УДК 621.396.6.536.248.2.001

ТЕЧЕНИЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ПЛЕНКИ ПО ПЛОСКОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТЕНКЕ[1]

© 2011 Н.И. Клюев, А.В. Мурыскин, Х.И. Мингулов[2]

В работе представлена математическая модель пленочного испарения жидкости, стекающей под действием силы тяжести по плоской вертикальной стенке.

Ключевые слова: пленка, испарение, плоская стенка, сила тяжести.

Современные ракеты-носители в качестве топлива используют жидкий кислород и водород. Перед поступлением в камеру сгорания криогенная жидкость проходит процесс газификации. Превращение жидкости в пар осуществляется через ее испарение. Рассмотрим установившееся течение испаряющейся жидкой пленки под действием силы тяжести по плоской вертикальной стенке (рис. 1).

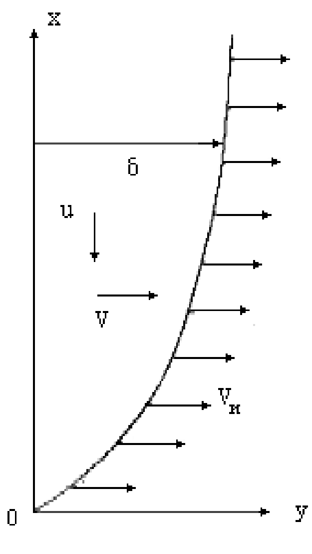

Рис. 1. Схема течения пленки при испарении: δ — толщина пленки, u, v — компоненты вектора скорости, v_u — скорость испарения массы

[1]Работа поддержана грантом Министерства образования РФ, НИР "Разработка методов исследования гидродинамики жидкого топлива в баках перспективных РН" Федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы".

[2]Клюев Николай Ильич (nikolay_klyuev@mail.ru), Мурыскин Антон Вадимович (muryskin@gmail.com), Мингулов Хамзя Илясович (mmm_mechmat@ssu.samara.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Будем рассматривать приближенную модель течения, когда скорость испарения постоянна и перпендикулярна стенке. Уравнения движения в проекции на оси x и y имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_3}{\partial x}+\nu_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_3}{\partial y}+\nu_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2}$$

уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{3}$$

где p — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость, g — ускорение свободного падения, индекс "3" — соответствует жидкости.

Очевидно, что толщина пленки δ значительно меньше высоты стенки l, т. е. $l \gg \delta$. Выполним оценку порядка величин отдельных слагаемых, входящих в дифференциальные уравнения (1)–(3), для чего введем безразмерные величины, учитывающие различные масштабы по координатам x и y:

$$\overline{x}=\frac{x}{l},\overline{y}=\frac{y}{\delta},\overline{u}=\frac{u}{u_0},\overline{v}=\frac{v}{v_0},\overline{p}=\frac{p}{\rho u_0^2}, \tag{4}$$

где u_0, v_0 — масштабы скоростей по оси x и y.

Подставим (4) в уравнение неразрывности (3)

$$\frac{u_0}{l}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\overline{x}}+\frac{v_0}{\delta}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\overline{y}}=0. \tag{5}$$

Чтобы сохранить оба слагаемых уравнения неразрывности, необходимо приравнять их масштабы, откуда $v_0=\frac{\delta}{l}u_0$ и, следовательно, поперечная скорость много меньше продольной $v_0 \ll u_0$. Анализ масштабов в уравнении (2) показывает, что слагаемое, содержащее градиент давления, на порядок больше остальных слагаемых. Отбрасывая малые величины, получим

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

С учетом сделанной оценки запишем систему уравнений для стекающей пленки по плоской вертикальной стенке

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g-\frac{1}{\rho_3}\frac{\partial p_3}{\partial x}+\nu_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{6}$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial y}=0,\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0. \tag{7}$$

Будем считать поверхность пленки гладкой при отсутствии межфазного трения. Тогда процесс испарения на вертикальной стенке соответствует течению жидкости с равномерным отсосом массы, и граничные условия задачи будут иметь следующий вид:

$$x=0,u=v=0, \tag{8}$$

$$x>0,y=0,u=v=0,y=\delta,v=v_u,\frac{\partial u}{\partial y}=0, \tag{9}$$

где $\delta(x)$ — толщина пленки, v_u — скорость отсоса массы.

