УДК 517.95

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

© 2011 М.В. Стригун[1]

В данной работе исследуется начально-краевая задача для гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием, содержащим интеграл от искомого решения. Доказано существование единственного обобщенного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральное условие, обобщенное решение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q_T = \{(x,t): \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T\}$ гиперболическое уравнение

$$Lu = u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него начально-краевую задачу: найти в области Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

граничному условию

$$u(0,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$u(l,t) = \int\limits_0^l K(x)u(x,t)dx, \tag{4}$$

где функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$ заданы в области $\overline{Q}_T$, $a(x,t) > 0 \ \forall (x,t) \in Q_T$ — условие гиперболичности уравнения (1), $K(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на отрезке $[0,l]$.

Условие (4) представляет собой соотношение, связывающее значение искомого решения в граничных и внутренних точках области. Такие условия называют нелокальными.

В статье [1] доказано существование единственного решения в пространстве $V_1 = \{u(x,t) : u(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)), u_t(x,t) \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)), u_{tt}(x,t) \in$

[1]Стригун Мария Владимировна (marii@samaracom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))\}$ задачи для многомерного гиперболического уравнения с граничным условием вида

$$u|_{S_T} = \int\limits_{\Omega} K(x,y,t)u(y,t)dy \Bigg|_{(x,y)\in S_T},$$

где S_T — боковая поверхность цилиндра $Q_t = \Omega\times(0,T)$, Ω — ограниченная область пространства R^n, если выполняются довольно сильные условия на коэффициенты и входные данные.

В предлагаемой работе в частном случае $n = 1$ доказана однозначная разрешимость задачи в пространстве $W_2^1(Q_T)$ со значительно более слабыми требованиями на входные данные.

2. Разрешимость задачи (1)–(4)

Теорема. Если функции $a(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $K(x)$ удовлетворяют условиям: $a(x,t) \in C^1(\overline{Q}_T)$, $c(x,t) \in C(\overline{Q}_T)$, $f(x,t) \in L_2(Q_T)$, $K(x) \in C^2[0,l]$, $K(0) = 0$, $|K(x)| < \frac{1}{l}$ $\forall x \in [0,l]$, $\varphi(x) \in W_2^1(0,l)$, $\psi(x) \in L_2(0,l)$, кроме того, выполняются следующие условия согласования:

$$\varphi(l) = \int\limits_0^l K(x)\varphi(x)dx, \tag{5}$$

$$\psi(l) = \int\limits_0^l K(x)\psi(x)dx, \tag{6}$$

то существует единственное решение $u(x,y) \in W_2^1(Q_T)$ задачи (1)–(4).

Доказательство проведем по следующей схеме. Сначала сведем поставленную задачу с нелокальным условием к задаче с однородными граничными условиями для нагруженного уравнения и докажем ее однозначную разрешимость. Затем покажем, что из разрешимости задачи для нагруженного уравнения вытекает разрешимость поставленной задачи.

Следуя [1], определим оператор B равенством

$$Bu = u(x,t) - \int\limits_0^x K(y)u(y,t)dy.$$

Обозначим $Bu \equiv \upsilon(x,t)$, тогда

$$\upsilon(x,t) = u(x,t) - \int\limits_0^x K(y)u(y,t)dy. \tag{7}$$

Равенство (7) можно рассматривать как интегральное уравнение Вольтерра 2 рода относительно функции $u(x,t)$, $\forall t \in [0,T]$ имеющее единственное решение из класса $L_1(0,l)$ [3, с. 42]. Заметим, что класс решения интегрального уравнения зависит от свойств свободного члена и ядра. Если функция $\upsilon(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ и $K(y)$ удовлетворяет условиям теоремы, то $u(x,t) \in W_2^1(Q_T)$.

В силу (7)

$$Lu = L\upsilon + L\int\limits_0^x K(y)u(y,t)dy.$$

Выразим u_{tt} из (1). Тогда уравнение (1) примет вид

$$\upsilon_{tt} - (a\upsilon_x)_x + c\upsilon + \int\limits_0^x K''(y)a(y,t)u(y,t)dy + \int\limits_0^x K'(y)a_y(y,t)u(y,t)dy -$$

$$-\int\limits_0^x c(y,t)K(y)u(y,t)dy + c(x,t)\int\limits_0^x K(y)u(y,t)dy - \tag{8}$$

$$-2a(x,t)K'(x)u(x,t) - a_x(x,t)K(x)u(x,t) = f(x,t) - \int\limits_0^x K(y)f(y,t)dy.$$

Начальные условия для функции υ задаются равенствами:

$$\upsilon(x,0) = \varphi(x) - \int\limits_0^x K(y)\varphi(y)dy = \widetilde{\varphi}(x), \tag{9}$$

$$\upsilon_t(x,0) = \psi(x) - \int\limits_0^x K(y)\psi(y)dy = \widetilde{\psi}(x), \tag{10}$$

а граничные условия однородные:

$$\upsilon(0,t) = 0, \quad \upsilon(l,t) = 0. \tag{11}$$

В силу однозначной разрешимости уравнения (7), задачи (1)–(4) и (8)–(11) эквивалентны.

Умножим равенство (7) скалярно на υ и, воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского, можно получить оценку

$$\|\upsilon\|_{L_2(Q_T)} \leqslant (\widetilde{K}l + 1)\|u\|_{L_2(Q_T)}, \tag{12}$$

где $|K(x)| \leqslant \widetilde{K} \ \ \forall x \in (0,l)$. Аналогично получается оценка

$$\|u\|^2_{L_2(Q_T)} \leqslant \frac{1}{1-\widetilde{K}l}\|\upsilon\|_{L_2(Q_T)}. \tag{13}$$

Эти неравенства потребуются для доказательства разрешимости задачи (8)–(11).

Определим обобщенное решение задачи (8)–(11). Для этого умножим (8) на $\omega(x,t) \in \hat{W}^1_{2,0}(Q_T) = \{\omega : \omega \in W^1_2(Q_T), \omega(l,t) = \omega(0,t) = 0, \omega(x,T) = 0\}$ и проинтегрируем по частям. Получим:

$$-\int\limits_{Q_T} \upsilon_t\omega_t dxdt + \int\limits_{Q_T} a\upsilon_x\omega_x dxdt - \int\limits_0^l \psi(x)\omega(x,0)dx + \int\limits_{Q_T} c\upsilon\omega dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^x K''(y)a(y,t)u(y,t)dydxdt + \int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^x K'(y)a_y(y,t)u(y,t)dydxdt -$$

$$-\int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^x c(y,t)K(y)u(y,t)dydxdt+\int\limits_{Q_T}\omega c(x,t)\int\limits_0^x K(y)u(y,t)dydxdt- \tag{14}$$

$$-\int\limits_{Q_T}\omega a(x,t)K'(x)u(x,t)-\int\limits_{Q_T}\omega a_x(x,t)K(x)u(x,t)=$$

$$=\int\limits_{Q_T}\omega f dxdt-\int\limits_{Q_T}\omega\int\limits_0^x K(y)f(y,t)dydxdt.$$

Определение. Будем называть $\upsilon(x,t)\in W^1_{2,0}(Q_T)=\{\upsilon:\upsilon\in W^1_2(Q_T),$ $\upsilon(l,t)=\upsilon(0,t)=0\}$ обобщенным решением задачи (8)–(11), если $\upsilon(x,0)=\widetilde{\varphi}(x)$, и она удовлетворяет тождеству (14) $\forall\omega\in\hat{W}^1_{2,0}(Q_T)$, где функция $u(x,t)$ такова, что $Bu=\upsilon$.

Доказательство существования решения задачи (8)–(11)

Найдем решение интегрального уравнения Вольтерра (7) для каждого $t\in[0,T]$.

$$u(x,t)=\upsilon(x,t)+\int\limits_0^x R(x,y,1)\upsilon(y,t)dy, \tag{15}$$

где

$$R(x,y,1)=\sum_{k=1}^{\infty}K_k(x,y),$$

а итерированные ядра $K_k(x,y)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$K_1(x,y)=K(x,y),$$

$$K_k(x,y)=\int\limits_y^x K(z)K_{k-1}(y)dz=K(y)\left(\int\limits_y^x K(z)dz\right)^{k-1}\qquad(k=2,3...).$$

Будем искать $\upsilon^m(x,t)$ в следующем виде:

$$\upsilon^m(x,t)=\sum_{i=1}^{m}d_i(t)X_i(x),$$

где $X_i(x)\in C^2[0,l]$ и образуют полную линейно независимую ортонормированную систему функций в $W^1_2(0,l)$, кроме того, $X_i(0)=0$, а $d_i(t)$ подлежат определению. Тогда

$$u^m(x,t)=\upsilon^m(x,t)+\int\limits_0^x R(x,y,1)\upsilon^m(y,t)dy.$$

Найдем $d_i(t)$ из соотношений:

$$\int\limits_0^l \upsilon^m_{tt}X_j(x)dx-\int\limits_0^l(a\upsilon^m_x)_xX_j(x)dx+\int\limits_0^l c\upsilon^mX_j(x)dx+$$

$$+\int\limits_0^l\int\limits_0^x K''(y)a(y,t)u^m(y,t)dyX_j(x)dx+\int\limits_0^l\int\limits_0^x K'(y)a_y(y,t)u^m(y,t)dyX_j(x)dx-$$

$$-\int_0^l\int_0^x c(y,t)K(y)u^m(y,t)dyX_j(x)dx+ \tag{16}$$

$$+\int_0^l c(x,t)\int_0^x K(y)u^m(y,t)dyX_j(x)dx-\int_0^l 2a(x,t)K'(x)u^m(x,t)X_j(x)dx-$$

$$-\int_0^l a_x(x,t)K(x)u^m(x,t)X_j(x)dx=$$

$$=\int_0^l f(x,t)X_j(x)dx-\int_0^l\int_0^x K(y)f(y,t)dyX_j(x)dx,$$

которые представляют собой систему дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенную относительно старших производных:

$$d_j''(t)+\sum_{i=1}^m d_i(t)A_{ij}(t)=F_j(t). \tag{17}$$

Кроме того, зададим начальные условия для d_i:

$$d_i(0)=\beta_i,\quad d_i'(0)=\gamma_i, \tag{18}$$

где β_i и γ_i — коэффициенты разложения функций $\widetilde{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\psi}(x)$ соответственно в ряд по системе $\{X_i(x)\}_{i=1}^\infty$.

Задача(17)–(18) однозначно разрешима [4, с. 124]. Таким образом построена последовательность приближенных решений. Покажем ее ограниченность. Для этого аналогично тому, как в работе [6], принимая во внимание неравенства (12) и (13), получим априорную оценку решения:

$$\|\upsilon^m\|_{W_2^1(Q_T)}\leqslant N, \tag{19}$$

где N зависит только от входных данных.

Построенная последовательность приближенных решений ограничена, поэтому из теоремы о слабой компактности ограниченного множества гильбертова пространства следует, что из данной последовательности можно выделить последовательность, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q_T)$: $\upsilon^m(x,t)\to\upsilon(x,t)$. Кроме того, эта подпоследовательность будет сходиться по норме $L_2(Q_T)$ ([2], с. 64), а значит, из нее можно выделить подпоследовательность (за которой оставим то же обозначение), сходящуюся почти всюду. Это позволит в дальнейшем перейти к пределу под знаком интеграла Лебега.

Покажем, что $\upsilon(x,t)$ является обобщенным решением задачи (8)–(11). Для этого убедимся в том, что для любой функции $\omega^m(x,t)$, представимой в виде $\omega^m(x,t)=\sum\limits_{i=1}^m b_i(t)X_i(x)$, выполняется интегральное тождество. Умножив (16) на произвольную функцию $b_j(t)\in W_2^1(0,T)$ такую, что $b_j(T)=0$, просуммировав по j от 1 до m, зафиксировав $\omega^{m_0}(x,t)$ и перейдя к пределу по m, получим нужное.

Множество функций $\omega^{m_0}(x,t)$ всюду плотно в $\hat{W}_{2,0}^1$ [5]. Поэтому, перейдя к пределу по m_0, убедимся, что интегральное тождество (14) выполняется для всех $\omega\in\hat{W}_{2,0}^1(Q_T)$. Значит, слабый предел построенной последовательности приближенных решений является обобщенным решением задачи (8)–(11).

Доказательство единственности решения задачи (8)–(11). Предположим, что существует u_1 и u_2 такие, что $v_1 = Bu_1$ и $v_2 = Bu_2$ являются решениями задачи (8)–(11). Обозначим их разность $v(x,t)$, а разность $u_1 - u_2$ обозначим u и выберем $\omega(x,t)$ специальным образом:

$$\omega_t(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & 0 \leqslant t \leqslant \eta, \\ 0, & \eta < t \leqslant T. \end{cases}$$

Подставив так выбранное $\omega(x,t)$ в интегральное тождество и сделав оценки, можно получить следующее неравенство:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l (\omega_\eta^2(x,\eta) + a\omega_x^2(x,0))dx \leqslant M \int\limits_{Q_\eta} (\omega^2 + \omega_x^2 + \omega_t^2)dxdt.$$

Такое же неравенство было получено в статье [6]. Из него аналогично тому, как это сделано в указанной работе, можно вывести, что $v(x,t) = 0$ в Q_T. А значит, задача (8)–(11) имеет не более одного решения.

Поскольку задачи (1)–(4) и (8)–(11) эквивалентны, однозначная разрешимость задачи (1)–(4) доказана.

Литература

[1] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1166–1179.

[2] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

[3] Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 232 с.

[4] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1984. 296 с.

[5] Пулькина Л.С. Дифференциальные уравнения в частных производных. Самара: Изд-во "Самарский университет", 2004. 140 с.

[6] Стригун М. В. Об одной нелокальной задаче с интегральным граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. № 8(74). С. 78–87.

Поступила в редакцию 22/XI/2011;
в окончательном варианте — 22/XI/2011.

INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE-DIMENSION HYPERBOLIC EQUATION WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

 M.V. Strigun[2]

In this paper, we study an initial-boundary value problem with nonlocal integral condition for a hyperbolic equation. The existence and uniqueness of a generalized solution of the problem is proved.

Key words: hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions, generalized solution.

Paper received 22/*XI*/2011.
Paper accepted 22/*XI*/2011.

[2]Strigun Maria Vladimirovna (`marii@samaracom.ru`), the Dept. of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.