

УДК 519.214

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ КОПУЛ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ НЕЗАВИСИМОСТИ t -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

© 2011 Е.А. Савинов¹

В работе изучаются копулы, полученные в результате преобразования независимости (Independence Transformation) случайных векторов с распределением Стюдента. Для схемы серий зависимых случайных величин, связанных такими ИТ-копулами, доказаны варианты центральной предельной теоремы. Для двумерной ИТ-копулы распределения Коши показано отсутствие ассоциированности.

Ключевые слова: копулы, преобразование независимости, предельные теоремы.

Введение

Математические работы, так или иначе связанные с понятием копулы, появились еще в 40–50-х годах прошлого века. Первое упоминание термина "копула" появилось, по-видимому, в 1959 г. в работе [1] и окончательно укрепилось в научной литературе в 70–80-х годах. С одной стороны (см., например [2]), копулы рассматриваются как функции, которые связывают многомерные функции распределения с их одномерными маргиналами (Sklar's theorem), с другой стороны, это просто функции распределения, чьи маргиналы равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$.

Как известно (см. [3]), изучение копул интересно по нескольким причинам: во-первых, это способ изучения меры зависимости между случайными величинами (см. [4]), во-вторых, как отправная точка для конструирования новых семейств многомерных распределений, в-третьих, в связи с относительно новым подходом к теории марковских процессов (см. [5]).

В настоящей работе изучаются копулы, порожденные так называемыми преобразованиями независимости. Фактически первой работой, посвященной таким преобразованиям, была статья [6]. Более подробно свойства этого преобразования для негауссовских случайных величин изучались в работах [7–15]. Отметим, что рассматриваемые преобразования в случае гауссовского случайного вектора совпадают с хорошо известным линейным преобразованием ортогонализации. Как будет видно далее, случайный вектор, полученный в результате преобразования

¹Савинов Евгений Анатольевич (henrylee@dxdu.ru), кафедра теории вероятностей и математической статистики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

независимости, состоит, вообще говоря, из зависимых компонент, что приводит к задаче изучения характера и мер зависимости между ними с помощью копул.

В работе рассматриваются IT-копулы распределений Стьюдента, и для гауссовских случайных величин, связанных такими копулами (и в силу этого не образующих гауссовский вектор), устанавливаются различные варианты ЦПТ. В заключение на примере двумерной копулы преобразования независимости распределения Коши показано, что IT-копулы, вообще говоря, не являются ассоциированными.

Введем используемые далее обозначения.

$\mathbf{I} := [0, 1]$, $\mathbf{u} := (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbf{I}^n$. Для $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{I}^n$ будем писать $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, когда $a_k \leq b_k$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$. Для $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ будем обозначать через $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ n -прямоугольник $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbf{I}^n$. $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного гауссовского распределения.

Введем необходимые определения.

Определение 1. Пусть $H : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{I}^n$, $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — n -прямоугольник в \mathbf{I}^n . H -объемом n -прямоугольника B будем называть разность порядка n функции H на B

$$V_H(B) = \Delta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} H(\mathbf{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} H(\mathbf{t}), \quad (1)$$

где разность первого порядка определяется как

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Определение 2 (Copula). Функция $C : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ называется n -копулой, если она обладает следующими свойствами

1. Для каждого $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$

$$C(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{если } u_1 u_2 \dots u_n = 0.$$

2. Если все координаты \mathbf{u} кроме u_k равны 1, то

$$C(\mathbf{u}) = u_k.$$

3. Для всех \mathbf{a} и \mathbf{b} из \mathbf{I}^n таких, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0.$$

Как известно, копула связывает многомерную функцию распределения с одномерными маргинальными распределениями (см., например [2]).

Теорема 1 (Sklar). Пусть H — совместная n -мерная функция распределения с одномерными маргиналами F_1, \dots, F_n . Тогда существует n -копула $C : \mathbf{I}^n \rightarrow \mathbf{I}$ такая, что $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$H(\mathbf{x}) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (2)$$

Если к тому же одномерные распределения F_i непрерывны, то такая C единственна.

Обратно, если C n -копула, F_1, \dots, F_n — одномерные функции распределения, то функция H , заданная формулой (2), является n -мерной функцией распределения с маргиналами F_1, \dots, F_n .