Воспользуемся равенством давления в поперечном сечении для пленки жидкости и пара ($p_3 = p_1$), а также давлением столба пара $p_1 = \rho_1 g x$ и найдем $\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p_3}{\partial x} = \rho_1 g$, где индекс "1"соответствует пару. Тогда уравнение движения (1) перепишется

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -g\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_3}\right) + \nu_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{10}$$

Объединим (10) с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -g\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_3}\right) + \nu_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{11}$$

и выполним осреднение слагаемых, входящих в уравнение (11), по толщине пленки [1]. Для чего проинтегрируем по y от 0 до δ, используя среднее значение продольной скорости

$$< u >= \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta(x)} u(x,y)dy \tag{12}$$

и правило Лейбница (производная от интеграла с переменными пределами)

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta(x)} u(x,y)dy = u(x,\delta)\frac{\partial \delta}{\partial x} + \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x}dy. \tag{13}$$

Откуда найдем

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x}dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta(x)} u(x,y)dy - u(x,\delta)\frac{\partial \delta}{\partial x}. \tag{14}$$

С учетом (14) интеграл от первого слагаемого уравнения (11) запишется в виде

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u^2}{\partial x}dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta(x)} u^2 dy - u^2(x,\delta)\frac{\partial \delta}{\partial x}. \tag{15}$$

Поскольку толщина пленки достаточно мала, то вязкостные силы будут играть определяющую роль в формировании течения. В этом случае можно принять для продольной скорости квадратичный закон распределения в поперечном сечении пленки и воспользоваться выражением для скорости пленки постоянной толщины, стекающей по плоской вертикальной стенке

$$u(y) = \frac{-g(\rho_3+\rho_1)\delta^2}{\mu_3}\left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] = 3 < u > \left[\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right], \tag{16}$$

где средняя скорость стекания

$$< u >= \frac{-g(\rho_3+\rho_1)\delta^2}{3\mu_3}. \tag{17}$$

Для рассматриваемой задачи средняя скорость и толщина пленки являются функциями координаты x. Используя (16), выпишем следующие выражения:

$$u(\delta) = \frac{3 < u >}{2}, u^2 = \frac{9u^2}{\delta^2}\left(y^2 - \frac{y^3}{\delta} + \frac{y^4}{4\delta^2}\right), u^2(\delta) = \frac{9 < u >^2}{4}, \tag{18}$$

$$\int_0^{\delta(x)} u^2 dy = \frac{6}{5} < u >^2 \delta, \frac{\partial u}{\partial y} = 3 < u > \left(\frac{1}{\delta} - \frac{y}{\delta^2}\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}_{y=\delta} = 0, \frac{\partial u}{\partial y}_{y=0} = \frac{3 < u >}{\delta}. \tag{19a}$$

С учетом (18), (19) и (19а) формула (15) примет вид

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u^2}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6}{5} < u >^2 \delta\right) - \frac{9 < u >^2}{4}\frac{\partial \delta}{\partial x} =$$

$$= \frac{12}{5}\frac{\partial < u >}{\partial x} < u > \delta - \frac{21}{20} < u >^2 \frac{\partial \delta}{\partial x}. \tag{20}$$

