УДК 517.956.223

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2011 Н.Ю. Селиванова[1], М.В. Шамолин[2]

Изучается некоторая однофазная задача со свободной границей, при этом доказывается ее локальная разрешимость (по времени). В работе разработанный ранее общий метод применяется в конкретном случае.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, локальная краевая задача, разрешимость.

Введение

Пусть $\Omega(t)$ — ограниченное открытое множество в R^N, $N \geqslant 2$, граница которого $\partial\Omega(t)$ — объединение $\Gamma \cup \Sigma(t)$ двух компактных связных гиперповерхностей. Здесь Γ фиксированно и, возможно, пусто (далее для простоты без потери общности можно считать именно так), а $\Sigma(t)$ меняется с течением времени. Рассмотрим следующую однофазную задачу со свободной границей: найти функцию $u(x,t)$ и гладкое однопараметрическое семейство гиперповерхностей

$$\Sigma = \bigcup_{t \in (0,T]} (\Sigma(t) \times \{t\}),$$

удовлетворяющие следующей краевой задаче (см. также [1–6]):

$$\begin{aligned} Au &= f(x,t), \quad x \in \Omega(t), \\ u &= g(x,t), \quad x \in \partial\Omega(t), \\ v_n &= -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right), \quad x \in \Sigma(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где A — эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами:

$$A = \partial_i(a_{ij}\partial_j) + b_j\partial_j,$$

(a_{ij}) — симметричная положительно определенная матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности:

$$\sum_{ij} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant |\xi^2|, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

и b_j — гладкие коэффициенты.

[1]Селиванова Надежда Юрьевна (shamolin@imec.msu.ru), кафедра дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 117234, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1.

[2]Шамолин Максим Владимирович (shamolin@imec.msu.ru), Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899, Российская Федерация, г. Москва, Мичуринский пр., 1.

Пусть f и g — заданные функции в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, v_n — нормальная скорость $\Sigma(t)$, n — единичная нормаль к $\Sigma(t)$, внешняя к $\Omega(t)$.

Наша цель — доказать локальную (по времени) разрешимость задачи (1).

Разрабатывая общий метод, мы для ясности изложения будем параллельно применять его в конкретном, более простом случае.

Пусть $\Omega(t)$ — переменная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная неподвижной плоскостью $x_3 = -1$ и поверхностью $\Sigma(t) : x_3 = \rho(x_1, x_2, t)$. $A = \Delta$ — оператор Лапласа, т. е. $a_{ij} = 1$, если $i = j$, и $a_{ij} = 0$ — иначе, $b_j = 0$.

В $\Omega(t)$ имеем задачу:

$$\begin{aligned} \Delta u = f(x,t), &\quad x \in \Omega(t), \\ u = g(x,t), &\quad x \in \partial\Omega(t), \\ v_n = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right), &\quad x \in \Sigma(t). \end{aligned} \tag{2}$$

1. Замена переменных, параметризация границы, сведение задачи к задаче в постоянной области

Рассмотрим Σ^* — $(N-1)$-мерную гладкую связную область (поверхность), вложенную в $\Omega \in \mathbb{R}^N$.

Пусть $M^*(s)$ — какая-то точка на поверхности Σ^* и $n^*(s)$ — единичная внешняя нормаль к Σ^* в точке M^*. Тогда $M(s,d) = M^*(s) + dn^*(s)$ для некоторого малого положительного числа L_0, зависящего только от кривизны поверхности Σ^*, $M(.,.)$ — C^∞-диффеоморфизм из $\Sigma^* \times [-L_0, L_0]$ на

$$\Sigma(L_0) = \{M \in \mathbb{R}^N \mid \operatorname{dist}(M, \Sigma^*) < L_0\}.$$

Для достаточно малого $\rho_0 \ll 1$ можно параметризовать Σ_0 определенным выше образом:

$$\Sigma_0 = \Sigma^{\rho_0} = \Sigma^* + \rho_0 n^*.$$

Другими словами,

$$\Sigma_0 = \{M^{\rho_0} \mid M^{\rho_0} = M^* + \rho_0(s) n^*,\, M^* \in \Sigma^*\},$$

где $\rho_0(s)$ — $C^{m+\alpha}$-функция из Σ^*в $\mathbb{R}$.

