

## ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТОЙ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2011 Д.А. Шляхин<sup>1</sup>

Построено новое замкнутое решение осесимметричной нестационарной задачи теории упругости для жестко закрепленной сплошной круглой анизотропной пластины. Расчетные соотношения получены методом разложения по собственным вектор-функциям в форме структурного алгоритма конечных преобразований. Численные результаты позволяют проанализировать влияние толщины пластины на частотный спектр собственных колебаний, а также определить напряженно-деформированное состояние исследуемого элемента.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания, осесимметричная динамическая нагрузка, толстая анизотропная пластина.

### Введение

Исследование вынужденных осесимметричных колебаний круглой анизотропной пластины в рамках теории упругости связано с проблемой интегрирования сложной системы дифференциальных уравнений при удовлетворении начальных и краевых условий. Наиболее эффективным математическим аппаратом, позволяющим преодолеть данные трудности, является метод разложения по собственным вектор-функциям. В работах [1–4] при исследовании изотропного цилиндра на основании принципа суперпозиций используется набор частных решений, который с заданной точностью удовлетворяет краевые условия с помощью бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Построенные решения позволяют описать гармонический процесс распространения упругих волн.

В исследованиях [5; 6] методом конечных интегральных преобразований построены замкнутые решения нестационарных осесимметричных задач для короткого анизотропного цилиндра при смешанных краевых условиях на его торцах. Существенным представляется то, что построенный алгоритм справедлив для произвольного динамического воздействия. В [8] рассматривалась динамическая задача для полого цилиндра с закреплением торцов в виде скользящей заделки. Использовался подход, основанный на дискретизации по времени уравнений движения с последующим использованием интегрального преобразования Фурье. Полученная

<sup>1</sup>Шляхин Дмитрий Аверкиевич ([sgasu@sgasu.smr.ru](mailto:sgasu@sgasu.smr.ru)), кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

векторная краевая задача решалась с помощью построения матричной функции Грина.

В настоящей работе исследуются вынужденные установившиеся колебания сплошной круглой пластины с жестким закреплением ее цилиндрической поверхности. Данное исследование проведено для материалов с гексагональной кристаллической структурой, которой соответствует большое количество материалов и сплавов [9]. Напряженно-деформированное состояние таких систем описывается с помощью пяти модулей упругости.

## 1. Постановка задачи

Пусть круглая сплошная пластина, занимающая в цилиндрической системе координат  $(r_*, \theta, z_*)$  область  $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h\}$ , представляет линейно-упругое анизотропное тело. Рассматривается случай, когда цилиндрическая поверхность  $(r_* = b)$  элемента жестко закреплена, а на его торцевую плоскость  $(z_* = h)$  действует осесимметричная динамическая нагрузка (нормальные напряжения)  $q^*(r_*, t_*)$ .

В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения однородной упругой среды в цилиндрической системе координат записываются в виде :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения состояния анизотропного тела гексагональной системы с осью симметрии относительно аксиальной координаты определяются следующими равенствами [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{12} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*}, \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \left( \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + C_{33} \frac{\partial W^*}{\partial z_*}, \sigma_{rz} = C_{55} \left( \frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В соотношениях (1.1)–(1.2)  $t_*$  – время,  $\sigma_{j,k}(r_*, z_*, t_*)$ ,  $U^*(r_*, z_*, t_*)$ ,  $W^*(r_*, z_*, t_*)$  – соответственно компоненты тензора механических напряжений и вектора перемещений ( $j, k = r, \theta, z$ );  $\rho, C_{ms}$  – объемная плотность и модули упругости ( $m, s = \overline{1, 5}$ ).

