УДК 519.999

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© 2011 С.А. Бейлин[1]

В работе изучена задача с неклассическими граничными условиями для гиперболического уравнения, которую можно рассматривать как обобщение задачи о колебании струны, если ее концы испытывают сопротивление среды. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи. Доказательство разрешимости базируется на полученных априорных оценках в пространстве С.Л. Соболева.

Ключевые слова: волновое уравнение, обобщенное решение, метод Галеркина.

1. Постановка задачи

В прямоугольнике $D = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

и поставим для него следующую задачу: найти решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u_x(0,t) = \alpha(t)u_t(0,t), \qquad u_x(l,t) = \beta(t)u_t(l,t). \tag{1.3}$$

Граничиные условия такого вида возникают при моделировании колебаний струны, концы которой закреплены упруго, но закон Гука нарушается, например, изза влияния сопротивления среды [1].

Обозначим

$$W = \{u : u(x,t) \in W_2^1(D), \ u_t(0,t) \in L_2(0,T), \ u_t(l,t) \in L_2(0,T)\},$$

$$\bar{W} = \{v : v(x,t) \in W(D), \ v(x,T) = 0\}.$$

Под обобщенным решением поставленной задачи будем понимать функцию $u(x,t) \in W(D)$, удовлетворяющую для любой функции $v \in \bar{W}(D)$ тождеству

$$\int_0^T \int_0^l [-u_t v_t + a u_x v_x + cuv]\, dxdt + \tag{1.4}$$

[1]Бейлин Сергей Александрович (sbeilin@uni-smr.ac.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$+\int_0^T [a(0,t)\alpha(t)u_t(0,t)v(0,t)-a(l,t)\beta(t)u_t(l,t)v(l,t)]\,dt=$$
$$=\int_0^T\int_0^l fvdxdt+\int_0^l \psi(x)v(x,0)dx$$
и начальному условию $u(x,0)=\varphi(x)$.

Теорема. Пусть выполнены условия:
$a(x,t)\in C(\bar D), a_t(x,t)\in C(\bar D),\ \ a_{tt}(x,t)\in C(D), c(x,t)\in C(\bar D)$,
$f(x,t)\in L_2(D),\ \ \alpha(t)\in C^1(\bar D)\cap C^2(D),\ \ \beta(t)\in C^1(\bar D)\cap C^2(D)$,
(A) $\alpha(t)>0,\ \ \beta(t)<0\ \ \forall t\in[0,T]$,
(B) $(a(0,t)\alpha(t))_{tt}\leqslant 0,\ \ (a(l,t)\beta(t))_{tt}\geqslant 0$,
(C) $(a(0,t)\alpha(t))_t|_{t=0}\leqslant 0,\ \ (a(l,t)\beta(t))_t|_{t=0}\geqslant 0$.
Тогда существует единственное обобщенное решение поставленной задачи.
Доказательство теоремы проведем в два этапа.

2. Единственность решения

Для доказательства единственности покажем, что соответствующая однородная задача имеет лишь тривиальное решение. Положим $\forall\tau\in[0,T]$

$$v(x,t)=\left\{\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta, 0\leqslant t\leqslant\tau, 0, \tau\leqslant t\leqslant T.\right.$$

Подставляя ее в тождество (1.4) с $f(x,t)=0,\ \ \psi(x)=0$, определяющее обобщенное решение однородной задачи, и проводя интегрирование по частям, получим:

$$\int_0^l[v_t^2(x,\tau)+\int_0^l a(x,0)v_x^2(x,0)]dx+ \tag{2.1}$$
$$+2\int_0^\tau v_t^2(0,t)a(0,t)\alpha(t)dt-2\int_0^\tau v_t^2(l,t)a(l,t)\beta(t)dt-$$
$$-\int_0^\tau v^2(0,t)\left(a(0,t)\alpha(t)\right)_{tt}dt+\int_0^\tau v^2(l,t)\left(a(l,t)\beta(t)\right)_{tt}dt=$$
$$=-\int_0^\tau\int_0^l v_x^2a_tdxdt+2\int_0^\tau\int_0^l cv_tvdxdt+$$
$$+v^2(0,0)\left(a(0,t)\alpha(t)\right)_t\Big|_{t=0}-v^2(l,0)\left(a(l,t)\beta(t)\right)_t\Big|_{t=0}.$$

В силу условий (A), (B), (C):

$$\int_0^l\left(v_t^2(x,\tau)+a(x,0)v_x^2(x,0)\right)dx\leqslant\left|\int_0^\tau\int_0^l v_x^2a_tdxdt\right|+2\left|\int_0^\tau\int_0^l cv_tvdxdt\right|. \tag{2.2}$$

Оценим последний интеграл в правой части неравенства. Заметим, что в силу условий теоремы найдется такое положительное число C_0, что $\max\limits_{\bar D}\leqslant C_0$. Применив неравенство Коши, получим:

$$2\left|\int_0^\tau\int_0^l cv_tvdxdt\right|\leqslant C_0\int_0^\tau\int_0^l(v^2+v_t^2)dxdt. \tag{2.3}$$