1. IT-копулы

Рассмотрим на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P}\}$ случайный вектор $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ с абсолютно непрерывной функцией распределения $F(x_1, \dots, x_n)$. Введем семейство условных функций распределения

$$F_{i|1\dots\hat{i}\dots n}(x_i|x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$$

случайной величины X_i относительно системы случайных величин

$$X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n,$$

где $\widehat{}$ — знак пропуска элемента. Будем рассматривать "двойственные" случайные величины

$$X_{i,n}^* = F_{i|1\dots\hat{i}\dots n}(X_i|X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n).$$

Говорят, что случайная величина $X_{i,n}^*$ получена в результате преобразования независимости случайной величины X_i . Термин преобразование независимости объясняется тем, что случайная величина $X_{i,n}^*$ оказывается стохастически независимой относительно системы $\{X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n\}$.

Лемма 1. *Функция распределения случайного вектора $(X_{1,n}^*, \dots, X_{n,n}^*)$ является копулой.*

Доказательство. Определение 2 проверяется непосредственно. □

Определение 3. IT-копулой случайного вектора $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ с абсолютно непрерывным распределением будем называть функцию

$$C_{IT}^{\mathbf{X}_n}(\mathbf{u}) = \mathbb{P}\{X_{1,n}^* \leq u_1, \dots, X_{n,n}^* \leq u_n\}.$$

Замечание 1. *Отметим, что копула случайного вектора $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ с абсолютно непрерывным распределением будет, в силу теоремы 1, иметь вид*

$$C^{\mathbf{X}_n}(\mathbf{u}) = \mathbb{P}\{F_1(X_1) \leq u_1, \dots, F_n(X_n) \leq u_n\},$$

где $F_i(t) = \mathbb{P}\{X_i \leq t\}$ — функции распределения компонент вектора \mathbf{X}_n .

2. Предельная теорема для IT-копул Стьюдента

В этой части мы будем рассматривать последовательности IT-копул стьюдентовских случайных векторов. Мы покажем, что для схемы серий гауссовских случайных величин, связанных такими копулами, имеет место центральная предельная теорема.

Предположим, задано измеримое пространство $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$, где \mathbb{H} — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со счетным ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, борелевской σ -алгеброй и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Будем рассматривать на нем счетно-аддитивную меру Стьюдента с r степенями свободы μ с характеристическим функционалом

$$\Psi_\mu(y) = \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{t}{2} \langle By, y \rangle\right\} g_r(t) dt, \quad y \in \mathbb{H}, \quad (3)$$

где B — линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор с собственными векторами $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$g_r(t) = \frac{r^{r/2}}{2^{r/2}\Gamma(r/2)} t^{-r/2-1} \exp\left\{-\frac{r}{2t}\right\}, \quad t > 0. \quad (4)$$

Выберем $\{f_k\}$ — произвольный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве \mathbb{H} и будем рассматривать на вероятностном пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$ случайные величины $X_i = \langle \cdot, f_i \rangle$. Заметим, что случайные векторы $\mathbf{X}_n = \{X_1, \dots, X_n\}$ имеют распределения Стьюдента с характеристическими функциями

$$\psi_{1\dots n}(y_1, \dots, y_n) = \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{t}{2} \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \langle B_n f_i, f_j \rangle\right\} g_r(t) dt, \quad (5)$$

где $B_n = \pi_n B \pi_n$, π_n — ортопроектор $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_n = \text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{X}_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ — семейство стьюдентовских случайных векторов на $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$, определенное выше. Рассмотрим $\{X_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$ — схему серий случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, P_0\}$ и имеющих совместные функции распределения

$$P_0 \left\{ X_1^{(n)} \leq x_1, \dots, X_n^{(n)} \leq x_n \right\} = C_{IT}^{\mathbf{X}_n} (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)).$$

Тогда если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle B_n^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle B_n^{-1} f_i, f_i \rangle \langle B_n^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}} = \sigma^2, \quad (6)$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Отметим, что условие (6) выполнено не всегда. В приведенном в конце статьи примере 1 рассмотрена такая мера Стьюдента с характеристическим функционалом (3), для которой условие теоремы 2 не выполняется, но выполняется

Теорема 3. Пусть $\{X_i^{(n)}\}_{i=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$ — схема серий случайных величин из теоремы 2. Тогда если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle B_n^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle B_n^{-1} f_i, f_i \rangle \langle B_n^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}} = \sigma^2, \quad (8)$$