Продолжим интегрирование слагаемых уравнения (11)

$$\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial (uv)}{\partial y} dy = (uv)_0^\delta = \frac{3v_u < u >}{2}, \tag{21}$$

$$-\int_0^{\delta(x)} g\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_3}\right) dy = -g\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\delta, \tag{21a}$$

$$\nu_3 \int_0^{\delta(x)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy = \nu_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^\delta = -\frac{3\nu_3 < u >}{\delta}, \tag{22}$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dy = \int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=\delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\delta u dy - (u)_{y=\delta}\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=\delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\delta u dy - \frac{\partial}{\partial x}\left((u)_{y=\delta}\frac{\partial \delta}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=\delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\delta < u >) - (u)_{y=\delta}\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=\delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial^2(\delta < u >)}{\partial x^2} - \frac{3 < u >}{2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - 3\frac{\partial < u >}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial x}. \tag{23}$$

Используя полученные выражения (21)–(23), уравнение движения перепишется в следующем виде:

$$\frac{12}{5}\frac{\partial < u >}{\partial x} < u > \delta - \frac{21}{20} < u >^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{3v_u < u >}{2} = -g\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\delta -$$

$$-\frac{3\nu_3 < u >}{\delta} + \nu_3 \frac{\partial^2(\delta < u >)}{\partial x^2} - \frac{3\nu_3 < u >}{2}\frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} - 3\nu_3 \frac{\partial < u >}{\partial x}\frac{\partial \delta}{\partial x}. \tag{24}$$

Запишем закон сохранения массы, для чего проинтегрируем уравнение неразрывности (3) по y от 0 до δ. Считаем, что при $y = \delta$ нормальная по отношению к стенке составляющая скорости равна v_u, тогда получим

$$v_u = -\int_0^{\delta(x)} \frac{\partial u}{\partial x} dy = -\frac{d}{dx}\int_0^{\delta(x)} u dy + (u)_{y=\delta}\frac{d\delta}{dx}. \tag{25}$$

Используя профиль скорости (16), из последнего уравнения следует

$$v_u = \frac{d(< u > \delta)}{dx} + \frac{3}{2} < u > \frac{d\delta}{dx},$$

или

$$v_u = -\delta \frac{d < u >}{dx} + \frac{1}{2} < u > \frac{d\delta}{dx}. \tag{26}$$

Система уравнений (24) и (26) описывает течение испаряющейся пленки на плоской вертикальной стенке. Для решения системы требуется знать величины $\frac{d\delta}{dx}$ и

$\frac{d<u>}{dx}$ при $x = 0$. В нашем случае эти начальные условия неизвестны, поэтому будем искать приближенное решение задачи. Оценки слагаемых уравнения движения (1) показывают, что вклад вязкого члена (для $\delta \ll x$) $\nu_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ мал, и этим членом можно пренебречь. Тогда уравнение (24) примет вид

$$\frac{12}{5}\delta < u > \frac{d < u >}{dx} - \frac{21}{20} < u >^2 \frac{d\delta}{dx} + \frac{3v_u < u >}{2} =$$
$$= -g\left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_3}\right)\delta - \frac{3\nu_3 < u >}{\delta}, \qquad (27)$$

где отсутствуют вторые производные $\frac{d^2\delta}{dx^2}$ и $\frac{d^2<u>}{dx^2}$.

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{v_u}{\nu_3}\sqrt[3]{\frac{6\nu_3 v_u}{g\left(1+\rho_1/\rho_3\right)}}x, \delta = \frac{\nu_3}{v_u}\Delta(\xi), < u >= \left(\frac{\nu_3}{v_u}\right)^2 \frac{g\left(1+\rho_1/\rho_3\right)}{3\nu_3}U(\xi). \qquad (28)$$

Для подстановки (28) в (26) и (27) выполним некоторые преобразования. Представим (28) в виде

$$\xi = Ax^{1/3}, \delta = B\Delta(\xi), < u >= CU(\xi), \qquad (29)$$

где

$$A = \frac{v_u}{\nu_3}\sqrt[3]{\frac{6\nu_3 v_u}{g\left(1+\rho_1/\rho_3\right)}}, B = \frac{\nu_3}{v_u}, C = \left(\frac{\nu_3}{v_u}\right)^2 \frac{g\left(1+\rho_1/\rho_3\right)}{3\nu_3}. \qquad (30)$$