В результате подстановки (1.2) в (1.1) получаем систему дифференциальных уравнений и краевые условия рассматриваемой задачи теории упругости в безразмерной форме при установившемся режиме вынужденных колебаний:

$$\nabla_1^2 U + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \lambda^2 U = 0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 W + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + \lambda^2 W &= 0; \\ r = 0, 1 \quad U(0, z) < \infty, \quad W(0, z) < \infty, \\ U(1, z) = 0, \quad W(1, z) = 0; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$z = 0, L \quad \sigma_{zz}|_{z=L} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} = q(r), \quad (1.5)$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad \sigma_{rz}|_{z=0,L} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0.$$

В равенствах (1.3)–(1.5) общий для всех функций временной множитель  $\exp(-i\theta t_*)$  опускается,  $\theta$  — частота вынужденных колебаний,  $\{U, W, r, z, L\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h\}/b$ ,  $\lambda^2 = \rho\theta^2 b^2/C_{11}$ ,  $q(r) = q^*(r)/C_{11}$ ,  $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$ ,  $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$ ,  $\nabla_2^2 = \nabla_1^2 + \frac{1}{r^2}$ .

Соотношения (1.3)–(1.5) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи теории упругости.

## 2. Построение общего решения

Решение осуществляется методом конечных интегральных преобразований Ханкеля по координате  $r$ . Для реализации данной процедуры разделения переменных краевая задача (1.3)–(1.5) приводится к стандартной форме путем замены последнего условия (1.4) на равенство

$$\sigma_{rz}|_{r=1} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = K(z). \quad (2.1)$$

Здесь  $K(z) = K^*(z)/C_{11}$ ,  $K^*(z)$  — касательные напряжения, приложенные к боковой поверхности пластины и определяемые в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальных перемещений при  $r = 1$ .

Функция  $K(z)$  должна удовлетворять также следующую зависимость:

$$\int_0^L K(z) dz = - \int_0^1 q(r) r dr, \quad (2.2)$$

которая является условием самоуравновешенности пластины при действии осесимметричной нагрузки.

Кроме того, компоненты вектора перемещений  $U, W$  представлены в виде следующих разложений:

$$U(r, z) = (r - r^3) q(r) + u(r, z), \quad (2.3)$$

$$W(r, z) = \frac{C_{11}}{C_{55}} \frac{r^2}{2} K(z) + w(r, z),$$

позволяющих в дальнейшем построить решение для произвольной функции  $q(r)$ , а также сформировать однородные краевые условия по координате  $r$ .

В результате подстановки (2.3) в (1.3)–(1.5), (2.1) получаем новую краевую задачу относительно функций  $u(r, z)$ ,  $w(r, z)$ :

$$\nabla_1^2 u + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} + \lambda^2 u = F_1, \quad (2.4)$$

$$\frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 w + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \nabla \frac{\partial u}{\partial z} + \lambda^2 w = F_2;$$

$$r = 0, 1 \quad u(0, z) < \infty \quad w(0, z) < \infty, \quad (2.5)$$

$$u(1, z) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0;$$

$$z = 0, L \quad \sigma_{zz}|_{z=L} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla u + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial w}{\partial z} = N_1(r, L), \quad (2.6)$$

$$\sigma_{zz}|_{z=0} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla u + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial w}{\partial z} = N_2(r, 0),$$

$$\sigma_{rz}|_{z=L} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = N_3(r, L), \quad \sigma_{rz}|_{z=0} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = N_4(r, 0),$$

где  $F_1 = -(\nabla_1^2 + \lambda^2) [(r - r^3) q(r)] - \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{55}} r \frac{dK(z)}{dz}$ ,

$$F_2 = - \left( 2 + \lambda^2 \frac{C_{11}}{C_{55}} \frac{r^2}{2} \right) K(z) - \frac{C_{33}}{C_{55}} \frac{r^2}{2} \frac{d^2 K(z)}{dz^2},$$

$$N_1(r, L) = q(r) - \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla [(r - r^3) q(r)] - \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{r^2}{2} \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=L},$$

$$N_2(r, 0) = - \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla [(r - r^3) q(r)] - \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{r^2}{2} \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=0},$$

$$N_3(r, L) = -rK(L), \quad N_4(r, L) = -rK(0).$$

К краевой задаче (2.4)–(2.6) применяем преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной  $r$ , используя следующие трансформанты:

$$u_H(j_n, z) = \int_0^1 u(r, z) r J_1(j_n r) dr, \quad (2.7)$$

$$w_H(j_n, z) = \int_0^1 w(r, z) r J_0(j_n r) dr$$

и формулы обращения

$$u(r, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (2.8)$$

$$w(r, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r).$$

В равенствах (2.7), (2.8)  $j_n$  корни такого трансцендентного уравнения

$$J_1(j_n) = 0 \quad (n = \overline{1, \infty}; j_0 = 0). \quad (2.9)$$

В пространстве изображений получаем следующую краевую задачу:

$$-j_n^2 u_H + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{d^2 u_H}{dz^2} - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{dw_H}{dz} + \lambda^2 u_H = F_{1H}, \quad (2.10)$$

$$-\frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{du_H}{dz} + \lambda^2 w_H = F_{2H};$$

$$z = 0, L \quad \frac{C_{13}}{C_{11}} j_n u_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dw_H}{dz} = N_{1H}(j_n, L), \quad (2.11)$$

$$\frac{C_{13}}{C_{11}} j_n u_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial w_H}{\partial z} = N_{2H}(j_n, 0),$$

$$\frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{du_H}{dz} - j_n w_H \right) = N_{3H}(j_n, L), \quad \frac{C_{55}}{C_{11}} \left( \frac{du_H}{dz} - j_n w_H \right) = N_{4H}(j_n, 0);$$

где  $\{F_{1H}, N_{3H}, N_{4H}\} = \int_0^1 \{F_1, N_3, N_4\} r J_1(j_n r) dr$ ,

$$\{F_{2H}, N_{1H}, N_{2H}\} = \int_0^1 \{F_2, N_1, N_2\} r J_0(j_n r) dr.$$

В случае, когда  $n = 0$ , трансформанта  $w_H$  определяется равенством

$$w_H(j_0, z) = D_{10} \cos(pz) + D_{20} \sin(pz) + p^{-1} \int_0^z F_{2H}^*(\xi) \sin p(z - \xi) d\xi, \quad (2.12)$$

где  $D_{10} = -[p \sin(pL)]^{-1} \frac{C_{11}}{C_{33}} \left[ \frac{q}{2} + \int_0^L K(\xi) \cos p(L - \xi) d\xi \right]$ ,

$$D_{20} = -\frac{C_{11}}{8C_{55}p} \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=0}, p^2 = \lambda^2 \frac{C_{11}}{C_{33}},$$

$$F_{2H}^*(z) = -\frac{C_{11}}{C_{33}} \left( 1 + \frac{C_{11}}{8C_{55}} \right) K(z) - \frac{C_{11}}{8C_{55}} \frac{d^2K(z)}{dz^2}.$$

При  $n \neq 0$  система уравнений (2.10) приводится к следующему разрешающему уравнению относительно  $w_H$ :

$$\frac{d^4 w_H}{dz^4} + a_{1n} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + a_{2n} w_H = F_H, \quad (2.13)$$

где  $a_{1n} = \frac{C_{11}}{C_{55}} a_{3n} + \frac{C_{11}}{C_{33}} a_{4n} + \frac{(C_{13} + C_{55})^2}{C_{33} C_{55}} j_n^2$ ,  $a_{2n} = \frac{C_{11}^2}{C_{33} C_{55}} a_{3n} a_{4n}$ ,

$$a_{3n} = \lambda^2 - j_n^2, \quad a_{4n} = \lambda^2 - \frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2,$$

$$F_H = \frac{C_{11}}{C_{33}} \frac{d^2 F_{2H}}{dz^2} + \frac{C_{11}^2}{C_{33} C_{55}} a_{3n} F_{2H} - \frac{C_{11} (C_{13} + C_{55})}{C_{33} C_{55}} j_n \frac{dF_{1H}}{dz}.$$

Для установившегося режима вынужденных колебаний, как правило, выполняется следующее соотношение коэффициентов  $a_{1n}^2 < 4a_{2n}$ . В этом случае общий интеграл дифференциального уравнения (2.13) определяется таким выражением:

$$\begin{aligned} w_H(j_n, z) = & \exp(\chi_n z) [D_{1n} \cos(\beta_n z) + D_{2n} \sin(\beta_n z)] + \exp(-\chi_n z) [D_{3n} \cos(\beta_n z) + \\ & + D_{4n} \sin(\beta_n z)] + [2\chi_n \beta_n (\chi_n^2 + \beta_n^2)]^{-1} \int_0^z F_H(\xi) \{ \chi_n \operatorname{ch}[\chi_n(z - \xi)] \times \\ & \times \sin[\beta_n(z - \xi)] - \beta_n \operatorname{sh}[\chi_n(z - \xi)] \cos[\beta_n(z - \xi)] \} d\xi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь  $\chi_n = \frac{1}{2} \left[ 2(a_{2n})^{1/2} - a_{1n} \right]^{1/2}$ ,  $\beta_n = \left[ \frac{a_{1n}}{2} + \chi_n^2 \right]^{1/2}$ .

Располагая (2.14), из системы (2.10) находим трансформанту  $u_H$ :

$$u_H(j_n, z) = b_{1n} \frac{d^3 w_H}{dz^3} + b_{2n} \frac{dw_H}{dz} + b_{3n} F_{1H} + b_{4n} \frac{dF_{2H}}{dz}, \quad (2.15)$$

где  $b_{1n} = \frac{C_{55} C_{33}}{C_{11} (C_{13} + C_{55}) j_n} a_{3n}^{-1}$ ,  $b_{3n} = a_{3n}^{-1}$ ,

$$b_{2n} = a_{3n}^{-1} \left[ \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n + \frac{C_{55} a_{4n}}{(C_{13} + C_{55}) j_n} \right], b_{4n} = -a_{3n}^{-1} \frac{C_{55}}{(C_{13} + C_{55}) j_n}.$$

Подстановка (2.14), (2.15) в краевые условия (2.11) позволяет определить постоянные интегрирования  $D_{1n} \div D_{4n}$ .

### 3. Расчетные соотношения

Применяя к трансформантам (2.14), (2.15) формулы обращения (2.8), получаем, с учетом (2.1), следующие разложения для  $U(r, z)$ ,  $W(r, z)$ :

$$U(r, z) = (r - r^3) q(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (3.1)$$

$$W(r, z) = \frac{C_{11}}{C_{55}} \frac{r^2}{2} K(z) + 2w_H(j_0, z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r).$$

Заключительным этапом данного исследования является определение функции  $K(z)$ , которую для упрощения расчета можно представить в виде следующего многочлена:

$$K(z) = \sum_{k=1}^m A_k z^{m-k}. \quad (3.2)$$

Принимая во внимание (3.2), приравниваем нулю вертикальные перемещения  $W(1, z)$  в  $m - 1$  точках по высоте сечения пластины и с учетом (2.2) получаем систему неоднородных алгебраических уравнений относительно постоянных  $A_1 \div A_m$ . Ее решение позволяет определить  $A_1 \div A_m$  и функцию  $K(z)$ .

Разложения (3.1) удовлетворяют исходные дифференциальные уравнения (1.3), краевые условия (1.4), (1.5) (последнее условие (1.5) с заданной точностью) и являются замкнутым решением рассматриваемой краевой задачи.

Следует отметить, что построенный алгоритм справедлив для установившегося режима вынужденных колебаний, который выполняется, когда частота вынужденного гармонического воздействия существенно меньше низшей частоты собственных колебаний.

Для определения спектра частот собственных колебаний пластины  $\omega_{nk}$  ( $n = \overline{1, \infty}; k = \overline{1, \infty}$ ) необходимо исследовать однородные дифференциальные уравнения и краевые условия (2.10), (2.11) с учетом замены  $\lambda$  на  $\tilde{\lambda}_{nk}$  ( $\tilde{\lambda}_{nk}$  собственные значения осесимметричных колебаний).

Система (2.10) приводится к однородному дифференциальному уравнению вида (2.13), общее решение которого имеет вид:

$$w_H(j_n, z) = \sum_{p=1}^4 D_{pn} H_p(j_n, z). \quad (3.3)$$

При этом могут иметь место три случая отношения коэффициентов: а)  $a_{1n}^2 < 4a_{2n}$ ; б)  $a_{1n}^2 > 4a_{2n}$ ,  $a_{2n} > 0$ ; в)  $a_{1n}^2 > 4a_{2n}$ ,  $a_{2n} < 0$ .

Тогда частные решения  $H_p(j_n, z)$  определяются следующими функциями:

$$H_1(j_n, z) = \begin{cases} \text{а) } \exp(\chi_n z) \cos(\beta_n z) \\ \text{б) } \exp(\chi_{1n} z) \\ \text{в) } \exp(\chi_{1n} z) \end{cases}, \quad H_2(j_n, z) = \begin{cases} \text{а) } \exp(\chi_n z) \sin(\beta_n z) \\ \text{б) } \exp(\chi_{2n} z) \\ \text{в) } \exp(\chi_{2n} z) \end{cases},$$

$$H_3(j_n, z) = \begin{cases} \text{а) } \exp(-\chi_n z) \cos(\beta_n z) \\ \text{б) } \exp(\chi_{3n} z) \\ \text{в) } \cos(\chi_{3n} z) \end{cases}, \quad H_4(j_n, z) = \begin{cases} \text{а) } \exp(-\chi_n z) \sin(\beta_n z) \\ \text{б) } \exp(\chi_{4n} z) \\ \text{в) } \sin(\chi_{3n} z) \end{cases},$$

где  $\chi_{1n} = -2^{-1/2} \left[ a_{1n} - (a_{1n}^2 - 4a_{2n})^{1/2} \right]^{1/2}$ ,  $\chi_{2n} = -\chi_{1n}$ ,

$$\chi_{3n} = 2^{-1/2} \left[ a_{1n} + (a_{1n}^2 - 4a_{2n})^{1/2} \right]^{1/2}, \quad \chi_{4n} = -\chi_{3n}.$$

Подстановка (3.3) с учетом зависимости  $u_H(j_n, z)$  от  $w_H(j_n, z)$ , аналогичной (2.15), в однородные граничные условия вида (2.11) позволяет сформировать однородную систему уравнений относительно постоянных  $D_{1in} \div D_{4in}$ . Разыскивая ее нетривиальное решение, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений  $\lambda_{in}$ :

$$\det \|B_{mk}\| = 0, \quad (m = \overline{1,4}, k = \overline{1,4})$$

$$m = 1, 2: \quad B_{1k} = b_{1n} \frac{d^3 H_k(j_n, z)}{dz^3} + \left( b_{2n} + \frac{C_{33}}{C_{13} j_n} \right) \frac{dH_k(j_n, z)}{dz};$$

$$m = 3, 4: \quad B_{3k} = b_{1n} \frac{d^4 H_k(j_n, z)}{dz^4} + b_{2n} \frac{d^2 H_k(j_n, z)}{dz^2} - j_n H_k(j_n, z);$$

$$m = 1, 3: \quad z = 0; \quad m = 2, 4: \quad z = L.$$

Частота собственных колебаний  $\omega_{nk}$  определяется равенством

$$\omega_{nk} = \frac{\tilde{\lambda}_{nk}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}.$$

#### 4. Численный анализ результатов

В качестве примера рассматривается пластина, выполненная из керамики состава  $\text{PbTiO}_3 - \text{PbZrO}_3$   $\rho = 7,73 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> при следующих значениях упругих постоянных:  $\{C_{11}, C_{13}, C_{33}, C_{55}\} = \{10, 9; 5, 4; 9, 3; 2, 4\} \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

В таблице приведены собственные значения  $\lambda_{n1}$  осесимметричных колебаний анизотропной пластины различной толщины, полученные на основании точного решения и приближенной теории Тимошенко [7].

