УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2011 Г.Р. Юнусова[1]

Для дифференциального уравнения в частных производных изучены краевые задачи на сопряжения с нелокальным граничным условием, связывающим значения искомого решения на противоположных сторонах прямоугольной области. Установлены критерии единственности решений поставленных задач, которые построены в виде суммы ряда Фурье. Доказана устойчивость решений по нелокальным граничным условиям.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальные задачи, единственность, устойчивость.

1. Постановка задач и полученные результаты

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} = 0, & t < 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) | 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, где α и β — заданные положительные действительные числа. Для уравнения (1.1) в этой области поставим следующие нелокальные задачи.

Задача 1. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,t}(D_+); \tag{1.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0, \ (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{1.3}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{1.4}$$

$$u(x,-\alpha) - u(x,\beta) = \varphi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.5}$$

где $\varphi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, причем $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (1.2)–(1.4) и

$$u_t(x,-\alpha) - u_t(x,\beta) = \psi(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{1.6}$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, причем $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

[1]Юнусова Гузель Рамилевна (ggg-ggg@mail.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 196.

Отметим, что нелокальное условие типа (1.5) впервые появилось в работе [1] при изучении задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, для уравнения Чаплыгина. В [2] изучена для уравнения Лаврентьева–Бицадзе задача с нелокальным условием, связывающим значение искомого решения на обеих характеристиках (задача со смещением). В статье [3] были предложены задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения во внутренних точках области со значениями на границе, для уравнений эллиптического типа. В [4] исследованы задачи со смещением для гиперболических и уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа. В [5] доказано существование решения нелокальной задачи с условиями $u_x(0,t) = u_x(1,t)$, $u(0,t) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$; $u(x,0) = \tau(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, для уравнения теплопроводности методом спектрального анализа. В работе [6] изучались краевые задачи для гиперболических уравнений с нелокальным интегральным условием. В работе [7] для уравнения (1.1) в прямоугольной области D изучена начально-граничная задача, в которой вместо условия (1.5) задано начальное условие $u(x,-\alpha) = \psi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Здесь на основании работы [7] установлен критерий единственности решения нелокальных задач 1 и 2. При этом решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи Штурма–Лиувилля. Установлена также устойчивость решения задач по нелокальным условиям (1.5) и (1.6) в нормах пространств $L_2[0,1]$ и $C(\overline{D})$.

2. Первая нелокальная начально-граничная задача

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.2)–(1.5). Рассмотрим функции

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\pi kx\,dx,\ k = 1,2,\dots\,. \tag{2.1}$$

На основании (2.1) введем функции

$$v_\varepsilon(t) = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\sin\pi kx\,dx, \tag{2.2}$$

где ε — достаточно малое число. Дифференцируя равенство (2.2) по t при $t \in (0,\beta)$ один раз, а при $t \in (-\alpha,0)$ два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$v'_\varepsilon(t) = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_t\sin\pi kx\,dx = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\pi kx\,dx, \tag{2.3}$$

$$v''_\varepsilon(t) = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{tt}\sin\pi kx\,dx = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\sin\pi kx\,dx. \tag{2.4}$$

В интегралах из правых частей равенств (2.3) и (2.4) интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом граничных условий (1.4), получим

$$u'_k + \lambda_k^2 u_k(t) = 0,\ t > 0, \tag{2.5}$$

$$u''_k + \lambda_k^2 u_k(t) = 0,\ t < 0, \quad \lambda_k = \pi k. \tag{2.6}$$

Дифференциальные уравнения (2.5) и (2.6) имеют общие решения

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ a_k\cos\lambda_k t + b_k\sin\lambda_k t, & t < 0, \end{cases} \tag{2.7}$$

где a_k, b_k и c_k — произвольные постоянные.