Так как

$$v^2(x,t) = \left(\int_\tau^t u(x,\eta)d\eta \right)^2 \leqslant \tau \int_0^\tau u^2(x,t)dt = \tau \int v_t^2 dt,$$

то

$$\int_0^l \left(v_t^2(x,\tau) + a(x,0)v_x^2(x,0)\right) dxdt \leqslant M \int_0^\tau \int_0^l \left(v_t^2 + v_x^2\right) dxdt, \tag{2.4}$$

где $M = \max\{A_1, C_0(\tau^2+1)\}$, $A_1 = \max\limits_{\bar{D}} a(x,t)$. Введем функцию

$$w(x,t) = -\int_0^t u_x(x,\eta)d\eta. \tag{2.5}$$

Заметим, что из представления функции $v(x,t)$ следуют равенства:

$$w(x,\tau) - w(x,t) = v_x(x,t), \quad v_x(x,0) = w(x,\tau).$$

Тогда

$$\int_0^\tau \int_0^l v_x^2(x,t)dxdt \leqslant 2\tau \int_0^l w^2(x,\tau)dx + 2\int_0^\tau \int_0^l w^2(x,t)dxdt.$$

Таким образом,

$$\int_0^l \left(v_t^2(x,\tau) + (a_0 - 2\tau M)w^2(x,\tau)\right) dx \leqslant 2M \int_0^\tau \int_0^l \left(v_t^2 + w^2\right) dxdt, \tag{2.6}$$

где число $a_0 > 0$ таково, что $a(x,t) \geqslant a_0$. Пользуясь произволом τ, выберем его так, чтобы $a_0 - 2M\tau \geqslant \frac{a_0}{2}$. Тогда для любого $\tau \in [0, \frac{a_0}{4M}]$

$$\int_0^l (v_t^2(x,\tau) + w^2(x,\tau))dx \leqslant M_1 \int_0^\tau \int_0^l [v_t^2(x,t) + w^2(x,t)]dxdt,$$

где $M_1 = 2M/m$, $m = \min 1, a_0/2$. Применив теперь неравенство Гронуолла, приходим к выводу, что $u(x,t) \equiv 0$ для всех $t \in [0, \frac{a_0}{4M}]$. Повторяя рассуждения для $t \in [\frac{a_0}{4M}, \frac{a_0}{2M}]$, убедимся, что $u(x,t) \equiv 0$ и на этом промежутке. Через конечное число шагов получим, что $u(x,t)$ обращается в нуль на всем промежутке $[0,T]$.

3. Существование решения

Воспользуемся методом Галеркина. Зафиксируем в $L_2(0,l)$ полную ортонормированную систему $\{w_k\}$ и будем строить последовательность приближенных решений в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^N d_k(t)w_k(x).$$

Коэффициенты $d_k(t)$ будем искать из соотношений

$$\int_0^l \left(u_{tt}^N w_j + a u_x^N w_j' + c u^N w_j\right) + \tag{3.1}$$

$$+a(0,t)\alpha(t)u_t^N(0,t)w_j(0) - a(l,t)\beta(t)u_t^N(l,t)w_j(l) =$$

$$= \int_0^l f w_j dx,$$

которые, как нетрудно видеть, представляют собой систему ОДУ, разрешенную относительно старших производных

$$d_j''(t) + \sum_{k=1}^{N} d_k'(t) A_{kj}(t) + \sum_{k=1}^{N} d_k(t) B_{kj}(t) = f_j(t),$$

где введены следующие обозначения:

$$A_{kj}(t) = a(0,t)\alpha(t) w_k(0) w_j(0) - a(l,t)\beta(t) w_k(l) w_j(l),$$

$$B_{kj}(t) = \int_0^l \big(a(x,t) w_k'(x) w_j'(x) + c(x,t) w_k(x) w_j(x)\big)\, dx$$

Добавив к ней начальные условия

$$d_j(0) = \phi_j, \;\; d_j'(0) = \psi_j, \qquad j = 1 \dots N,$$

где ϕ_j, ψ_j суть коэффициенты сумм $\sum\limits_{j=1}^{N} \phi_j w_j(x)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \psi_j w_j(x)$, аппроксимирующих при $N \to \infty$ функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в нормах $W_2^1(D)$ и $L_2(D)$ соответственно, получим задачу Коши. Так как в силу условий теоремы коэффициенты системы ограничены, а свободные члены $f_j(t) = (f(x,t), w_j(x)) \in L_1(0,T)$, то задача Коши однозначно разрешима. Таким образом, последовательность приближенных решений построена.

Для того чтобы завершить доказательство существования решения поставленной задачи, нам потребуется априорная оценка, к выводу которой мы и перейдем.