Таблица

$\lambda_{n1}$	Теория упругости				Модель Тимошенко [7]			
	$L=0,05$	$L=0,1$	$L=0,2$	$L=0,4$	$L=0,05$	$L=0,1$	$L=0,2$	$L=0,4$
$n = 1$	0,177	0,348	0,648	1,057	0,146	0,285	0,521	0,811
$n = 2$	0,586	1,101	1,838	2,324	0,555	1,017	1,654	2,154
$n = 3$	1,203	2,147	3,244	3,370	1,202	2,060	3,045	3,644
$n = 4$	2,001	3,381	4,413	4,414	2,064	3,342	4,540	5,152

Многочисленные исследования по определению спектра собственных частот круглых жесткозакрепленных изотропных пластин позволяют сделать вывод о хорошем совпадении результатов, полученных в рамках теории упругости и прикладной теории Тимошенко. Однако при анализе анизотропных элементов наблюдается более сложная картина. Это связано с тем, что в точном решении для вычисления  $\omega_{nk}$  используется большее количество упругих постоянных. Для тонких пластин ( $L = 0,05; 0,1;$ ) данный факт оказывает влияние в основном на первую частоту колебаний. Вместе с тем варьирование коэффициентами  $C_{13}, C_{33}$ , которые не учитываются в теории пластин, позволяет получить точное совпадение всех значений.

Для толстых элементов ( $L = 0,2; 0,4$ ) разница в численных значениях увеличивается, что объясняется, в том числе, неполным соответствием краевых условий в рассматриваемых теориях. В рамках модели Тимошенко, а также в построенных ранее точных решениях [2] допускается большая податливость плиты при

изгибе и не обеспечивается равенство нулю  $\frac{\partial w}{\partial r}$  на ее цилиндрической поверхности (последнее условие (2.5)).

На рис. 1, 2 приведены графики изменения касательных напряжений  $\sigma_{rz}$  по высоте пластины для случаев  $L = 0,4; 1$ . Расчеты выполнялись при действии равномерно-распределенной гармонической нагрузки интенсивностью  $q_0$  с частотой вынужденных колебаний  $\theta = 0,5\omega_{11}$ . Цифрами 1–4 обозначены результаты при  $r = 1; 0,75; 0,5; 0,25$ .