Будем считать, что

$$\|\rho_0\|_{m+\alpha} \leqslant \delta,$$

где $\delta < \frac{L_0}{8}$ и $\delta \ll 1$.

Замечание 1. Для любой гладкой области M обозначим через $\|\cdot\|_{m+\alpha,n+\beta}$ норму пространства $C^{n+\beta}([0,T], C^{m+\alpha}(M))$. Когда $m = n$ и $\alpha = \beta$, будем вместо $\|\cdot\|_{m+\alpha,m+\alpha}$ писать просто $\|\cdot\|_{m+\alpha}$.

Замечание 2. Используя теоремы вложения, полученные результаты можно перенести и на пространство $W_p^m(M \times [0,T])$.

Для достаточно малого $T \ll 1$ можно параметризовать все семейство $\{\Sigma(t)\}_{t\in[0,T]}$, т. е.

$$\Sigma_\rho(t) = \{M^\rho \mid M^\rho = M^*(s) + \rho(s,t) n^*(s),\, M^* \in \Sigma^*\},$$

где ρ — $C^{m,\alpha}$-функция из $\Sigma^* \times [0,T]$ в $\left[-\frac{L_0}{4}, \frac{L_0}{4}\right]$.

Теперь определим замену переменных, которая позволит перейти от задачи со свободной границей к задаче в фиксированной области.

Пусть $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — «срезающая» функция, причем для любого фиксированного $t \in [0,T]$ отображение

$$Y_\rho : (x,t) \to x - \zeta\left(\frac{d(x)}{L_0}\right)\rho(S(x),t)n^*(S(x))$$

является C^2-диффеоморфизмом из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$ для любой функции $\rho \in C^{m,\alpha}(\Sigma^* \times \times [0,T])$ такой, что $\|\rho\|_0 \leqslant \frac{L_0}{4}$. При этом Y_ρ отображает $\Omega(t)$ в Ω^*, а $\Sigma(t)$ в Σ^*.

Рассмотрим теперь

$$v(y,t) = u((Y_\rho)^{-1}(y,t),t)$$

для $(y,t) \in \Omega^* \times [0,T]$. Тогда в новых переменных получим (см. также [5; 6]):

$$\{\, \mathcal{L}^\rho\, v(y,t) = F_0(y,t), \quad y \in \Omega^*, v(y,t) = G(y,t), \quad y \in \Sigma^*, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}^\rho v(y,t) = \sum_{k,l=1} (\nabla_x Y_\rho^k, A\nabla_x Y_\rho^l)\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_m \operatorname{div}_x(a_{ij}^1(\nabla_x Y_\rho^m))\frac{\partial v}{\partial y_m} + \sum_m b_m\left(\nabla v, \frac{\partial Y_\rho}{\partial x_m}\right)$$

и

$$F_0(y,t) = f(Y_\rho^{-1}(y,t),t), \qquad G_0(y,t) = g(Y_\rho^{-1}(y,t),t).$$

И наконец,

$$a_{ij}^1(y,t) = a_{ij}(Y_\rho^{-1}(y,t)).$$

Рассмотрим теперь, как преобразуется уравнение (3). Если граница задана уравнением $H(x_1,x_2,x_3,t) = 0$, то его можно переписать в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \left(\nabla H, \frac{\partial x}{\partial t}\right) = 0.$$

Разделив это уравнение на $\|\nabla H\|$, получим

$$-\frac{\frac{\partial H}{\partial t}}{\|\nabla H\|} = \left(\frac{\nabla H}{\|\nabla H\|}, \frac{\partial x}{\partial t}\right) = \left(n, \frac{\partial x}{\partial t}\right) = v_n.$$

В силу параметризации граница задается уравнением

$$H = x - \rho(s_1(x),\dots,s_{N-1}(x),t)n(s(x)) = 0;$$

отсюда

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\|\nabla H\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_N}\right)^2}$$