Умножим (3.1) на $d_j'(t)$, просуммируем по j от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до τ:

$$\int_0^\tau \int_0^l \left(u_{tt}^N u_t^N + a u_x^N u_{xt}^N + c u^N u_t^N\right) dx dt + \tag{3.2}$$

$$+ \int_0^\tau \Big(a(0,t)\alpha(t) \left(u_t^N(0,t)\right)^2 - a(l,t)\beta(t) \left(u_t^N(l,t)\right)^2\Big)\, dt =$$

$$= \int_0^\tau \int_0^l f u_t^N dx dt.$$

Интегрируя по частям, приходим к равенству:

$$\frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^N(x,\tau))^2 + a(x,t)(u_x^N(x,\tau))^2] dx + \int_0^\tau \int_0^l c(x,t) u^N u_t^N dx dt +$$

$$+ \int_0^\tau a(0,t)\alpha(t)(u_t^N(0,t))^2 dt - \int_0^\tau a(l,t)\beta(t)(u_t^N(l,t))^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l [(u_t^N(x,0))^2 + a(x,0)(u_x^N(x,0))^2] dx + \int_0^\tau \int_0^l f(x,t) u_t^N(x,t) dx dt. \tag{3.3}$$

Учитывая условия теоремы, применяя неравенство Коши и неравенство

$$(u^N(x,t))^2 \leqslant 2\tau \int_0^\tau (u_t^N(x,t))^2 dt + 2(u^N(x,0))^2,$$

которое легко выводится из представления

$$u^N(x,t)=\int\limits_0^t u^N_\eta(x,\eta)d\eta+u^N(x,0),$$

получим:

$$\int_0^l (u_t^2+u_x^2)dx\leqslant C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_0^l[(u^N_t(x,t))^2+(u^N_x(x,t))^2]dxdt+ \tag{3.4}$$

$$+C_2\int_0^l\left(u^N_t(x,0))^2+(u^N_x(x,0))^2\right)dx+\int_0^\tau\int_0^l f^2dxdt.$$

Заметим, что

$$\int_0^l\left(u^N_t(x,0))^2+(u^N_x(x,0))^2\right)dx\leqslant(||\varphi(x)||^2_{W_2^1(0,l)}+||\psi(x)||^2_{L_2(0,l)}).$$

Поэтому, применив неравенство Гронуолла, приходим к неравенству:

$$||u^N(x,t)||_{W_2^1(D)}\leqslant C_3,$$

где C_3 не зависит от N.

Возвращаясь к равенству (3.3), получаем:

$$\int\limits_0^\tau a(0,t)\alpha(t)(u^N_t(0,t))^2dt\leqslant C_4,$$

$$\int\limits_0^\tau a(l,t)\beta(t)(u^N_t(l,t))^2dt\leqslant C_5.$$

Полученные оценки означают, что

$$||u^N(x,t)||_{\bar W}\leqslant K. \tag{3.5}$$

Благодаря полученной априорной оценке из последовательности $\{u^N\}$ можно выделить подпоследовательность, за которой во избежание громоздкости мы сохраним то же обозначение, сходящуюся слабо в $W_2^1(D)$ и равномерно по $t\in[0,T]$ в норме $L_2(0,l)$ к некоторому элементу $u(x,t)\in W_2^1(D)$. Осталось показать, что этот элемент и есть искомое решение. Для этого воспользуемся известной процедурой [2] и перейдем к пределу в тождестве

$$\int\limits_0^T\int_0^l\left(-u^N_t\eta_t+au^N_x\eta_x+cu^N\eta\right)dxdt+ \tag{3.6}$$

$$+\int\limits_0^T a(0,t)\alpha(t)u^N_t(0,t)\eta(0,t)dt-\int\limits_0^T a(l,t)\beta(t)u^N_t(l,t)\eta(l,t)dt=$$

$$=\int\limits_0^l u^N_t(x,0)\eta(x,0)dx+\int\limits_0^T\int_0^l fw_jdxdt,$$

где $\eta(x,t)=\sum\limits_{i=1}^N s_i(t)w_i(x),\ s_i(T)=0$. В результате предельного перехода придем к тождеству (1.4) для предельной функции $u(x,t)$, но для функций $\eta(x,t)$. Однако множество всех функций вида $\sum\limits_{i=1}^{N} s_i(t)w_i(x)$, $s_i(T) = 0$, всюду плотно в $\hat{W_2^1}(D)$ [2, с. 215), поэтому тождество (1.4) выполняется для всех $v(x,t) \in \hat{W}_2^1(D)$, а это и означает, что предельная функция $u(x,t)$ является искомым обобщенным решением поставленной задачи.

Литература

[1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.

[2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 9/*IX*/2011;
в окончательном варианте — 11/*XI*/2011.

ON A CERTAIN PROBLEM FOR A WAVE EQUATION

 S.A. Beilin[2]

In this paper a hyperbolic equation with non-classical boundary conditions for a hyperbolic equation is studied. This problem can be viewed as the generalization of the problem about the oscillation of the string if it ends experience the resistance of medium. The unique solvability of the problem is proved. The prove of solvability is based on the received a priory estimates in Sobolev space.

Key words: wave equation, generalized solution, Galerkin procedure.

Paper received 9/*IX*/2011.
Paper accepted 11/*XI*/2011.

[2]Beilin Sergey Alexandrovich (sbeilin@uni-smr.ac.ru), the Dept. of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.