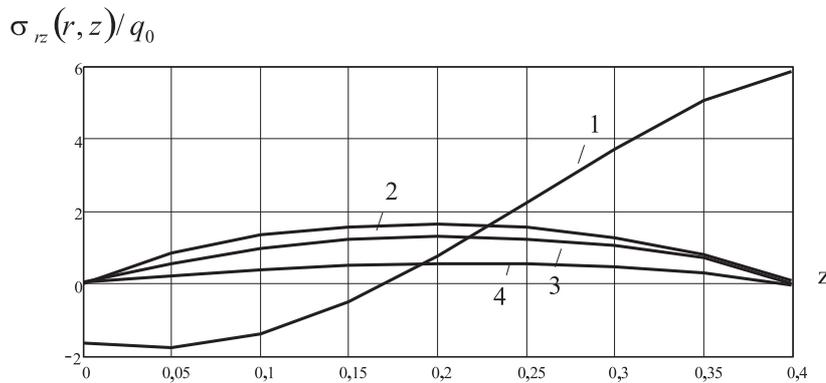


Рис. 1

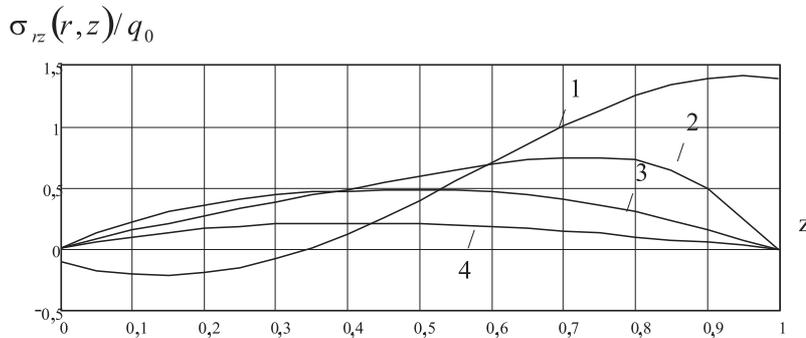


Рис. 2

Следует обратить внимание, что в работе [11] при исследовании напряженно-деформированного состояния круглых пластин для лучшего схождения бесконечных рядов нарушалось условие парности касательных напряжений в угловых точках ( $r = 1, z = 0, h$ ), справедливое для симметричной теории упругости. Аналогичный подход используется также при вычислении функции  $K(z)$  (рис. 1, 2 — кривые 1). В результате происходит существенное уменьшение численных значений  $\frac{dK(z)}{dz} |_{z=0, L}$ , входящих в краевые условия (2.6), и полученное решение становится устойчивым.

Анализ рис. 1, 2 показывает, что в областях, удаленных от заземленного края, распределение касательных напряжений по высоте пластины без большой погрешности можно описать параболической зависимостью. В тонких пластинах ( $L = 0,4$ ) только непосредственно около закрепленной поверхности характер распре-

деления данного напряжения меняется со смещением максимальных величин к торцевым поверхностям и значительным увеличением численных значений. В толстых элементах ( $L = 1$ ) данная особенность наблюдается в более широкой области, а именно при  $r \geq 0,75$ .

Особенности поведения радиальных напряжений  $\sigma_{rr}$  по координате  $r$  ( $L = 1$ ) отражает рис. 3. Цифрами 1–3 обозначены кривые, соответствующие сечениям  $z = L, L/2, 0$ . При  $z = L, L/2$  в областях, примыкающих к заделке, наблюдаются уменьшение напряжений по сравнению с внутренними точками и смена знака. В нижней части пластины (кривая 3) область  $r \geq 0,8$  характеризуется отсутствием данного вида напряжений.

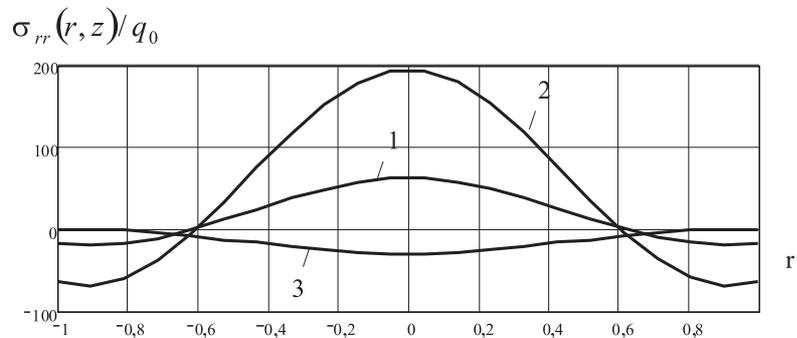


Рис. 3

Графики изменения вертикальной компоненты вектора перемещений  $W(r, z) \div r$  приведены на рис. 4 ( $L = 1$ ) соответственно для случаев  $z = L, L/2, 0$  (кривые 1–3). Разница в численных значениях характеризует сжатие пластины по высоте сечения.