Поскольку решение $u(x,t) \in C^1(\overline{D})$, то для функций (2.7) выполнены условия сопряжения:

$$u_k(0+0) = u_k(0-0), \; u_k'(0+0) = u_k'(0-0). \qquad (2.8)$$

Функции (2.7) удовлетворяют условиям (2.8) только тогда, когда $a_k = c_k$ и $b_k = -c_k\lambda_k$. С учетом последних равенств функции (2.7) принимают вид

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ c_k(\cos\lambda_k t - \lambda_k \sin\lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Теперь для нахождения постоянных c_k воспользуемся нелокальным условием (1.5) и формулой (2.1):

$$u_k(-\alpha) - u_k(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\pi kx\, dx = \varphi_k. \qquad (2.10)$$

Тогда из (2.10) на основании (2.9) получим

$$c_k = \frac{\varphi_k}{\delta_{\alpha\beta}(k)} \qquad (2.11)$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha - e^{-\lambda_k^2\beta} \neq 0. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.11) в (2.9), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_k\delta_{\alpha\beta}^{-1}(k)e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \varphi_k\delta_{\alpha\beta}^{-1}(k)(\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Пусть теперь $\varphi(x) \equiv 0$, и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (2.12). Тогда $\varphi_k \equiv 0$, и из формул (2.13) и (2.1) следует, что

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\pi kx\, dx = 0, \; k = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $t \in [-\alpha,\beta]$. Поскольку $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k = p$ нарушено условие (2.12), т. е. $\delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда однородная задача (1.2)–(1.5) (где $\varphi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 t}\sin\pi px, & t > 0, \\ (\cos\lambda_p t - \lambda_p\sin\lambda_p t)\sin\pi px, & t < 0. \end{cases} \qquad (2.14)$$

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема 1. Если существует решение задачи (1.2)–(1.5), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (2.12) при всех $k \in \mathbb{N}$.

Представим выражение $\delta_{\alpha\beta}(k)$ в следующем виде:

$$\delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\,\sin(\lambda_k\alpha + \gamma_k) - e^{-\lambda_k^2\beta}, \qquad (2.15)$$

где $\gamma_k = \arcsin(1\Big/\sqrt{1+\lambda_k^2}) \to 0$ при $k \to +\infty$. Из представления (2.15) видно, что выражение $\delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_k}\Big[(-1)^n \arcsin\frac{e^{-\lambda_k^2\beta}}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} + \pi n - \gamma_k\Big],\ n = 1, 2, \dots . \tag{2.16}$$

Поскольку $\delta_{\alpha\beta}(k)$ является знаменателем дроби (2.11), то для обоснования существования решения задачи (1.2)–(1.5) необходимо показать, что существуют числа α и β такие, что при больших k выражение $\delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля.

Лемма 1. Если α — любое положительное рациональное число и β — любое положительное действительное число, то при больших k существует положительная постоянная C_0 такая, что справедлива оценка

$$|\delta_{\alpha\beta}(k)| \geqslant C_0 > 0. \tag{2.17}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = p,\ p \in \mathbb{N}$. Тогда из (2.15) при всех k имеем

$$\big|\delta_{\alpha\beta}(k)\big| = \big|\pm 1 - e^{-(k\pi)^2\beta}\big| \geqslant \big|1 - e^{-(k\pi)^2\beta}\big| \geqslant 1 - e^{-\pi^2\beta} = C_1 > 0$$

при любом фиксированном $\beta > 0$.

Пусть теперь $\alpha = p/q$, где $p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1$. Разделим kp на q с остатком: $kp = sq + r, s, r, \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leqslant r < q$. Тогда из (2.15) получим

$$\big|\delta_{\alpha\beta}(k)\big| = \Big|\sqrt{1+(k\pi)^2}(-1)^s \sin(\frac{\pi r}{q} + \gamma_k) - e^{-(k\pi)^2\beta}\Big|.$$

Если $r = 0$, то этот случай сводится к уже рассмотренному выше $\alpha = p \in \mathbb{N}$.