Тогда

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{A^3}{3\xi^2}, \frac{d\delta}{dx} = \frac{d\delta}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{BA^3}{3\xi^2}\frac{d\Delta}{d\xi}, \frac{d < u >}{dx} = \frac{d < u >}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{CA^3}{3\xi^2}\frac{dU}{d\xi},$$

и интегральное соотношение (24) примет вид

$$16\Delta^2 U\frac{dU}{d\xi} - 7\Delta U^2\frac{d\Delta}{d\xi} + 15\xi^2(\Delta U + 2\Delta^2 + 2U) = 0. \qquad (31)$$

Подстановка безразмерных переменных в уравнение сохранения массы (26) дает второе дифференциальное уравнение

$$2\Delta\frac{dU}{d\xi} - U\frac{d\Delta}{d\xi} + 3\xi^2 = 0. \qquad (32)$$

В общем случае система уравнений (31) и (32) может быть проинтегрирована численно. Для этого она преобразуется к стандартной форме

$$\frac{dU}{d\xi} = 3\frac{\xi^2}{\Delta} - 15\frac{\xi^2}{U} - 15\frac{\xi^2}{\Delta^2}, \qquad (33)$$

$$\frac{d\Delta}{d\xi} = 9\frac{\xi^2}{U} - 30\frac{\xi^2\Delta}{U^2} - 30\frac{\xi^2}{\Delta U}, \qquad (34)$$

с начальными условиями

$$\xi = 0 : U = \Delta = 0. \qquad (35)$$

Для расчета рассматривалась испаряющаяся водяная пленка при температуре $t = 80^o$C, стекающая по плоской вертикальной стенке, характеристики жидкости: $\mu_3 = 0,36\cdot 10^{-3}$ м^2/с, $\rho_3 = 972$ кг/м^3, $\rho_1 = 0,29$ кг/м^3, скорость отсоса массы $v_u =$ $= 10^{-5}$ м/с. Была предпринята попытка численного решения уравнений (33)–(34) с использованием пакета прикладных программ Mathcad. Решение задачи оказалось крайне неустойчивым, поэтому необходимо применять другие подходы.

Отметим, что для указанных характеристик жидкости и длины стенки $l = 1$ м из (28) следует, что в этом случае $0 < \xi < 8 \cdot 10^{-4}$, т. е. $\xi \ll 1$. Следовательно, решение системы уравнений (31) и (32) можно представить в виде рядов по степеням малого параметра

$$U = \alpha_0\xi^2 + \alpha_1\xi^3 + \alpha_2\xi^4 + \ldots, \Delta = \beta_0\xi + \beta_1\xi^2 + \beta_2\xi^3 + \ldots, \qquad (36)$$

в которых коэффициенты α_m и β_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ определяются подстановкой этих разложений в (31) и (32) и приравниванием нулю коэффициентов при одинаковых степенях ξ. После очевидных преобразований получаем

$$U = -\xi^2 - 0,056\xi^3 - 0,013\xi^4 + \ldots, \Delta = \xi - 0,139\xi^2 - 0,06\xi^3 + \ldots. \qquad (37)$$

Отсюда следует, что трех членов разложения в (37) достаточно для многих практически важных случаев.

Для получения толщины и средней продольной скорости в размерном виде следует задать скорость испарения. Пусть массовый расход жидкости на единицу ширины пленки будет $G_3 = 0,01$ кг/с·м, тогда объемный расход $Q_3 = G_3/\rho_3 = 10^{-5}$ м^2/с. С другой стороны, $Q_3 = v_u l$, тогда $v_u = 10^{-5}$ м/с. Используя (36), получим (рис. 2, 3) безразмерные толщину пленки и среднюю продольную скорость в пленке.

