МАТЕМАТИКА

УДК 519.946

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В КОЛЬЦЕВОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2011 Э.И. Абдурагимов[1]

Доказаны существование и единственность положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле в кольцевой области для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Ключевые слова: положительное решение, задача Дирихле, кольцевая область, нелинейное дифференциальное уравнение, единственность.

Введение

Пусть $D = \{x \in R^2 : 1 < r < 2\}$ — кольцевая область, $r = |x|$. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u + r^k v^p = 0, \qquad 1 < r < 2, \tag{1}$$

$$u|_{r=1} = u|_{r=2} = 0. \tag{2}$$

Здесь $k \geqslant 0, p > 1$ — вещественные числа.

Очевидно, $u \equiv 0-$ тривиальное решение задачи (1), (2). Под положительным решением задачи (1), (2) понимается функция $u \in C^2(\overline{D})$, положительная в D, удовлетворяющая уравнению (1) и граничным условиям (2).

Положительным решениям уравнений вида (1) посвящено много работ российских и зарубежных математиков (см., например, [1-12]). Во многих из них изучаются в основном вопросы существования положительного решения, его поведение, априорные оценки и другие. Публикаций, посвященных единственности положительного решения задачи Дирихле для уравнений вида (1) с $p > 1$, сравнительно мало. Задача Дирихле для уравнения вида (1) в кольцевой области изучалась также в [1; 11]. Но в этих работах доказано существование, по крайней мере, одного положительного радиально-симметричного решения. Доказательство единственности положительного решения задачи Дирихле для уравнений вида (1) представляет значительные трудности, которые можно объяснить наличием тривиального

[1]Абдурагимов Эльдерхан Исрапилович (abduragimov42@mail.ru), кафедра прикладной математики Дагестанского государственного университета, 367025, Российская Федерация, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43б.

решения $u \equiv 0$ и тем, что $p > 1$. Единственность положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле в шаровой области размерности n для уравнения (1) без ограничений на $p > 1$ при $n = 2$ и с некоторым ограничением на $p > 1$ при $n > 2$ доказана в работах автора [12; 13] соответственно.

В данной работе эти результаты распространяются на кольцевую область. В этом случае, оказывается, не требуются никакие ограничения на показатели $k \geqslant 0,\ p > 1$.

1. Основные результаты

Доказано, что задача (1), (2) имеет единственное радиально-симметричное решение $u \in C^2(\overline{D})$ при любых $k \geqslant 0, p > 1$.

1. Вспомогательные предложения

Рассмотрим уравнение

$$v'' + r_0^{k+2} e^{(k+2)t} v^p = 0, \quad t > 0 \tag{3}$$

с начальными условиями

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = r_0, \tag{4}$$

где r_0- произвольное положительное число.

Из уравнения (3) следует, что $v'' \leqslant 0$ при $t \geqslant 0$, т. е. функция $v(t)$ выпукла вверх при $t \geqslant 0$. Поэтому в силу $v'(0) = r_0$ при любом $r_0 > 0$ существуют t_0 и δ_0 такие, что $\delta_0 = v(t_0) > v(t) > 0$ при $t \in (0, t_0)$.

Лемма 1. *При любом $r_0 > 0$ в (3), (4) существует единственное число $t^* > 0$, зависящее лишь от k, p и r_0, такое, что задача Коши (3), (4) имеет единственное решение $v \in C^2[0, t^*]$ такое, что $v(t) > 0$ при $t \in (0, t^*)$, $\quad v(t^*) = 0$.*

Доказательство. Интегрируя два раза уравнение (3) с учетом начальных условий (4), получим

$$v(t) = r_0 t - {r_0}^{k+2} \int_0^t (t-s) e^{(k+2)s} v^p(s) ds. \tag{5}$$

Из уравнения (3) следует, что $v''(t) < 0$ в тех точках, где $v(t) \neq 0$. Следовательно, положительное решение задачи (3), (4) выпукло вверх. Как отмечено выше, существуют положительные числа t_0 и δ_0 такие, что $\delta_0 = v(t_0) > v(t) > 0$ при $t \in (0, t_0)$. Предположим противное, т. е. $v(t) > 0$ при всех $t > 0$. Пусть $t_1 > 0-$ некоторое число. Из положительности и выпуклости вверх $v(t)$ следует, что

$$v(\frac{t_0 + t_1}{2}) \geqslant \frac{v(t_0)}{2} + \frac{v(t_1)}{2} > \frac{\delta_0}{2} \tag{6}$$

и $v(s) \geqslant \frac{s}{t} v(t)$ для любого $s > 0$. Поэтому из (5) получаем

$$v(t) \leqslant r_0 t - \frac{r_0^{k+2} v^p(t)}{t^p} \int_0^t (t-s) e^{(k+2)s} s^p ds \leqslant$$

$$\leqslant r_0 t - \frac{r_0^{k+2} v^p(t)}{t^p} \int_0^t (t-s) s^p ds = r_0 t - \frac{r_0^{k+2} t^2}{(p+1)(p+2)} v^p(t).$$

Отсюда имеем

$$v(t) + \frac{r_0^{k+2} t^2}{(p+1)(p+2)} v^p(t) \leqslant r_0 t.$$

Следовательно,

$$v(t) \leqslant \left[\frac{(p+1)(p+2)}{r_0^{k+1}t}\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

Отсюда, полагая $t = t_0$ и учитывая, что $v(t_0) = \delta_0$, получаем

$$t_0 \leqslant \frac{(p+1)(p+2)}{r_0^{k+1}\delta_0^p}.$$

При $t = \frac{t_0+t_1}{2}$ из (7) в силу (6) имеем

$$\frac{\delta_0}{2} < \left[\frac{2(p+1)(p+2)}{r_0^{k+1}(t_0+t_1)}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Полагая здесь

$$t_1 = \frac{2^{p+1}(p+1)(p+2)}{r_0^{k+1}\delta_0^p} - t_0 > t_0,$$

имеем $\frac{\delta_0}{2} < \frac{\delta_0}{2}$. Получили противоречие. Следовательно, существует точка t^*, в которой $v(t)$ обращается в нуль. В силу выпуклости $v(t)$ вверх точка t^* единственная. Кроме того, $v(t) > 0$ при $t \in (0, t^*)$. Из (5) следует, что при $0 \leqslant t \leqslant t^*$ справедливо неравенство $0 \leqslant v(t) \leqslant t$, т. е. решение задачи Коши (3), (4) ограничено на отрезке $[0, t^*]$. Поэтому $v \in C^2[0, t^*]$. Лемма доказана. □

По лемме каждому значению $r_0 > 0$ оответствует единственное значение t^*, т. е. определена функция $t^*(r_0)$.

Лемма 2. *Функция $t^*(r_0)$, определенная в лемме 1, является непрерывной монотонно убывающей по r_0 причем,* $\lim\limits_{r_0\to+\infty} t^*(r_0) = 0$ *и* $\lim\limits_{r_0\to 0} t^*(r_0) = +\infty$.

Доказательство. Пусть $v(t, r_0)$ — решение задачи Коши (3), (4). Обозначим $w(t, r_0) = \frac{\partial v(t,r_0)}{\partial r_0}$. Дифференцируя по второму аргументу r_0 уравнение (3), начальные условия (4) и равенство $v(t^*, r_0) = 0$, получим

$$w'' + (k+2)r_0^{k+1}e^{(k+2)t}v^p + pr_0^{k+2}e^{(k+2)t}v^{p-1}w = 0, \tag{8}$$

$$w(0) = 0, \quad w\prime(0) = 1, \tag{9}$$

$$w(t^*) = 0. \tag{10}$$

Здесь для сокращения записи приняты обозначения

$$w'', \quad v, \quad w, \quad w(0), \quad w'(0), \quad w(t^*)$$

вместо

$$\frac{\partial^2 w(t,r_0)}{\partial r_0^2}, \quad v(t,r_0), \quad w(t,r_0), \quad w(0,r_0), \quad \frac{\partial w(0,r_0)}{\partial r_0}, \quad w(t^*,r_0)$$

соответственно.

Полагая в (5) $t = t^*$ и учитывая, что $v(t^*) = 0$, имеем

$$t^* = r_0^{k+1}\int_0^{t^*}(t^*-s)e^{(k+2)s}v^p(s)ds$$

или

$$r_0^{k+1} = \frac{t^*}{\int_0^{t^*}(t^*-s)e^{(k+2)s}v^p(s)ds}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(r_0, t^*) = r_0^{k+1} - \frac{t^*}{\int_0^{t^*}(t^*-s)e^{(k+2)s}v^p(s)ds}$ непрерывна при всех $r_0 > 0$ и $t^* > 0$ и $\frac{\partial\Phi(r_0,t^*)}{\partial r_0} > 0$, т. е. при постоянном t^* функция $\Phi(r_0, t^*)$