Пусть $r > 0$. Поскольку $\gamma_k \to 0$ при $k \to +\infty$, то существует постоянная $k_1 > 0$ такая, что при всех $k > k_1 : \gamma_k < \pi/2q$. Тогда

$$\big|\delta_{\alpha\beta}(k)\big| \geqslant \Big|\sqrt{1+(k\pi)^2}\sin(\frac{\pi r}{q} + \gamma_k) - e^{-(k\pi)^2\beta}\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{1+(k\pi)^2}\Big|\sin(\frac{\pi r}{q} + \gamma_k)\Big| - e^{-(k\pi)^2\beta} >$$

$$> k\pi\Big|\sin\Big(\frac{\pi(q-1)}{q} + \frac{\pi}{2q}\Big)\Big| - 1 = k\pi \sin\frac{\pi}{2q} - 1 \geqslant kC_2 \geqslant C_2 > 0$$

при $k > max\{k_1, k_2\}$, $k_2 \geqslant \dfrac{1}{\pi\sin\frac{\pi}{2q} - C_2}$, $0 < C_2 < \pi\sin\dfrac{\pi}{2q}$ и любом $\beta > 0$.

Отметим, что в случае, когда α является иррациональным числом в силу множества (2.16) нулей выражения $\delta_{\alpha\beta}(k)$, не удается установить аналог оценки (2.17).

Теперь при определенных условиях на функцию $\varphi(x)$ и число α покажем, что функция

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin\pi k x, \tag{2.18}$$

где $u_k(t)$ определяются формулой (2.13), удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3).

Лемма 2. Пусть выполнены условие (2.12) и оценка (2.17). Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$|u_k(t)| \leqslant M_1 k|\varphi_k|,\ \ |u_k'(t)| \leqslant M_2 k^2|\varphi_k|,\ \ t \in [-\alpha, \beta];$$
$$|u_k''(t)| \leqslant M_3 k^3|\varphi_k|,\ \ -\alpha \leqslant t \leqslant 0,$$

где M_i — здесь и далее положительные постоянные.

Справедливость данных оценок на основании леммы 1 следует из (2.13).

Формально из (2.18) почленным дифференцированием составим ряды:

$$u_x(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \pi k\, u_k(t)\cos \pi kx, \qquad t>0, \tag{2.19}$$

$$u_t(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k'(t)\sin \pi kx, \qquad t>0, \tag{2.20}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} (\pi k)^2 u_k(t)\sin \pi kx, \quad t>0, \tag{2.21}$$

$$u_{tt}(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k''(t)\sin \pi kx, \qquad t<0, \tag{2.22}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} (\pi k)^2 u_k(t)\sin \pi kx, \quad t<0. \tag{2.23}$$

Ряды (2.18)–(2.23) в силу лемм 1 и 2 мажорируются рядом

$$M_4 \sum_{k=1}^{+\infty} k^3|\varphi_k|. \tag{2.24}$$

Для сходимости ряда (2.24) достаточно, что $\varphi(x) \in C^4[0,1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$. Тогда ряд (2.24) оценивается рядом

$$M_5 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\varphi_k^{(4)}|}{k}, \tag{2.25}$$

где

$$\varphi_k^{(4)} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi^{(4)}(x)\sin \pi kx\, dx, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi_k^{(4)}|^2 \leqslant ||\varphi^{(4)}||_{L_2}^2.$$

Из сходимости ряда (2.25) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряды (2.18)–(2.20) на замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (2.21)–(2.23) в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (2.18), удовлетворяет условию (1.2). Подставляя ряды (2.20), (2.21) в уравнение (1.1) при $t>0$, а ряды (2.22), (2.23) в уравнение (1.1) при $t<0$, убеждаемся в том, что функция (2.18) удовлетворяет и условию (1.3).

Следовательно, доказана

Теорема 2. Если $\varphi(x) \in C^4[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ и выполнены условия (2.12) и (2.17), то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.5), и оно определяется рядом (2.18).

Далее установим устойчивость решения задачи (1.2)–(1.5) по ее нелокальному условию (1.5). Пусть

$$||u(x,t)||_{L_2[0,1]} = ||u(x,t)||_{L_2} = \Big(\int_0^1 |u(x,t)|^2\, dx\Big)^{1/2},$$

$$||\varphi^{(i)}(x)||_{L_2} = \Big(\int\limits_0^1 |\varphi^{(i)}(x)|^2\,dx\Big)^{1/2},\quad i=1,2,$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,t)|.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи (1.2)–(1.5) имеют место оценки:

$$||u(x,t)||_{L_2} \leqslant M_6||\varphi'(x)||_{L_2}, \tag{2.26}$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leqslant M_7||\varphi''(x)||_{L_2}, \tag{2.27}$$

где постоянные M_6 и M_7 не зависят от $\varphi(x)$.