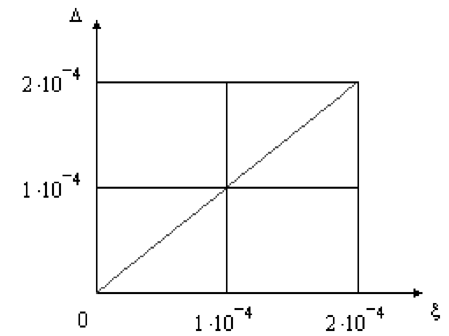

Рис. 2. Безразмерная толщина пленки

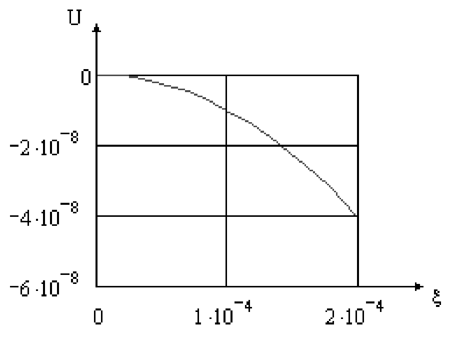

Рис. 3. Безразмерная средняя продольная скорость в пленке

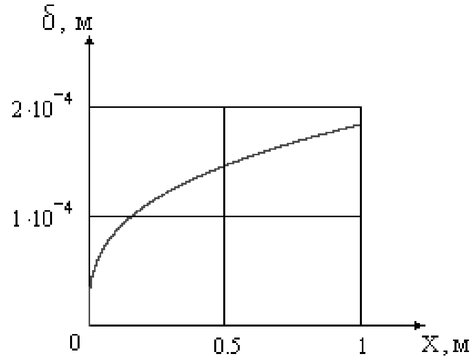

Рис. 4. Толщина испаряющейся пленки

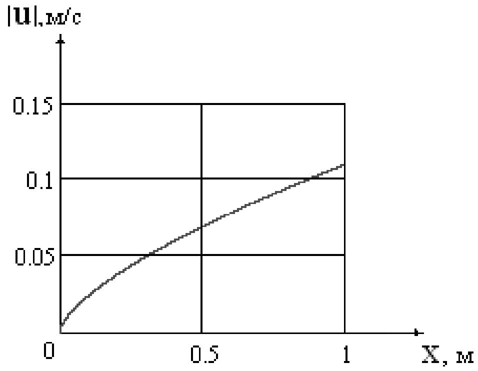

Рис. 5. Средняя продольная скорость в пленке

Используя (28), найдем (рис. 4, 5) размерные значения толщины испаряющейся пленки и средней продольной скорости в пленке.

Из графиков следует, что при стекании пленки ее толщина и средняя продольная скорость плавно уменьшаются до нуля. На рис. 4 видно быстрое изменение функции в окрестности нулевой точки, что и объясняет сингулярность уравнений (33) и (34). Полученные результаты могут быть использованы при математическом моделировании гидродинамических процессов пленочного испарения жидкости на плоской стенке.

Литература

[1] Стекание пленки конденсата по плоской вертикальной стенке / Н.И. Клюев [и др.] // Фундаментальные и прикладные проблемы науки: труды I международного симпозиума. М.: Изд-во РАН, 2010. Т. 1. С. 94–97.

Поступила в редакцию 3/ V/2011;
в окончательном варианте — 3/ V/2011.

FILM EVAPORATION FLOWING ON THE WALL OF THE VERTICAL PLANE CHANNEL

© 2011 N.I. Kluev, A.V. Muryskin, Kh.I. Mingulov[3]

This paper presents a mathematical model of a film evaporation of a liquid flowing downward by gravity on the wall of the vertical plane channel.

Key words: film, evaporation, plane channel, gravity.

Paper received 3/ V/2011.
Paper accepted 3/ V/2011.

[3]Kluev Nikolay Iliich (nikolay_klyuev@mail.ru), Muriskin Anton Vadimovich (muryskin@gmail.com), Mingulov Hamzya Ilyasovich (mmm_mechmat@ssu.samara.ru), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation