УДК 512.5+511.334

ФУНКЦИИ МАККЕЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ 2-ГРУППЫ

© 2011 Г.В. Воскресенская[1]

В статье рассматривается проблема нахождения таких конечных групп, с элементами которых могут быть ассоциированы мультипликативные эта-произведения. Эта задача решается для элементарных абелевых 2-групп.

Ключевые слова: представления групп, модулярные формы, эта-функция Дедекинда.

Введение

Теория модулярных форм является очень красивой и активно развивающейся областью современной математики. Она пересекается с различными ветвями математики — комплексным анализом, теорией чисел, алгебраической геометрией, теорией представлений и развивается под сильным воздействием этих областей. В свою очередь результаты теории модулярных форм имеют различные приложения. Особую роль играют функции, выражающиеся через эта-функцию Дедекинда. Они исследуются со времен классиков Кронекера, Вебера, Дедекинда и других и по настоящее время с неослабевающим интересом. Исследованию одной из открытых проблем в этой области посвящена данная статья.

В статье изучается соответствие между элементами конечных групп и модулярными формами, основанное на рассмотрении характеристических многочленов операторов $T(g)$, где $T-$ точное представление (принцип фрейм-соответствия). Рассматриваемые модулярные формы являются мультипликативными эта-произведениями. Этот класс функций был открыт в 1985 году Дж. Маккеем. Их полный список можно посмотреть в статье [5].

Существует проблема нахождения всех таких конечных групп, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами группы с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными $\eta-$произведениями.

В статье эта проблема рассматривается для элементарных абелевых 2-групп.

1. Постановка задачи

В современных математических исследованиях существует несколько различных способов сопоставлять элементам конечных групп модулярные формы. Здесь мы опишем принцип, который называется фрейм-соответствием (Frame-shape correspondence).

[1]Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Первые современные исследования этого соответствия проводил в пятидесятые годы Морис Ньюман, затем активный интерес проявился в исследованиях Джеффри Мейсона и его учеников [6–10].

Суть его в следующем.

Для построения соответствия между элементами конечных групп и модулярными формами мы используем эта-функцию Дедекинда, которая определяется формулой:

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \qquad q = e^{2\pi i z},$$

z принадлежит верхней комплексной полуплоскости.

Пусть $T-$ такое линейное представление G в пространстве V, $\quad 24 \mid dimV$, что для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^{s} (x^{a_j} - 1)^{t_j}, \quad a_j,\ t_j \in \mathbf{N},\ 24 | \sum_{j=1}^{s} a_j t_j.$$

Тогда каждому элементу g можно сопоставить функцию

$$\eta_g(z) = \quad \prod_{j=1}^{s} \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Функция $\eta_g(z)$является параболической формой из пространства $S_k(N, \chi)$, где $k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s} t_j$, минимальный уровень N определяется из условия $24 | \sum_{j=1}^{s} \frac{N t_j}{a_j}$, характер $\chi-$ характер Дирихле по модулю N, $\chi(d) = \left(\frac{\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}}{d} \right)$. Если d четно, то $\chi(d)$ определяется как $\chi(d+N) = \chi(d)$, $\quad (d, N) = 1$ [14]. Символ $\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}$ называется фрейм-формой (Frame-shape).

Такое соответствие можно рассмотреть для любой группы.

В 1985 году были описаны все эта-произведения с мультипликативными коэффициентами. Существует 30 таких функций. Их называют мультипликативными η-произведениями или функциями Маккея по имени открывшего их математика.

Определение. Конечная группа G называется $M\eta P$-группой, если модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами группы с помощью некоторого точного представления по принципу фрейм-соответствия, являются мультипликативными η-произведениями.

Подгруппа $M\eta P$-группы сама является $M\eta P$-группой. Единичный элемент всегда соответствует форме $\eta^{24}(z)$.

Классификация $M\eta P$-групп нечетного порядка почти завершена, для групп четного порядка проблема остается открытой. В этой статье мы полностью опишем $M\eta P$-группы экспоненты 2. Сначала предполагалось, что максимальный возможный порядок такой группы равен 32, но оказалось, что ситуация более сложная. Мы покажем, что группы порядка 64 реализуются, а группы порядка 128 и выше уже нет. Линейное представление T , связывающее элементы группы с мультипликативными η-произведениями, мы будем называть допустимым, а $M\eta P$-группы — допустимыми группами. Элементам второго порядка соответствуют формы $\eta^8(2z)\eta^8(z)$ и $\eta^{12}(2z)$. В первом случае элементы будем называть видимыми ($\chi_T(g) = 8$), а во втором случае — невидимыми ($\chi_T(g) = 0$).

