \int_0^1 G_{m-1}(x,t) G(t,\xi) dt, \tag{26}$$

а величины $g_m = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$, — по формулам

$$g_m = \int_0^1 G_m(x,x) dx. \tag{27}$$

Для любой функции $f \in \mathbb{H}$ выполняется

$$(T^{-1}f)(x) := \int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi \in \mathbb{H},$$

причем T^{-1} — оператор самосопряженный и ядерный.

Пусть в обозначениях теоремы 1.1 имеем $n = 10$, $N = 3$, а коэффициент $\alpha = -2$. Используя математический пакет Maple 8, вычислим по формулам (27) значения величин g_m для $m = 1, 2, ..., 10$:
$g_1 \ = \ 3,$
$g_2 \ = \ 13/2,$
$g_3 \ = \ 49/3,$
$g_4 \ = \ 46387/1152,$
$g_5 \ = \ 2974409/30000,$
$g_6 \ = \ 5698504979/23328000,$
$g_7 \ = \ 14047522954729/23337720000,$
$g_8 \ = \ 222334503969854178703/149887160156160000,$
$g_9 \ = \ 6066616118633769975455041/1659503797511454720000,$
$g_{10} \ = \ 1245964529230180141911670656643/1382919831259545$
$60000000000.$

Теперь по формулам

$$\sigma_k(\overline{z}^{(10)}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(g_k - g_{k-1}\sigma_1(\overline{z}^{(10)}) + ...$$

$$... + (-1)^{k+1}g_1\sigma_{k-1}(\overline{z}^{(10)})\Big),$$

$k = 1, ..., 10$, определим значения коэффициентов разложения многочлена

$$R_{10}(z) = \prod_{i=1}^{10}(z - z_i^{(10)}) = z^{10} + \sum_{k=1}^{10}(-1)^k\sigma_k(\overline{z}^{(10)})z^{10-k}$$

по степеням z:
$\sigma_1(\overline{z}^{(10)}) \ = \ 3,$
$\sigma_2(\overline{z}^{(10)}) \ = \ 5/4,$
$\sigma_3(\overline{z}^{(10)}) \ = \ 7/36,$
$\sigma_4(\overline{z}^{(10)}) \ = \ 1373/4608,$
$\sigma_5(\overline{z}^{(10)}) \ = \ -4624861/14400000,$
$\sigma_6(\overline{z}^{(10)}) \ = \ 7245629299/13996800000,$
$\sigma_7(\overline{z}^{(10)}) \ = \ -14109051352063/15682947840000,$
$\sigma_8(\overline{z}^{(10)}) \ = \ 88015200461466682717/53959377656217600000,$
$\sigma_9(\overline{z}^{(10)}) \ = \ -29505049170430792202543603/95587418736659$
$79187200000,$
$\sigma_{10}(\overline{z}^{(10)}) \ = \ 1198940069229117456280656417553/1991404557$
$01374566400000000000.$

Остается найти наибольшие по модулю нули $z_i^{(10)}$, $i = 1, 2, 3$ $(N = 3)$ многочлена $R_{10}(z)$. Вычислим нули многочлена с точностью до двадцати значащих цифр:
$z_1^{(10)} = \ 2.4846927558978783678,$
$z_2^{(10)} = \ 1.4689293728344004055,$
$z_3^{(10)} = \ 0.84416177739472678183 + 0.85308302576771913565 \ i.$
Поэтому
$\lambda_1 \approx 1/z_1^{(10)} = \ 0.40246424739087552032,$

$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(10)} = \ 0.68076792424024520626,$
$\lambda_3 \approx |1/z_3^{(10)}| = \ 0.83322925698119051815.$

Пример 3. ДУ четвертого порядка.

Пусть на отрезке [0,1] задано ДУ

$$y^{IV} = \lambda y \tag{28}$$

со спектральным параметром λ при следующих условиях:

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0. \tag{29}$$

Вычислим приближенно первые собственные числа соответствующего задаче (28)–(29) дискретного оператора $T := \ d^4/dx^4$, действующего в СГП $\mathbb{H} = L_2(0,1)$. Областью определения $\mathcal{D}(T)$ оператора T будем считать множество всех функций f со следующими свойствами: f, f', f'' и f''' — абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$, $f^{IV} \in \mathbb{H}$ и f удовлетворяет условиям (29). Так как общее решение $y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ уравнения $y^{IV}(x) = 0$ удовлетворяет условиям (29) только при $A = B = C = D = 0$, то функцию Грина задачи (28)–(29) можно построить. Используя классический алгоритм построения функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения, получаем

$$G(x,\xi) :=$$
$$\begin{cases} (\xi/2 - \xi^2 + \xi^3/2)x^2 - (1/6 - \xi^2/2 + \xi^3/3)x^3, & x \leqslant \xi, \\ (x/2 - x^2 + x^3/2)\xi^2 - (1/6 - x^2/2 + x^3/3)\xi^3, & \xi \leqslant x. \end{cases} \tag{30}$$

Обозначим $G_1(x,\xi) = G(x,\xi)$. Итерированные функции Грина $G_m(x,\xi)$, $m = 2,3,...$, вычисляются по формулам (26), а величины

$$g_m = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

— по формулам (27). Для любой функции $f \in \mathbb{H}$ выполняется

$$(T^{-1}f)(x) := \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi \in \mathbb{H},$$

при этом T^{-1} — оператор самосопряженный и ядерный.