монотонно возрастает по r_0. Тогда по известной теореме о неявной функции (см. [15, с. 449]) существует непрерывная неявная функция $t^*(r_0)$. Дифференцируя равенство (11) по t^*, получим

$$(k+1)r_0^k\frac{dr_0}{dt^*}=\frac{\int_0^{t^*}(t^*-s)e^{(k+2)s}v^p(s)ds-t^*\int_0^{t^*}e^{(k+2)s}v^p(s)ds}{\left(\int_0^{t^*}(t^*-s)e^{(k+2)s}v^p(s)ds\right)^2}=$$

$$=-\frac{\int_0^{t^*}se^{(k+2)s}v^p(s)ds}{\left(\int_0^{t^*}(t^*-s)e^{(k+2)s}v^p(s)ds\right)^2}.$$

Отсюда следует, что $\frac{dr_0}{dt^*}<0$, т. е. r_0 убывает с возрастанием t^*. Тогда, очевидно, убывает и обратная функция $t^*(r_0)$ с возрастанием r_0. Из (5) следует, что при $0\leqslant t\leqslant t^*$ справедливо неравенство $v(t)\leqslant r_0t$. Тогда из (11) имеем

$${r_0}^{k+1}\geqslant\frac{1}{\int_0^{t^*}e^{(k+2)s}{r_0}^ps^pds}.$$

Отсюда получим

$${r_0}^{k+1+p}\geqslant\frac{1}{\int_0^{t^*}e^{(k+2)s}s^pds}\geqslant\frac{p+1}{e^{(k+2)t^*}(t^*)^{p+1}}. \tag{12}$$

В силу монотонного убывания функции $t^*(r_0)$ отсюда следует

$$\lim_{r_0\to+\infty}t^*(r_0)=0,\ \lim_{r_0\to 0}t^*(r_0)=+\infty.$$

Лемма доказана. □

2. Единственность положительного радиально-симметричного решения

Радиально-симметричное решение задачи (1), (2) удовлетворяет уравнению

$$u''+\frac{u'}{r}+r^ku^p=0,\quad 1<r<2 \tag{13}$$

и краевым условиям

$$u(1)=u(2)=0. \tag{14}$$

Теорема. *При любых $k\geqslant 0, p>1$ задача (1), (2) имеет единственное положительное радиально-симметричное решение.*

Доказательство. С помощью преобразования Ц. На [14]

$$\begin{cases} r=A^\alpha s,\\ u=A^\beta v,\end{cases} \tag{15}$$

где $\alpha,\beta-$ некоторые вещественные числа, $A-$ числовой параметр, уравнение (13) приводится к виду

$$A^{\beta-2\alpha}v''+\frac{A^{\beta-2\alpha}v'}{s}+A^{k\alpha+p\beta}s^k|v|^p=0.$$

Выберем здесь показатели равными между собой

$$\beta-2\alpha=k\alpha+p\beta. \tag{16}$$

Тогда получим уравнение

$$v''+\frac{v'}{s}+s^kv^p=0.$$

Уравнение (13) оказалось инвариантным относительно преобразования (15).

Обозначим через A недостающее начальное условие

$$u'(1) = A.$$

В координатах (15) это условие примет вид

$$A^{\beta-\alpha} v'(A^{-\alpha}) = A.$$

Положив здесь

$$\beta - \alpha = 1, \tag{17}$$

получим

$$v'(A^{-\alpha}) = 1.$$

Условие $u(1) = 0$ в координатах (15) примет вид $v(A^{-\alpha}) = 0$.

Таким образом, v является решением задачи Коши

$$v'' + \frac{v'}{s} + s^k v^p = 0, \quad s > r_0, \tag{18}$$

$$v(r_0) = 0, \quad v'(r_0) = 1, \tag{19}$$

где

$$r_0 = A^{-\alpha}. \tag{20}$$

Из (16) и (17) α и β определяются однозначно

$$\alpha = \frac{1-p}{k+p+1}, \quad \beta = \frac{k+2}{k+p+1}.$$

Сделаем замену

$$t = \ln \frac{s}{r_0}. \tag{21}$$

Задача Коши (18), (19) после этой замены приводится к задаче (3), (4).

По лемме 1 существует единственное число $t_1^* > 0$ такое, что задача (3), (4) имеет единственное решение $v \in C^2[0, t_1^*]$ такое, что $v(t_1^*) = 0$, $v(t) > 0$ при $t \in (0, t_1^*)$. Следовательно, в силу (21) существует единственная точка $s_1^* = r_0 e^{t_1^*} > 0$ такая, что на отрезке $[r_0, s_1^*]$ задача (18), (19) имеет единственное решение $v \in C^2[r_0, s_1^*]$ и

$$v(s_1^*) = 0. \tag{22}$$

В соответствии с формулами (15) значению $s = r_0$ соответствует значение $r_1 = A^\alpha r_0 = 1$ в силу (20), а значению $s = s_1^*-$ значение $r_2 = A^\alpha s_1^* = \frac{s_1^*}{r_0}$. Выберем параметр r_0 так, чтобы $r_2 = \frac{s_1^*}{r_0} = e^{t_1^*(r_0)} = 2$. Отсюда имеем