Доказательство. Поскольку система $\{\sqrt{2}\sin k\pi x\}$ ортонормирована в $L_2[0,1]$, то из (2.18) и леммы 2 имеем

$$||u(x,t)||^2_{L_2} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leqslant M_1^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^2|\varphi_k|^2. \tag{2.28}$$

Тогда в силу представления $\varphi_k = \varphi_k^{(1)}/\lambda_k$, где $\varphi_k^{(1)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi'(x)\cos\lambda_k x dx$, из неравенства (2.28) получим

$$||u(x,t)||^2_{L_2} \leqslant \Big(\frac{M_1}{\pi}\Big)^2 \sum_{k=1}^{+\infty}[\varphi_k^{(1)}]^2 \leqslant \Big(\frac{M_1}{\pi}\Big)^2 ||\varphi'(x)||^2_{L_2}.$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (2.26).

Пусть (x,t) — произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулу (2.18) и представление $\varphi_k = -\varphi_k^{(2)}/\lambda_k^2$, где $\varphi_k^{(2)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \varphi''(x)\sin\lambda_k x dx$, на основании леммы 2 и неравенства Коши–Буняковского будем иметь

$$|u(x,t)| \leqslant \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)| \leqslant M_1\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}k|\varphi_k| \leqslant \frac{\sqrt{2}M_1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}|\varphi_k^{(2)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}M_1}{\pi^2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|\varphi_k^{(2)}|^2\Big)^{1/2} = \frac{M_1}{\pi\sqrt{3}}||\varphi''(x)||_{L_2},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$, из которого непосредственно следует оценка (2.27).

3. Вторая нелокальная начально-граничная задача

Докажем единственность решения задачи 2. Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (1.2)–(1.4) и (1.6). Аналогично п. 2 введем функцию (2.1), которая определяется по формуле (2.9). Для нахождения неизвестных коэффициентов c_k воспользуемся нелокальным условием (1.6) и формулой (2.1):

$$u_k'(-\alpha) - u_k'(\beta) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \psi(x)\sin\pi kx\,dx = \psi_k. \tag{3.1}$$

Тогда из (3.1) на основании (2.9) найдем

$$c_k = \frac{\psi_k}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)} \tag{3.2}$$

при условии, когда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sin\lambda_k\alpha - \lambda_k\cos\lambda_k\alpha + \lambda_k e^{-\lambda_k^2\beta} \neq 0. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.2) в (2.9) получим

$$u_k(t) = \begin{cases} \psi_k(\lambda_k\Delta_{\alpha\beta}(k))^{-1}e^{-\lambda_k^2 t}, & t > 0, \\ \psi_k(\lambda_k\Delta_{\alpha\beta}(k))^{-1}(\cos\lambda_k t - \lambda_k\sin\lambda_k t), & t < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Пусть теперь $\psi(x) \equiv 0$, и при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (3.3). Тогда $\psi_k \equiv 0$, и из формул (3.4) и (2.1) следует, что

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\pi kx\,dx = 0,\ k = 1, 2, \ldots .$$

Из данных равенств в силу полноты системы синусов $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $t \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку $u(x,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Пусть при некоторых α, β и $k = p$ нарушено условие (3.3), т. е. $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$. Тогда однородная задача (1.2)–(1.4) и (1.6) (где $\psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение, которое определяется по формуле (2.14). Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Если существует решение задачи (1.2)–(1.4) и (1.6), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия (3.3) при всех $k \in \mathbb{N}$.

Выражение для $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ представим в следующем виде:

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\sin(\lambda_k\alpha - \omega_k) + \lambda_k e^{-\lambda_k^2\beta}, \tag{3.5}$$

где $\omega_k = \arcsin(\lambda_k \big/ \sqrt{1+\lambda_k^2}) \to \dfrac{\pi}{2}$ при $k \to +\infty$. Из соотношения (3.5) видно, что выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k) = 0$ только тогда, когда

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_k}\left[(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\lambda_k e^{-\lambda_k^2\beta}}{\sqrt{1+\lambda_k^2}} + \pi n + \omega_k\right],\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поскольку $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ является знаменателем (3.4), то для обоснования существования решения задачи (1.2)–(1.4), (1.6) необходимо показать, что существуют числа α и β такие, что при больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta}(k)$ отделено от нуля.

Лемма 3. Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\alpha = p$ — натуральное; 2) $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, q — нечетное, $p/q \notin \mathbb{N}$, то при любом фиксированном $\beta > 0$ при больших k существует положительная постоянная B_0 такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geqslant B_0 k > 0. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда из (3.5) имеем

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| = \lambda_k|(-1)^{p+1} + e^{-\lambda_k^2\beta}| \geqslant \lambda_k(1 - e^{-\pi^2\beta}) = B_1 k. \tag{3.7}$$

Пусть теперь $\alpha = p/q,\ p, q \in \mathbb{N},\ (p, q) = 1,\ q$ — нечетное. Разделим kp на q с остатком: $kp = sq + r$, где $s, r, \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leqslant r < q$. Тогда выражение (3.5) примет вид

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}(-1)^{s+1}\cos\Big(\frac{\pi r}{q} + \varepsilon_k\Big) + \lambda_k e^{-\lambda_k^2\beta}, \tag{3.8}$$

где $\varepsilon_k > 0$ и $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to +\infty$.

При $r = 0$ мы имеем случай, рассмотренный выше. Пусть $r > 0$. Тогда $1 \leqslant r \leqslant q-1,\ q \geqslant 2$ и при больших k

$$0 < \frac{\pi}{q} + \varepsilon_k \leqslant \frac{\pi r}{q} + \varepsilon_k \leqslant \pi - \frac{\pi}{q} + \varepsilon_k < \pi. \tag{3.9}$$

Из двойного неравенства (3.9) следует, что если $q = 2l,\ l \in \mathbb{N}$, то при $r = l$ аргумент $\dfrac{\pi r}{q} + \varepsilon_k \to \dfrac{\pi}{2}$, когда $k \to +\infty$; если $q = 2l+1$, то при любом $r : 1 \leqslant r \leqslant q-$ -1 $\dfrac{\pi r}{q} \neq \dfrac{\pi}{2}$. Поскольку $\varepsilon_k \to 0$ и $e^{-\lambda_k^2\beta} \to 0$ при $k \to \infty$, то существует постоянная $k_1 > 0$ такая, что при всех $k > k_1$

$$\big|\cos\big(\frac{\pi r}{q} + \varepsilon_k\big)\big| \geqslant \frac{1}{2}\big|\cos\frac{\pi r}{q}\big| > 0,$$

$$\frac{1}{2}\big|\cos\frac{\pi r}{q}\big| - e^{-\lambda_k^2\beta} \geqslant B_2 = const > 0,$$

где $0 < B_2 < \dfrac{1}{2}\big|\cos\dfrac{\pi r}{q}\big|$. Тогда с учетом этих оценок из (3.8) при $k > k_1$ получим

$$\big|\Delta_{\alpha\beta}(k)\big| \geqslant \lambda_k\Big(\big|\cos(\frac{\pi r}{q} + \varepsilon_k)\big| - e^{-\lambda_k^2\beta}\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda_k\Big(\frac{1}{2}\Big|\cos\frac{\pi r}{q}\Big| - e^{-\lambda_k^2\beta}\Big) \geqslant \pi B_2 k. \tag{3.10}$$

Из (3.7) и (3.10) следует справедливость (3.6) при больших k.

Теперь при определенных условиях на функцию $\psi(x)$ и число α покажем, что функция (2.18), где $u_k(t)$ определяются формулой (3.4), удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3).

Лемма 4. Пусть выполнена оценка (3.6). Тогда при больших k справедливы оценки

$$|u_k(t)| \leqslant E_1\frac{|\psi_k|}{k},\ \ |u_k'(t)| \leqslant E_2|\psi_k|,\ \ t \in [-\alpha, \beta];$$
$$|u_k''(t)| \leqslant E_3 k|\psi_k|,\ \ -\alpha \leqslant t \leqslant 0,$$

где E_i — здесь и далее положительные постоянные.

Указанные оценки на основании леммы 3 следуют из формулы (3.4).

Ряды (2.18)–(2.23) в силу лемм 3 и 4 мажорируются рядом

$$E_4\sum_{k=1}^{+\infty} k|\psi_k|. \tag{3.11}$$

Для сходимости ряда (3.11) достаточно, что $\psi(x) \in C^2[0,1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$. Тогда ряд (3.11) оценивается сходящимся рядом

$$E_5\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\psi_k^{(2)}|}{k}, \tag{3.12}$$

где

$$\psi_k^{(2)} = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \psi^{(2)}(x)\cos\pi kx\,dx, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k^{(2)}|^2 \leqslant ||\psi^{(2)}||_{L_2}^2.$$

Из сходимости ряда (3.12) в силу признака Вейерштрасса сходятся абсолютно и равномерно ряды (2.18)–(2.20) на замкнутой области $\overline{D}$, а ряды (2.21)–(2.23) в соответствующих замкнутых областях $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_-$. Поэтому функция $u(x,t)$, определенная рядом (2.18), удовлетворяет условиям (1.2) и (1.3).

Итак, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. Если $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ и выполнены условия (3.3) и (3.6), то существует единственное решение задачи (1.2)–(1.4), (1.6), и оно определяется рядом (2.18), где коэффициенты находятся по формулам (3.4).

Далее аналогично п. 2 установим устойчивость решения задачи (1.2)–(1.4), (1.6) по ее нелокальному условию (1.6).

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда для решения задачи (1.2)–(1.4), (1.6) имеют место оценки:

$$||u(x,t)||_{L_2} \leqslant E_6||\psi(x)||_{L_2}, \tag{3.13}$$

$$||u(x,t)||_{C(\overline{D})} \leqslant E_7||\psi(x)||_{L_2}, \tag{3.14}$$

где постоянные E_6 и E_7 не зависят от $\psi(x)$.

Доказательство. Поскольку система $\{\sqrt{2}\sin k\pi x\}$ ортонормирована в $L_2[0,1]$, то из (2.18) и леммы 4 имеем

$$||u(x,t)||_{L_2}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2(t) \leqslant E_1^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\psi_k|^2}{k^2} = E_1^2||\psi(x)||_{L_2}^2. \tag{3.15}$$

Из неравенства (3.15) следует справедливость оценки (3.13).

Пусть (x,t) — произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда, используя формулы (2.18), (3.4), на основании леммы 4 и неравенства Коши–Буняковского будем иметь

$$|u(x,t)| \leqslant \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)| \leqslant \sqrt{2}E_1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|\psi_k|}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{2}E_1}{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}|\psi_k|^2\Big)^{1/2} = \frac{E_1}{\sqrt{3}}||\psi(x)||_{L_2},$$

откуда непосредственно вытекает оценка (3.14).

Литература

[1] Франкль Ф.И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 2. С. 196–202.

[2] Жегалов В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Уч. записки Казанск. ун-та. 1962. Т. 122. № 3. С. 3–16.

[3] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН. 1969. Т. 185. № 3, 4. С. 739–740.
[4] Нахушев А.М. О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 1. С. 44–59.
[5] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294–304.
[6] Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 3. С. 435–445.
[7] Сабитов К.Б. Задача Трикоми для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Математические заметки. 2009. Т. 86. Вып. 2. С. 273–279.

Поступила в редакцию 5/*IX*/2011;
в окончательном варианте — 5/*IX*/2011.

NONLOCAL PROBLEMS FOR THE EQUATION OF THE MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE

 G.R. Yunusova[2]

Boundary value problems with non-local conditions for partial differential equation are considered. In these problems, non-local conditions connect the values of a required solutions on the opposite sides of a rectangular domain. Criteria of uniqueness of each of the problems are obtained. Solutions to both problems are constructed as sums of Fourier series. The stability of solutions is proved.

Key words: equation of the mixed type, non-local problems, uniqueness, stability.

Paper received 5/*IX*/2011.
Paper accepted 5/*IX*/2011.

[2]Yunusova Guzel Ramilevna (`ggg-ggg@mail.ru`), the Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.