Пусть в обозначениях теоремы 1.1 имеем $n = 10$, $N = 3$. Используя математический пакет Maple 8, вычислим по формулам (27) значения величин g_m для $m = 1,2,...,10$:
$g_1 \ = \ 1/420,$
$g_2 \ = \ 71/17463600,$
$g_3 \ = \ 127/15891876000,$
$g_4 \ = \ 8888809/577525394365920000,$
$g_5 \ = \ 5531357972003/1865485567255555536512000000,$
$g_6 \ = \ 9024810395470865153/15782366461529638534965553152000000 0,$
$g_7 \ = \ 318197130963024260 07079/2884299558564664518991244557369344 00000000,$
$g_8 \ = \ 4379566150249020222072150460433/205730856943059855256495674110765714$
$48514969600000000,$
$g_9 \ = \ 3327374405633512541439318533 4507899/80993116944791115140816386273 3874$
$70864721591664640000000000,$
$g_{10} \ = \ 26035446809547344249358577695523805 1195474471151/32837073793852799024$
$2317987268852231939504863344857808879222784000000000000.$

Теперь по формулам

$$\sigma_k(\overline{z}^{(10)}) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(g_k - g_{k-1}\sigma_1(\overline{z}^{(10)}) + ...$$
$$... + (-1)^{k+1} g_1 \sigma_{k-1}(\overline{z}^{(10)})\Big),$$

$k = 1, ..., 10$, определим значения коэффициентов разложения многочлена

$$R_{10}(z) = \prod_{i=1}^{10}(z - z_i^{(10)}) = z^{10} + \sum_{k=1}^{10}(-1)^k \sigma_k(\overline{z}^{(10)}) z^{10-k}$$

по степеням z:
$\sigma_1(\overline{z}^{(10)}) = 1/420,$
$\sigma_2(\overline{z}^{(10)}) = 1/1247400,$
$\sigma_3(\overline{z}^{(10)}) = 1/13621608000,$
$\sigma_4(\overline{z}^{(10)}) = 68279/495021766599360000,$
$\sigma_5(\overline{z}^{(10)}) = -1352376941/12113542644516593280000000,$
$\sigma_6(\overline{z}^{(10)}) = 2168372481467254171/1555690408350778655589461667840000000 0,$
$\sigma_7(\overline{z}^{(10)}) = -67297251471912225636 6031/362123809577793630359350754177721139 2000$
$000000,$
$\sigma_8(\overline{z}^{(10)}) = 569382038157192731027844835 26769/216899103462825961684705439276778 7$
$104143435366400000000 00,$
$\sigma_9(\overline{z}^{(10)}) = -2339824781729822251604371072085 1157/603977243502585172907230766210$
$117997019781012127744000000000000,$
$\sigma_{10}(\overline{z}^{(10)}) = 8381205040632814898729904541693636358974334 4919/1419720543440106310$
$75355129789768464985609455622629699721311027200000000000000 00.$

Остается найти наибольшие по модулю нули $z_i^{(10)}$, $i = 1, 2, 3$ $(N = 3)$ многочлена $R_{10}(z)$. Вычислим нули многочлена с точностью до двадцати значащих цифр:
$z_1^{(10)} = 0.0019482600314335492384,$
$z_2^{(10)} = 0.0011858996632523459593,$
$z_3^{(10)} = 0.00067059786247871874709 + 0.00067434387437251048742\ i.$
Отсюда
$\lambda_1 \approx 1/z_1^{(10)} = 513.27850690659089656,$
$\lambda_2 \approx 1/z_2^{(10)} = 843.24165946509032318,$
$\lambda_3 \approx |1/z_3^{(10)}| = 1051.5013685381798182.$

Литература

[1] Гельфанд И.М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11. № 1.

[2] Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. Акад. наук СССР. 1953. Т. 88.

[3] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

[4] Дикий Л.А. Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке // Изв. Акад. наук СССР. Сер. Матем. 1955. Т. 19. № 4.

[5] Дикий Л.А. Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма — Лиувилля // Докл. Акад. наук СССР. 1957. Т. 116. № 1.

[6] Дородницын А.А. Избранные научные труды: в 2 т. М.: Научное издание, 1997. Т. 1. 396 с.

[7] Дородницын А.А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1952. Т. 7. № 16.

[8] Дубровский В.В., Малеко Е.М. О сходимости формально-собственных чисел // Вестник Челябинского ун-та. Сер. Мат.-мех. 1999. № 1.

[9] Дубровский В.В., Малеко Е.М. О сходимости формально-собственных чисел некоторых вполне непрерывных операторов // Дифференциальные и интегральные уравнения: тез. докл. междун. науч. конф. Челябинск: ЧелГУ, 1999. 131 с.

[10] Малеко Е.М. К обоснованию метода вычисления собственных чисел ядерных операторов с помощью теории следов // Фундаментальные и прикладные исследования: сб. науч. тр. преподавателей и аспирантов Магнитогорского госпединститута — 1998 / под ред. В.А. Кузнецова, Н.И. Платонова. Магнитогорск: МГПИ, 1998. Вып. 2. 99 с.

[11] Малеко Е.М. К обоснованию метода вычисления собственных чисел ядерных операторов с помощью теории следов // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 4.

[12] Малеко Е.М. Об оценках формально-собственных чисел ядерных операторов // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 12.

[13] Малеко Е.М. О новом методе нахождения собственных чисел несамосопряженных ядерных операторов // Вестник МаГУ. 2002. Вып. 2–3.

[14] Малеко Е.М. К нахождению определителей возмущения линейных ограниченных операторов // Вестник МаГУ. 2004. Вып. 6.

[15] Малеко Е.М. К обоснованию существования полиномов, построенных с помощью следов высших порядков ядерных операторов // Проблемы мат. образования в пед. вузах на современном этапе: тез. докл. конф. вузов Уральской зоны. Челябинск: ЧГПУ, 1998. 98 с.

[16] Малеко Е.М. К вычислению собственных чисел ядерных операторов с помощью теории следов // Математическое моделирование и краевые задачи: тез. докл. восьмой межвуз. конф. Самара: СГТУ, 1998. 108 с.

[17] Малеко Е.М. Достаточное условие существования собственных чисел некоторых вполне непрерывных операторов // Проблемы физ.-мат. образования в пед. вузах России на современном этапе: тез. докл. всерос. науч.-практической конф. Магнитогорск: МГПИ, 1999. 116 с.

[18] Малеко Е.М. О сходимости формально-собственных чисел к собственным числам некоторых вполне непрерывных операторов // Современные подходы в формирования будущих специалистов по физ. и мат. дисциплинам: тез. докл. региональной науч. конф. Уфа: БГПИ, 1999. 118 с.

[19] Малеко Е.М. Задача восстановления спектра ядерных операторов по следам его натуральных степеней // Обратные и некорректно поставленные задачи: тез. докл. междунар. конф. М.: Изд-во МГУ, 2001. 96 с.

[20] Малеко Е.М. О вычислении собствен-ных чисел слабо несамосопряженных дискретных операторов // Дифференциальные и интегральные уравнения. Математические модели: тез. докл. междунар. конф. Челябинск: ЧелГУ, 2002. 132 с.

[21] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций: в 2 т. М.: Наука, 1967. Т. 1. 488 с.

[22] Корректность метода А.А. Дородницына приближенного вычисления собственных значений одного класса краевых задач / В.А. Садовничий [и др.] // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 4.

[23] Садовничий В.А., Дубровский В.В., Малеко Е.М. Об одном способе приближенного нахождения собственных чисел оператора Штурма — Лиувилля // Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 1.

[24] Садовничий В.А., Подольский В.Е. Об одном классе операторов Штурма — Лиувилля и приближенном вычислении первых собственных значений // Мат. сб. 1998. Т. 89. № 1.

[25] Садовничий В.А., Подольский В.Е. О вычислении первых собственных значений оператора Штурма — Лиувилля // Докл. РАН. 1996. Т. 346. № 2.

[26] Шкарин С.А. О способе Гельфанда — Дикого вычисления первых собственных значений оператора Штурма — Лиувилля // Вестник МГУ. Сер. 1. Мат.-мех. 1996. № 1.

Поступила в редакцию $14/X/2010$;
в окончательном варианте — $14/X/2010$.

ABOUT THE METHOD OF TRACES OF RESOLVENTS CALCULATED PRECISELY

 E.M. Maleko[2]

In the article it is ascertained that there are some methods of calculation of eigenvalues of ordinary boundary problems for the equations of mathematical physics. If the positive degree of a resolvent is the kernel operator this can take advantage at calculation of a spectrum of a boundary problem. It is mentioned that similar results are reached by A.A. Dorodnitsyn

Key words: spectrum, discrete operator, Hilbert space.

Paper received $14/X/2010$.
Paper accepted $14/X/2010$.

[2]Maleko Evgeniy Mikhailovich (`emaleko@rambler.ru`, `mgtu@magtu.ru`), the Dept. of Mathematics, Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000, Russian Federation.