и, так как

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \frac{\partial \rho}{\partial s_1}\frac{\partial s_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial \rho}{\partial s_{N-1}}\frac{\partial s_{N-1}}{\partial x_k},$$

окончательно получаем

$$v_n = \frac{\partial_t \rho}{\sqrt{1 + \left\|\sum\limits_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k}\rho \nabla_x s_k\right\|^2}}.$$

Далее, согласно приведенной выше замене переменных, внешняя нормальная производная u принимает вид

$$\partial_n u(x,t) = \left(\sqrt{1 + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k} \rho \nabla_x s_k \right\|^2}\right) (\partial_n v(Y_\rho(x,t),t)).$$

Согласно уравнению (3), $v_N = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)$, поэтому получаем

$$-\frac{\partial_t \rho}{\sqrt{1 + \left\| \sum\limits_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k} \rho \nabla_x s_k \right\|^2}} = \left(\sqrt{1 + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k} \rho \nabla_x s_k \right\|^2}\right) (\partial_n v(Y_\rho(x,t),t)).$$

Окончательно уравнение (3) перепишется в виде

$$\partial_t \rho + \mathcal{H}^\rho \partial_n v = 0, \qquad (y,t) \in \Sigma^* \times [0,T],$$

где

$$\mathcal{H}^\rho = 1 + \left\| \sum_{k=1}^{N-1} \partial_{s_k} \rho \nabla_x s_k \right\|^2.$$

Итак, переформулируем задачу (1) следующим образом: положим

$$E = \{\rho \in C^{m,\alpha}([0,T] \times \Sigma^*) : \rho(0) = \rho_0, \|\rho - \rho_0\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} \leqslant \varepsilon\},$$

где ε — положительная константа, много меньшая единицы, которая будет уточнена позднее.

Мы помним, что должно выполняться неравенство

$$\|\rho\|_{0,0} \leqslant \|\rho_0\|_0 + \|\rho - \rho_0\|_{0,m+\alpha-1} T < \frac{L_0}{4}$$

для достаточно малого T, чтобы граница Σ^ρ была параметризована. Положим

$$F = \{u \in C^{m,\alpha}([0,T] \times \Omega^*) : \|u\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} \leqslant C_F(\|f\|_{m,\alpha} + \|g\|_{m,\alpha})\},$$

где $C_F > 1$ — константа, которая также будет уточнена позднее.

Итак, сформулируем окончательно поставленную задачу: для любой пары (v,ρ), заданной в $E \times F$, найти пару $(w,h) \in E \times F$ — решение задачи (см. также [4]):

$$Aw = Av - \mathcal{L}_{(\rho,h)} v + F_0(y,t) = -(\nabla v, \operatorname{div}_x(a^1_{ij}(\nabla_x Y_h))) + F_0(y,t) + B^{(\rho,h)} v, \quad y \in \Omega^*, \tag{4}$$

$$w(y,t) = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial n}(y,t)\zeta h + r(\rho), \quad y \in \Sigma^*, \tag{5}$$

$$\partial_t h + \mathcal{H}^\rho(\partial_n v) = 0, \quad h(0) = \rho_0, \tag{6}$$

где

$$B^{(\rho,h)} v = (A - A^{(\rho,h)} v) = Av - \sum_{k,l=1}^{N} (\nabla_x Y^k_\rho, A \nabla_x Y^l_h) \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_m b_m \left(\nabla v, \frac{\partial Y_h}{\partial x_m}\right)$$

и $r(\rho)$ — остаток в формуле Тейлора, примененной к $g(y + \zeta \rho n)$.

Таким образом, имеем отображение $\mathcal{F} : (W,h) = \mathcal{F}(v,\rho)$. Докажем далее, что $\mathcal{F}$ хорошо определено из $E \times F$ в $E \times F$ и обладает сжимающим свойством для достаточно малого T, а значит, имеет единственную неподвижную точку. Тем самым будет доказана локальная разрешимость начальной задачи.

2. Пример. Замена переменных и параметризация границы в случае задачи (2)

Пусть $\Omega(t)$ — переменная область в $\mathbb{R}^3$, ограниченная неподвижной плоскостью $x_3 = -1$ и поверхностью $\Sigma(t) : x_3 = \rho(x_1, x_2, t)$. Рассмотрим задачу:

$$\{ \Delta\, u = f(x,t), \quad x \in \Omega(t), u = g(x,t), x \in \partial\Omega(t), v_n = -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right), x \in \Sigma(t). \tag{7}$$

Сделаем замену:

$$\{ y_{\,1} = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 - \zeta\rho,$$

где $\zeta = \zeta(x_3 - \rho(x_1, x_2, t))$ — «срезающая» функция, т. е.

$$\zeta(z) = \{ 1\ , \quad -\frac{1}{3} \leqslant z \leqslant 0, 0, z \leqslant -\frac{2}{3},$$

гладкая при $-\frac{2}{3} \leqslant z \leqslant -\frac{1}{3}$.

Легко видеть, что в результате такой замены переменная область $\Omega(t)$ перейдет в постоянную полосу Ω^*, ограниченную плоскостями $y_3 = -1$ и $y_3 = 0$. Согласно введенным обозначениям

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = Y_\rho(x) = \begin{pmatrix} Y_\rho^1 \\ Y_\rho^2 \\ Y_\rho^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 - \zeta\rho \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_1}\frac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y_3}\frac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_i},$$

действие оператора A превращается в

$$Av = \sum_k \frac{\partial v}{\partial y_k} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 Y_\rho^k(x)}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij} + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} \sum_{i,j} \frac{\partial Y_\rho^k(x)}{\partial x_i}\frac{\partial Y_\rho^l(x)}{\partial x_j} a_{ij}.$$

Обозначим первое слагаемое в правой части этого равенства через I_1, а второе — через I_2. В соответствии с предыдущей заменой имеем

$$\frac{\partial Y_\rho^1(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial Y_\rho^2(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial Y_\rho^3(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1 \partial x_3} & -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2 \partial x_3} & -\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Запишем подробнее производные от $\zeta = \zeta(x_3 - \rho(x_1, x_2, t))$ и от $\zeta\rho$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} = \zeta'\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_2} = \zeta'\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x_3} = \zeta'.$$

По правилу Лейбница имеем

$$\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_1}=\frac{\partial\zeta}{\partial x_1}\rho+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_1}=\zeta'\Big(-\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)\rho+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_2}=\frac{\partial\zeta}{\partial x_2}\rho+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_2}=\zeta'\Big(-\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)\rho+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x_2},$$
$$\frac{\partial(\zeta\rho)}{\partial x_3}=\frac{\partial\zeta}{\partial x_3}\rho=\zeta'\rho,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2^2}=\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)^2(\zeta''\rho-2\zeta')-\frac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}(\zeta'\rho-\zeta),$$
$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1\partial x_3}=\zeta''\Big(-\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)\rho+\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_1}=\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(\zeta'-\zeta''\rho),$$
$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2\partial x_3}=\zeta''\Big(-\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)\rho+\zeta'\frac{\partial\rho}{\partial x_2}=\frac{\partial\rho}{\partial x_2}(\zeta'-\zeta''\rho),$$
$$\frac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_3^2}=\zeta''\rho.$$

Таким образом, получаем

$$I_1=\tfrac{\partial v}{\partial y_1}\times 0+\tfrac{\partial v}{\partial y_2}\times 0+\tfrac{\partial v}{\partial y_3}\times\bigg(\tfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_1^2}-\tfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_2^2}-\tfrac{\partial^2(\zeta\rho)}{\partial x_3^2}\bigg)=$$
$$=-\tfrac{\partial v}{\partial y_3}\Bigg((\zeta''\rho-2\zeta')\bigg(\Big(\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)^2\bigg)-(\zeta'\rho-\zeta)\bigg(\tfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+\tfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}\bigg)+\zeta''\rho\Bigg),$$

$$I_2=\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\times 1+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_2}\times 0+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_3}\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)+$$
$$+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_1}\times 0+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\times 1+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_3}\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)+$$
$$+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_3\partial y_1}\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)+\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)+$$
$$+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_3^2}\bigg(\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)^2+(1-\rho\zeta')^2\bigg).$$

Отсюда

$$\mathcal{L}^\rho v=\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}+2\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_1\partial y_3}\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)+2\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_2\partial y_3}\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)+$$
$$+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y_3^2}\bigg(\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\zeta'\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\rho-\zeta\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)^2+(1-\rho\zeta')^2\bigg)-$$
$$-\tfrac{\partial v}{\partial y_3}\Bigg((\zeta''\rho-2\zeta')\bigg(\Big(\tfrac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\tfrac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)^2\bigg)-(\zeta'\rho-\zeta)\bigg(\tfrac{\partial^2\rho}{\partial x_1^2}+\tfrac{\partial^2\rho}{\partial x_2^2}\bigg)+\zeta''\rho\Bigg).$$

Согласно приведенным выше рассуждениям о преобразовании уравнения (3), исследуемое уравнение (с учетом того, что $s_1=x_1$ и $s_2=x_2$) принимает вид

$$\partial_t\rho+\mathcal{H}^\rho\partial_n v=0,$$

где

$$\mathcal{H}^\rho=1+\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_1}\Big)^2+\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x_2}\Big)^2.$$

Таким образом, в случае задачи (2) система уравнений (4)–(6) будет иметь вид:

$$\Delta w = \frac{\partial v}{\partial y_3}\left((\zeta''h - 2\zeta')\left(\left(\frac{\partial h}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y_2}\right)^2\right) - (\zeta' h - \zeta)\left(\frac{\partial^2 h}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2}\right) + \zeta'' h\right) + F_0(y,t) +$$
$$+\Delta v - \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_3}\left(\zeta' \frac{\partial \rho}{\partial y_1}\rho - \zeta \frac{\partial \rho}{\partial y_1}\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial y_3 \partial y_1}\left(\zeta' \frac{\partial h}{\partial y_1} h - \zeta \frac{\partial h}{\partial y_1}\right) -$$
$$- \frac{\partial^2 v}{\partial y_2 \partial y_3}\left(\zeta' \frac{\partial \rho}{\partial y_2}\rho - \zeta \frac{\partial \rho}{\partial y_2}\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial y_3 \partial y_2}\left(\zeta' \frac{\partial h}{\partial y_2} h - \zeta \frac{\partial h}{\partial y_2}\right) -$$
$$- \frac{\partial^2 v}{\partial y_3^2}\left(\left(\zeta' \frac{\partial \rho}{\partial y_1}\rho - \zeta \frac{\partial \rho}{\partial y_1}\right)\left(\zeta' \frac{\partial h}{\partial y_1}\rho - \zeta \frac{\partial h}{\partial y_1}\right) +\right.$$
$$\left. + \left(\zeta' \frac{\partial \rho}{\partial y_2}\rho - \zeta \frac{\partial \rho}{\partial y_2}\right)\left(\zeta' \frac{\partial h}{\partial y_2}\rho - \zeta \frac{\partial h}{\partial y_2}\right) + (1 - \rho\zeta')(1 - h\zeta')\right), \quad y \in \Omega^*,$$

$$w = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial y_3}\zeta h + r(\rho), \quad y \in \Sigma^*,$$

$$\partial_t h + \left(1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y_2}\right)^2\right)\frac{\partial v}{\partial y_3} = 0, \quad h(0) = \rho_0.$$

3. Оценка w через h

Выпишем отдельно уравнения (4) и (5):

$$Aw = -(\nabla v, \operatorname{div}_x(a^1_{ij}(\nabla_x Y_h))) + F_0(y,t) + B^{(\rho,h)}v, \quad y \in \Omega^*, \tag{8}$$

$$w(y,t) = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial n}(y,t)\zeta h + r(\rho), \quad y \in \Sigma^*, \tag{9}$$

где

$$B^{(\rho,h)}v = (A - A^{(\rho,h)}v) = Av - \sum_{k,l=1}^{N}(\nabla_x Y^k_\rho, A\nabla_x Y^l_h)\frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_l} - \sum_m b_m\left(\nabla v, \frac{\partial Y_h}{\partial x_m}\right)$$

и $r(\rho)$ — остаток в формуле Тейлора, примененной к $g(y+\zeta\rho n, t)$. Обозначим для простоты

$$R_0 = -(\nabla v, \operatorname{div}_x(a^1_{ij}(\nabla_x Y_h))) + F_0(y,t) + B^{(\rho,h)}v$$

и

$$J_0 = g(y,t) + \frac{\partial g}{\partial n}(y,t)\zeta h + r(\rho).$$

Далее будем писать просто Ω и Σ вместо Ω^* и Σ^*. Напомним, что

$$E = \{\rho \in C^{m,\alpha}([0,T]\times\Sigma) : \rho(0) = \rho_0,\ \|\rho - \rho_0\|_{m+\alpha, m-1+\alpha} \leqslant \varepsilon\}$$

и

$$F = \{u \in C^{m,\alpha}([0,T]\times\Omega) : \|u\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} \leqslant C_F(\|f\|_{m,\alpha} + \|g\|_{m,\alpha})\}.$$

Тогда, в силу того, что $(v,\rho) \in E \times F$, имеем

$$R_0 = C^{m,\alpha}([0,T], C^{m-2,\alpha}(\Omega))$$

и

$$J_0 = C^{m,\alpha}([0,T]\times\Sigma).$$

Эллиптичность A дает следующую оценку:

$$\|w\|_{m+\alpha,0} \leqslant C(\|R_0\|_{m-2+\alpha,0} + \|J_0\|_{m+\alpha,0}).$$

Для того чтобы получить данную пространственно-временную оценку на w, приведем без доказательства одну вспомогательную лемму.

Лемма 1. Пусть $R_0 = C^{m,\alpha}([0,T], C^{m-2,\alpha}(\Omega))$, $J_0 = C^{m,\alpha}([0,T]\times\Sigma)$, $v \in F$, $\rho \in E$ и w — решение задачи (8)–(9). Имеют место следующие оценки:

$$\|w\|_{m,\alpha} \leqslant C_1(\|v\|_{m,\alpha},\, \|\rho\|_{m,\alpha})\|h\|_{m,\alpha} + C_2$$

и

$$\|w\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} \leqslant C_1\|h\|_{m+\alpha,m-1+\alpha} + C_2.$$

Литература

[1] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.

[2] Данилюк И.И. О задаче Стефана // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40. № 5. С. 133–185.

[3] Елтышева Н.А. О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 132. № 2. С. 186–209.

[4] Лаврентьев М.М. (мл.), Люлько Н.А. Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач // Сиб. мат. ж. 1997. Т. 38. № 1. С. 109–124.

[5] Карташов Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 1999. № 5. С. 3–34.

[6] Соболев С.Л. Локально неравновесные модели процессов переноса // Успехи физ. наук. 1997. Т. 167. № 10. С. 1095–1106.

Поступила в редакцию 18/*X*/2011;
в окончательном варианте — 10/*XII*/2011.

LOCAL SOLVABILITY OF SOME PROBLEM WITH FREE BORDER

© 2011 N.Yu. Selivanova[3] M.V. Shamolin[4]

A certain single-phase problem with free border is studied. The local solvability of such problem is proved. The more general method investigated earlier is used in concrete event in this work.

Key words: differential equations, local boundary problem, solvability.

Paper received 18/X/2011.
Paper accepted 10/XII/2011.

[3]Selivanova Nadezhda Yurievna (shamolin@imec.msu.ru), the Dept. of Mathematics and Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 117234, Russian Federation.

[4]Shamolin Maksim Vladimirovich (shamolin@imec.msu.ru), the Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119899, Russian Federation.