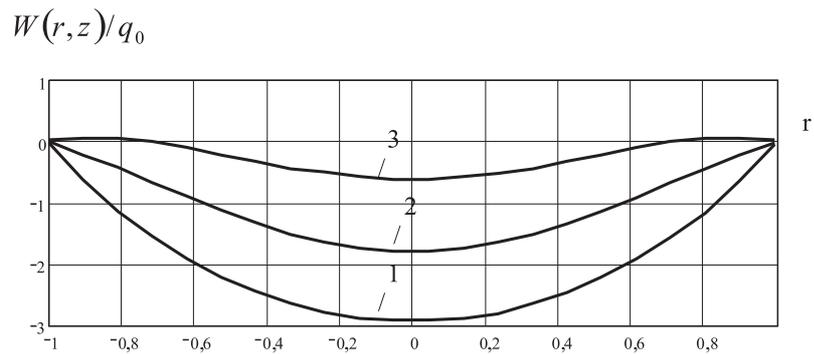


Рис. 4

В заключение следует отметить, что построенный алгоритм позволяет исследовать также статические задачи. При этом представление  $W(r, z)$  в виде

$$W(r, z) = A_0 + \frac{C_{11}}{C_{55}} \frac{r^2}{2} K(z) + w(r, z)$$

дает возможность с помощью постоянной  $A_0$  и функции  $K(z)$  удовлетворить

последнее краевое условие (1.4) без нарушения парности касательных напряжений в угловых точках [12].

## Литература

- [1] Пространственные задачи теории упругости и пластичности / под ред. А.Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1986. Т. 5. 286 с.
- [2] Фридман Л.И. Динамическая задача теории упругости для цилиндра конечных размеров // Прикладная механика. 1981. Т. 17. № 3. С. 37–43.
- [3] Высокочастотные колебания цилиндра конечных размеров / М.С. Якименко [и др.] // Доклады НАН Украины. 2009. № 5. С. 83–86.
- [4] Макарян В.С., Симонян В.В. Об одной динамической задаче для кругового упругого цилиндра конечной длины // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. 2009. № 51(1). Р. 26–31.
- [5] Сеницкий Ю.Э. К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра // Прикладная механика. 1981. Т. 17. № 8. С. 95–100.
- [6] Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача теории упругости для анизотропного конечного толстостенного цилиндра с учетом сил вязкого сопротивления // Вестник СамГУ. Естественнонауч. сер. 2008. № 2(61). С. 248–263.
- [7] Сеницкий Ю.Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1985. 173 с.
- [8] Вайсфельд Н.Д. Определение волнового поля внутри полого упругого цилиндра под действием осесимметричной нестационарной нагрузки // Акустичний вісник. 2003. Т. 6. № 3. С. 18–25.
- [9] Атомно-дискретное описание влияния анизотропных взаимодействий на упругие свойства ГПУ металлов / М.А. Баранов [и др.] // Физика твердого тела. 2004. Т. 46. Вып. 2. С. 212–217.
- [10] Снеддон И.Н., Берри Д.С. Классическая теория упругости. М.: Наука, 1961. 219 с.
- [11] Пространственные задачи теории упругости и пластичности / под ред. А.Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1985. Т. 3. 280 с.
- [12] Шляхин Д.А. Осесимметричная задача теории упругости для круглой жестко закрепленной пластины // Известия вузов. Сер.: Строительство. 2011. № 7. С. 3–9.

Поступила в редакцию 22/IV/2011;  
в окончательном варианте — 22/IV/2011.

## THE COMPELLED AXISYMMETRIC BENDING FLUCTUATIONS OF THICK ROUND RIGID PLATE

© 2011 D.A. Shlyakhin<sup>2</sup>

The new closed solution of axially symmetric nonstationary problem of the theory of elasticity for thick round anisotropic plate with rigid of its external radial surface is constructed. Calculated relations are obtained by method of expansion in eigen vector-functions in the form of structural algorithm of finite transformations. Numerical results allow to define the natural-vibration frequency, and also the stress-strain state of the testing element.

**Key words:** compelled fluctuations, axisymmetric dynamic stress, thick anisotropic plate.

Paper received 22/IV/2011.

Paper accepted 22/IV/2011.

---

<sup>2</sup>Shlyakhin Dmitriy Averkievich ([sgasu@sgasu.smr.ru](mailto:sgasu@sgasu.smr.ru)), the Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.