2. Группа $G \cong (Z_2)^5$

Теорема 1. Группа $(Z_2)^5$ является $M\eta P$-группой. Пусть u элементов соответствуют модулярной форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, v элементов соответствуют модулярной форме $\eta^{12}(2z)$. Реализуются следующие возможности $u = 5,\ 13,\ 17,\ 21,\ 25$.

Доказательство. Доказательство носит конструктивный характер, мы выпишем явно допустимые представления в пунктах 2.1–2.6. В таблицах укажем значения на образующих элементах группы $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_5$.

Через T обозначим допустимое представление. Вычислим кратность, с которой в T входит единичное. Получим $m_1 = \frac{3+u}{4}$. Так как это число должно быть целым, то u может равняться одному из чисел 1, 5, 13, 17, 21, 25, 29.

Случай $u = 1$ не является допустимым. В этом случае элемент g_1 соответствует $\eta^8(2z)\eta^8(z)$. Пусть T_k- одномерное представление, при котором $T_k(g_1) = -1$, тогда $m_k = \frac{1}{2}$. Получаем противоречие.

Случай $u = 29$ не является допустимым. В этом случае два элемента g_1 и g_2 соответствует $\eta^{12}(2z)$. Пусть T_k- одномерное представление, при котором $T_k(g_1) = 1$, $T_k(g_2) = -1$, тогда $m_k = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$. Получаем противоречие.

2.1. $u = 5$.

Элементы $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_1g_2g_3g_4$ соответствуют параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1
m	2	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0

2.2. $u = 9$.

Пусть $H \cong < g_1 > \times < g_2 > \times < g_3 > \times < g_4 >$.

Элементы $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_1g_2,\ g_3g_4$ и все элементы из g_5H соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1	±1
m	3	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1

2.3. $u = 13$.

Элементы

$g_1g_3,\ g_1g_4,\ g_2g_3,\ g_2g_4,\ g_1g_2g_3,\ g_1g_2g_4,\ g_2g_3g_4,\ g_1g_3g_4,\ g_1g_2g_3g_4,\ g_5,\ g_1g_3g_5,\ g_2g_4g_5,\ g_1g_2g_3g_4g_5$ соответствуют параболической форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	4	0	0	0	0	2	1	1	0	1	2	1	0	1	1	2

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	2	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0

2.4. $u = 17$.

Пусть $H \cong < g_1 > \times < g_2 > \times < g_3 > \times < g_4 >$.

В подгруппе H элементы g_1, g_2, g_3, g_4 соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы из H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_5H элементы g_5, $g_1g_2g_3g_4g_5$, $g_1g_4g_5$, $g_1g_3g_5$, $g_2g_3g_5, g_2g_4g_5$ соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы в g_5H соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	5	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	3

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0

2.5. $u = 21$.

Элементы g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, g_3g_4, g_5, $g_5g_1g_3$, $g_5g_2g_4$, $g_5g_1g_2g_3g_4$ соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	6	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1
m	0	0	0	0	0	2	1	1	0	1	2	1	0	1	1	2

2.6. $u = 25$.

Пусть $H \cong < g_1 > \times < g_2 > \times < g_3 > \times < g_4 >$.

В подгруппе H элементы g_1, g_2, g_3, g_4 соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы из H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_5H элементы g_5, $g_1g_2g_3g_4g_5$ соответствуют $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы в g_5H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1	- 1
m	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	2

3. Группа $G \cong (Z_2)^6$

Теорема 2. Группа $(Z_2)^6$ является $M\eta P$-группой. Пусть u элементов соответствуют модулярной форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, v элементов соответствуют модулярной форме $\eta^{12}(2z)$. Реализуются следующие возможности $u = 21,\ 29,\ 37,\ 45$.

Доказательство. Доказательство носит конструктивный характер, мы выпишем явно допустимые представления в пунктах 3.1–3.4. В таблицах укажем значения на образующих элементах группы $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$.

Пусть $T-$ допустимое представление. Вычислим кратность, с которой в T входит единичное представление. Получим $m_1 = \frac{3+u}{8}$. Так как это число должно быть целым, то u может равняться одному из чисел $5,\ 13,\ 21,\ 29,\ 37,\ 45,\ 53,\ 61$.

Существуют одномерные представления, не входящие в T, так как степень T равна 24, а неприводимых представлений у группы 64.

Случай $u = 5$ не является допустимым. В этом случае должна существовать допустимая подгруппа порядка 32, в которой 1 видимый элемент — ядро одномерного представления T_k, для которого $m_k = 0$. Это невозможно.

Случай $u = 13$ не является допустимым.

Если существует допустимая подгруппа H порядка 32, в которой 9 видимых элементов, то имеется представление T_k группы G, при котором вклад от элементов из H в число $64m_k = 64 < \chi_T, \chi_{T_k} >$ равен 32, вклад от элементов из g_5H равен ± 32. При этом существует представление T_k группы G, при котором вклад от элементов из H в число $64m_k = 64 < \chi_T, \chi_{T_k} >$ равен 0, вклад от элементов из g_5H также равен нулю. Если видимые и невидимые элементы из H определены, то таких наборов из четырех элементов существует шесть. При этом всегда возникает ситуация, когда при некотором наборе значений переменных соотношение вкладов 32/0. Тогда $m_k = \frac{1}{2}$. Это число должно быть целым. Противоречие.

В противном случае имеется допустимая подгруппа H порядка 32, в которой 13 видимых элементов. Существует представление T_k группы G, при котором вклад от элементов из H в число $64m_k = 64 < \chi_T, \chi_{T_k} >$ равен 32, а вклад от элементов из g_5H равен нулю. Получаем $m_k = \frac{1}{2}$. Противоречие.

Случай $u = 53$ не является допустимым. В этом случае должна существовать допустимая подгруппа порядка 32, в которой 29 видимых элементов — ядро одномерного представления T_k, для которого $m_k = 1$. Это невозможно.

Случай $u = 61$ не является допустимым. В этом случае должна существовать допустимая подгруппа порядка 32, в которой 29 видимых элементов — ядро одномерного представления T_k, для которого $m_k = 0$. Это невозможно.

3.1. $u = 21$.

Пусть $H \cong < g_1 > \times < g_2 > \times < g_3 > \times < g_4 >$.

В подгруппе H элементы $g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, g_3g_4$ соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы из H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_5H элементы $g_5, g_5g_1g_3, g_5g_2g_4, g_1g_2g_3g_4g_5$ соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы в g_5H соответствуют $\eta^{12}(2z)$, в g_6H элементы $g_6, g_6g_2g_3, g_6g_1g_2g_4, g_6g_1g_3g_4$ соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы в g_6H соответствуют $\eta^{12}(2z)$, в g_5g_6H элементы $g_5g_6, g_5g_6g_1g_4, g_5g_6g_1g_2g_3, g_5g_6g_2g_3g_4$ соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы в g_6H соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	3	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0

3.2. $u = 29$.

Пусть $H \cong < g_1 > \times < g_2 > \times < g_3 > \times < g_4 >$.

В подгруппе H элементы $g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4,\ g_1g_2,\ g_3g_4$ соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы из H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_5H элементы $g_5,\ g_5g_1g_3,\ g_5g_2g_4,\ g_1g_2g_3g_4g_5$ соответствуют $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы в g_5H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_6H элементы $g_6,\ g_6g_2g_3,\ g_6g_1g_2g_4,\ g_6g_1g_3g_4$ соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы в g_6H соответствуют $\eta^{12}(2z)$, в g_5g_6H элементы $g_5g_6,\ g_5g_6g_1g_4,\ g_5g_6g_1g_2g_3,\ g_5g_6g_2g_3g_4$ соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы в g_6H соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	4	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	3	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

Одномерные представления, переводящие g_5 в 1, g_5 в - 1, не входят в допустимое представление.

3.3. $u = 37$.

Пусть $F \cong < g_1 > \times < g_2 > \times < g_3 > \times < g_4 > \times < g_5 >$.

В подгруппе F элементы g_1, g_4, g_2g_3, g_3g_4, $g_1g_3g_4g_5$, $g_2g_3g_4g_5$ соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы из F соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_6F элементы g_6, g_6g_1, g_6g_2, g_6g_3, g_6g_5, $g_6g_1g_2g_4$, $g_6g_1g_2g_3g_4$, $g_6g_1g_2g_3g_5$, $g_6g_4g_5$, $g_6g_2g_5$, $g_6g_1g_3g_5$, $g_6g_1g_2g_3g_4$ соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, остальные элементы в g_6F соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	5	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0

3.4. $u = 45$.

Пусть $H \cong < g_1 > \times < g_2 > \times < g_3 > \times < g_4 >$.

В подгруппе H элементы g_1, g_2, g_3, g_4, g_1g_2, g_3g_4 соответствуют параболической форме $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы из H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_5H элементы g_5, $g_5g_1g_3$, $g_5g_2g_4$, $g_1g_2g_3g_4g_5$ соответствуют $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы в g_5H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_6H элементы g_6, $g_6g_2g_3$, $g_6g_1g_2g_4$, $g_6g_1g_3g_4$ соответствуют $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы в g_6H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в g_5g_6H элементы g_5g_6, $g_5g_6g_1g_4$, $g_5g_6g_1g_2g_3$, $g_5g_6g_2g_3g_4$ соответствуют $\eta^{12}(2z)$, остальные элементы в g_6H соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Единичное представление входит с кратностью 6, одномерные неединичные представления, переводящие элементы g_5, g_6 в 1, не входят в T.

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
g_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
m	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1

g_1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_2	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
g_3	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
g_4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
g_5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
g_6	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
m	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1

4. Группы $G \cong (Z_2)^n, \quad n \geqslant 7$

Теорема 3. Группа $(Z_2)^n$, $n \geqslant 7$ не является $M\eta P$-группой.

Доказательство. Так как подгруппа $M\eta P$-группы является $M\eta P$-группой, то достаточно показать, что группа G порядка 128 не является допустимой.

Так как в допустимых группах типа $(Z_2)^6$ количество видимых элементов может быть равно 21, 29, 37, 45, то группа G может содержать только 45, 61 или 77 элементов.

Рассмотрим подробно случай, когда $u = 45$.

В этом случае существует подгруппа H порядка 32, содержащая 9 видимых элементов. Распределение элементов в подгруппе H и смежных классах g_5H, g_6H, g_5g_6H может быть только 9/12/12/12. Существует такое представление T_k, что вклад от подгруппы H в $128m_k$ равен 32. Тогда вложения от подгруппы и факторов при $g_5 = g_6 = 1$ должны быть 32/-32/-32/32 (с точностью до перестановки смежных классов). Но тогда существует подгруппа порядка 64, в которой 9 видимых элементов, что невозможно.

Два других случая рассматриваются аналогично. При $u = 61, \ 77$ рассуждения приводят к существованию подгруппы порядка 32 с 17 видимыми элементами. Такой подгруппы не может быть.

В заключение заметим, что в простой группе M_{24} максимальная элементарная абелева 2-подгруппа имеет порядок 64, в M_{23} максимальная элементарная абелева 2-подгруппа имеет порядок 16, причем при допустимом представлении все элементы соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, в M_{22} максимальная элементарная абелева 2-подгруппа имеет порядок 16, в M_{12} максимальная элементарная абелева 2-подгруппа имеет порядок 4.

Литература

[1] Белоногов В.А. Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990.

[2] Воскресенская Г.В. Мультипликативные произведения эта-функций Дедекинда и представления групп // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 282–295.

[3] Воскресенская Г.В. Конечные простые группы и мультипликативные η-произведения // Записки ПОМИ. 2010. Т. 375. С. 71–91.

[4] Коксетер Г.С.М., Мозер У.О.Дж.М. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.

[5] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[6] Mason G. Frame shapes and rational characters of finite groups // J. Algebra. 1984. V. 89. P. 236–246.

[7] Mason G. M_{24} and certain automorphic forms // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 223–244.

[8] Mason G. Finite groups and Hecke operators // Math. Ann. 1989. V. 283. P. 381–409.

[9] Newman M. Construction and application of a certain class of modular forms // Proc. L.M.S. 1956. V. 7. P. 334–350.

[10] Ono K. The web of modularity : arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. Providence: Amer. Math. Soc., 2004. 216 p.

[11] Voskresenskaya G.V. Finite groups associated to multiplicative $\eta-$ products // Max-Plank-Institut fur Mathematik. Preprint Series. 2006. V. 96. P. 1–17.
[12] Wilson R.A. The finite simple groups. Berlin; New York: Springer-Verlag, 2009. 318 p.

Поступила в редакцию $4/V/2011$;
в окончательном варианте — $4/V/2011$.

THE MACKAY'S FUNCTIONS AND ELEMENTARY ABELIAN 2-GROUPS

 G.V. Voskresenskaya[2]

In the article we consider the problem of finding finite groups such that all their elements can be associated with multiplicative η-functions. We solve this problem for elementary Abelian 2-groups.

Key words: group representations, modular forms, Dedekind η-function.

Paper received $4/V/2011$.
Paper accepted $4/V/2011$.

[2]Voskresenskaya Galina Valentinovna (galvosk@mail.ru), the Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.