$$t_1^*(r_0) = \ln(2). \tag{23}$$

Так как по лемме 2 $t_1^*(r_0)-$ непрерывная убывающая функция и $\lim\limits_{r_0 \to 0} t_1^*(r_0) = +\infty$, $\lim\limits_{r_0 \to +\infty} t_1^*(r_0) = 0$, то уравнение (23) имеет единственное решение $r_0 = r_0^*$. Тогда из равенства $A^{-\alpha} = r_0^*$ следует, что A определяется однозначно: $A = (r_0^*)^{-\frac{1}{\alpha}}$.

В силу (15), (20) и (22)

$$\begin{cases} u(1) = A^\beta v(A^{-\alpha}) = A^\beta v(r_0) = 0, \\ u(2) = A^\beta v(2A^{-\alpha}) = A^\beta v(s_1^*) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Так как по лемме 1 задача Коши (3), (4) имеет единственное положительное решение $v \in C^2[0, t^*]$ и $v(0) = v(t^*) = 0$, то в силу однозначности отображений (15), (21) во множестве положительных чисел и в силу (24) задача (13), (14) имеет единственное положительное решение. Следовательно, задача (1), (2) имеет единственное положительное радиально-симметричное решение. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Bandle C., Man Kam Kwong. Semilinear elliptic problems in annular domains // Journal of applied Mathematics and Physics(ZAMP). 1989. V. 40. P. 245–247.

[2] Vieri Benci, Donato Fortinato. Some nonlinear elliptic problems with asymptotic conditions // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1979. V. 3. № 2. P. 157–173.

[3] Похожаев С.И. Об одной задаче Овсянникова // ПМТФ. 1989. № 2. С. 5–10.

[4] Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейного эллиптического уравнения // Математические заметки. 2005. Т. 78. Вып. 2. С. 202–211.

[5] Kuo-Shung Cheng, Jenn-Tsann Lin. On the elliptic equations $\Delta u = K(x)u^{\alpha}$ and $\Delta u = K(x)\exp^{2u}$ // Transactions of American mathematical society. 1987. V. 304. № 2. P. 633–668.

[6] Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of nonlineare elliptic equations // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1982. V. 4. P. 525–598.

[7] Похожаев С.И. О целых радиальных решениях некоторых квазилинейных эллиптических уравнений // Математический сборник. 1992. Т. 83. № 11. С. 3–18.

[8] Dancer E.N., Shi Junping. Uniqueness and nonexistence of positive solutions to semipositive problems // London Math. Soc. 2006. V. 38. № 6. P. 1033–1044.

[9] Kavano Nichiro, Satsuma Junkichi, Youtsutani Shoji. On the Positive Solution of an Emden-Type Elliptic Equation // Proc. Jap. Acad. 1985. Ser A. V. 61. № 6. P. 186–189.

[10] Jiang Ju. On radially symmetric solutions to singular nonlinear Dirichlet problems // Nonlinear Anal. Theory, Methods and Applications. 1995. V. 24. P. 159–163.

[11] Абдурагимов Э.И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Дагестанский математический сборник. 2005. Т. 1. С. 7–12.

[12] Абдурагимов Э.И. О положительном радиально-симметричном решении задачи Дирихле для одного нелинейного уравнения и численном методе его получения // Изв. вузов. Математика. 1997. № 5. С. 3–6.

[13] Абдурагимов Э.И. О единственности положительного радиально-симметричного решения задачи Дирихле в шаре для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Изв. вузов. Математика. 2008. № 12. С. 3–6.

[14] На Ц. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. М.: Мир, 1982. 296 с.

[15] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.:Наука, 1970. 608 с.

Поступила в редакцию $12/I/2011$;
в окончательном варианте — $3/V/2011$.

UNIQUENESS OF POSITIVE RADIAL-SYMMETRICAL SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM IN ANNULAR DOMAINS FOR ONE CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

 E.I. Abduragimov[2]

The existence and uniqueness of positive radially symmetric solution of Dirichlet problem in annular domain for one class of nonlinear differential equations of the second order is proved.

Key words: positive solution, Dirichlet problem, annular domain, nonlinear differential equation, uniqueness.

Paper received 12/*I*/2011.
Paper accepted 3/*V*/2011.

[2]Abduragimov Elderkhan Israpilovich (`abduragimov42@mail.ru`), the Dept. of Applied Mathematics, Dagestan State University, Makhachkala, 367025, Russian Federation.