то

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2).$$

3. IT-копула распределения Коши

Предположим теперь, что на измеримом пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$, где \mathbb{H} — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со счетным ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, борелевской σ -алгеброй и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

задана эллиптически-контурованная α -устойчивая вероятностная мера μ_α с характеристическим функционалом

$$\Psi_{\mu_\alpha}(y) = \exp \left\{ - \langle By, y \rangle^{\alpha/2} \right\}, \quad y \in \mathbb{H}, \quad (9)$$

где B , как и выше, линейный самосопряженный положительно определенный ядерный оператор, с собственными векторами $\{e_i\}_{i=1}^\infty$: $Be_i = \lambda_i^2 e_i$, $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i^2 < \infty$.

Теперь в качестве компонент вектора \mathbf{X}_n будем рассматривать величины $X_i = \langle \cdot, e_i \rangle$. Таким образом векторы \mathbf{X}_n относительно меры μ_α будут α -устойчивы с характеристическими функциями

$$\psi_{1\dots n}(y_1, \dots, y_n) = \exp \left[- \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 y_i^2 \right)^{\alpha/2} \right]. \quad (10)$$

Для схемы серий $\left\{ X_i^{(n)} \right\}_{i=1}^n$, $n = 1, 2, \dots$, порожденной такими устойчивыми случайными векторами, сформулированная выше теорема 2 была доказана ранее в [14], а еще ранее (см. [13]) для распределений Коши ($\alpha = 1$). Также в [14] показано, что в этом случае (когда \mathbf{X}_n — векторы Коши с характеристическими функциями (10), где $\alpha = 1$) случайные величины $X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)}$ зависимы (т. е. копула $C_{IT}^{\mathbf{X}_n}(u_1, \dots, u_n)$ не является копулой-произведением).

Кроме того, что случайные величины в предельной теореме являются зависимыми, было бы интересно выяснить, какова природа такой зависимости. Интересно, в частности, не являются ли указанные случайные величины ассоциированными, для которых достаточно хорошо известны результаты, связанные с центральной предельной теоремой (см., например [16; 17]).

Напомним определение ассоциированности, используемое в работе [17].

Определение 4. Пусть $\{X_t, t \in T\}$ — семейство действительных случайных величин, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ и параметрическом множестве T . Это семейство называется ассоциированным или положительно зависимым, если для любых конечных множеств $I, J \subset T$

$$\text{cov}(f(X_t, t \in I), g(X_t, t \in J)) \geq 0$$

для всех покоординатно неубывающих функций $f : \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых ковариация определена ($|I|$ обозначает число элементов конечного множества I).

Теорема 4. Если $\mathbf{X}_2 = (X_1, X_2)$ — случайный вектор Коши, заданный характеристической функцией

$$\psi_{12}(y_1, y_2) = \exp \left[- \left(\lambda_1^2 y_1^2 + \lambda_2^2 y_2^2 \right)^{1/2} \right], \quad (11)$$

тогда копула $C_{IT}^{\mathbf{X}_2}(u, v)$ не является ассоциированной.

4. Доказательства теорем

Прежде чем доказывать теорему 2, введем необходимые дополнительные обозначения и сформулируем вспомогательные результаты.

В дополнение к уже введенному семейству ортопроекторов $\{\pi_n\}$, следуя [8], будем рассматривать на \mathbb{H} еще одно семейство ортопроекторов $\{\pi_{ni}\}$: для $h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, f_k \rangle f_k$ определим

$$\pi_{ni}h := \sum_{k=1, k \neq i}^n \langle h, f_k \rangle f_k, \quad n = 1, 2, \dots, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Аналогично [8] введем обозначения для следующих квадратичных форм:

$$\begin{aligned} s_n^2 &:= s_n^2(h) = \frac{1}{n} \left\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} \pi_n h, \pi_n h \right\rangle, \\ s_{n,i}^2 &:= s_{n,i}^2(h) = \frac{1}{n-1} \left\langle (\pi_{n,i} B \pi_{n,i})^{-1} \pi_{n,i} h, \pi_{n,i} h \right\rangle. \\ s_{\infty} &:= s_{\infty}(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2(h), \quad \Gamma := \{h \in \mathbb{H} : 0 < s_{\infty}(h) < +\infty\}. \end{aligned}$$

Обозначим через μ_2^B гауссовскую меру на $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H})\}$ с ковариационным оператором B . Также введем (не отмечая особо зависимость от r) обозначения

$$\eta := \frac{1}{s_{\infty}}, \quad (12)$$

$$\zeta_{i,n} := \zeta_{i,n}(h) = \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle}{s_{\infty} [\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle]^{1/2}}, \quad i = 1..n, \quad (13)$$

$$A^{(n)} := \sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2 + ns_n^2/s_{\infty}^2}} - 1, \quad B_i^{(n)} := \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_{\infty}^2}} - 1, \quad (14)$$

$$U_i^{(n)} := \zeta_{i,n} \left(\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}} - 1 \right).$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты, полученные в [8]:

1⁰.

$$ns_n^2 - (n-1)s_{n,i}^2 = \zeta_{i,n}^2 s_{\infty}^2. \quad (15)$$

2⁰. μ -п. н.

$$s_n^2 \rightarrow s_{\infty}^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

3⁰. $\forall s > 0$ $\mu_2^{s^2 B}$ -п. н.

$$s_n^2 \rightarrow s^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Для доказательства теоремы сформулируем следующий вспомогательный результат

Лемма 2. Если ортонормированный базис $\{f_k\}$ обладает свойством

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}} = \sigma^2, \quad (18)$$

то имеют место следующие результаты:

$$1^0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2). \quad (19)$$

$$2^0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} A^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0. \quad (20)$$

$$3^0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} B_i^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0. \quad (21)$$

$$4^0 \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \left[B_i^{(n)} - A^{(n)} \right] \xrightarrow{\mu} 0. \quad (22)$$

Доказательство. **1⁰**. Сначала покажем, что относительно меры μ случайный вектор $\zeta_{\cdot,n} = (\zeta_{1,n}, \dots, \zeta_{n,n})$ гауссовский, его компоненты, вообще говоря, зависимы и являются (0,1)-гауссовскими случайными величинами, а матрица ковариаций (корреляций) этого вектора состоит из элементов

$$\text{cov}(\zeta_{i,n}, \zeta_{j,n}) = \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}}. \quad (23)$$

Действительно, введем случайные величины

$$\tilde{\zeta}_{i,n} := \zeta_{i,n} s_\infty = \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle}{[\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle]^{1/2}}, \quad i = 1..n$$

и рассмотрим функцию распределения случайного вектора $\zeta_{\cdot,n}$ относительно меры μ

$$\mu \{ \zeta_{1,n} \leq u_1, \dots, \zeta_{n,n} \leq u_n \} = \int_0^\infty \mu_2^{s^2 B} \{ \zeta_{1,n} \leq u_1, \dots, \zeta_{n,n} \leq u_n \} 2s g_r(s^2) ds.$$

Далее ввиду (17) выполняется $\mu_2^{s^2 B} \{ s_\infty = s \} = 1$, тогда

$$\begin{aligned} & \mu \{ \zeta_{1,n} \leq u_1, \dots, \zeta_{n,n} \leq u_n \} = \\ & = \int_0^\infty \mu_2^{s^2 B} \{ \tilde{\zeta}_{1,n}/s \leq u_1, \dots, \tilde{\zeta}_{n,n}/s \leq u_n \} 2s g_r(s^2) ds. \end{aligned}$$

Заметим, что $\tilde{\zeta}_{i,n}$ — линейные непрерывные функционалы на \mathbb{H} и

$$\mu_2^{s^2 B} \{ \tilde{\zeta}_{1,n}/s \leq u_1, \dots, \tilde{\zeta}_{n,n}/s \leq u_n \} = \mu_2^B \{ \tilde{\zeta}_{1,n} \leq u_1, \dots, \tilde{\zeta}_{n,n} \leq u_n \},$$

так как равны соответствующие характеристические функции:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ - \left\langle s^2 B \sum_{i=1}^n y_i \tilde{\zeta}_{i,n}/s, \sum_{j=1}^n y_j \tilde{\zeta}_{j,n}/s \right\rangle \right\} = \\ & = \exp \left\{ - \left\langle B \sum_{i=1}^n y_i \tilde{\zeta}_{i,n}, \sum_{j=1}^n y_j \tilde{\zeta}_{j,n} \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mu \{ \zeta_{1,n} \leq u_1, \dots, \zeta_{n,n} \leq u_n \} = \mu_2^B \{ \tilde{\zeta}_{1,n} \leq u_1, \dots, \tilde{\zeta}_{n,n} \leq u_n \}.$$

Значит, распределение случайного вектора $\zeta_{\cdot,n}$ относительно меры μ совпадает с распределением вектора $\tilde{\zeta}_{\cdot,n}$ относительно меры μ_2^B . Поскольку вектор $\tilde{\zeta}_{\cdot,n}$ относительно меры μ_2^B гауссовский с нулевым вектором средних (это следует из того, что его компоненты — линейные непрерывные функционалы на \mathbb{H}), то таковым является и вектор $\zeta_{\cdot,n}$ относительно меры μ . Кроме того,

$$\text{cov}(\zeta_{i,n}, \zeta_{j,n}) = \text{cov}_2(\tilde{\zeta}_{i,n}, \tilde{\zeta}_{j,n}). \quad (24)$$

Как известно,

$$\begin{aligned} \text{cov}_2(\tilde{\zeta}_{i,n}, \tilde{\zeta}_{j,n}) &= \langle B\tilde{\zeta}_{i,n}, \tilde{\zeta}_{j,n} \rangle = \\ &= \frac{\langle B(\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j \rangle}{[\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим числитель и установим тождество

$$\langle B(\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j \rangle = \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle. \quad (26)$$

Для этого обозначим

$$h := (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i \in \mathbb{H}_n, \quad g := (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j \in \mathbb{H}_n$$

и проведем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} B\pi_n g &= Bg = \sum_{\bar{j}=1}^{\infty} \lambda_{\bar{j}}^2 \langle g, e_{\bar{j}} \rangle e_{\bar{j}} = \sum_{\bar{j}=1}^{\infty} \lambda_{\bar{j}}^2 \left[\sum_{\bar{i}=1}^n \langle g, f_{\bar{i}} \rangle \langle f_{\bar{i}}, e_{\bar{j}} \rangle \right] e_{\bar{j}}, \\ \pi_n B \pi_n g &= \sum_{\bar{k}=1}^n \sum_{\bar{i}=1}^n \langle g, f_{\bar{i}} \rangle \left[\sum_{\bar{j}=1}^{\infty} \lambda_{\bar{j}}^2 \langle f_{\bar{i}}, e_{\bar{j}} \rangle \langle e_{\bar{j}}, f_{\bar{k}} \rangle \right] f_{\bar{k}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\pi_n B \pi_n g = f_j$, то

$$\sum_{\bar{i}=1}^n \langle g, f_{\bar{i}} \rangle a_{\bar{i}, \bar{k}} = \delta_{\bar{k}, j},$$

где

$$a_{\bar{i}, \bar{k}} = \sum_{\bar{j}=1}^{\infty} \lambda_{\bar{j}}^2 \langle f_{\bar{i}}, e_{\bar{j}} \rangle \langle e_{\bar{j}}, f_{\bar{k}} \rangle.$$

Теперь вычислим

$$\begin{aligned} \langle Bh, g \rangle &= \left\langle \sum_{\bar{j}=1}^{\infty} \lambda_{\bar{j}}^2 \left[\sum_{\bar{i}=1}^n \langle h, f_{\bar{i}} \rangle \langle f_{\bar{i}}, e_{\bar{j}} \rangle \right] e_{\bar{j}}, \sum_{m=1}^n \langle g, f_m \rangle f_m \right\rangle = \\ &= \sum_{\bar{i}=1}^n \sum_{m=1}^n \langle h, f_{\bar{i}} \rangle \langle g, f_m \rangle a_{\bar{i}, m} = \sum_{\bar{i}=1}^n \langle h, f_{\bar{i}} \rangle \left[\sum_{m=1}^n \langle g, f_m \rangle a_{\bar{i}, m} \right] = \\ &= \sum_{\bar{i}=1}^n \langle h, f_{\bar{i}} \rangle \delta_{\bar{i}, j} = \langle h, f_j \rangle, \end{aligned}$$

что и является тождеством (26). Из (24)–(26) следует (23).

Очевидно, каждая сумма

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n}$$

также гауссовская с нулевым средним. Вычислим дисперсию S_n .

$$DS_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}}.$$

Тогда из (18) следует, что последовательность характеристических функций случайных величин S_n сходится к х.ф. распределения $N(0, \sigma^2)$, что и влечет сходимость (19).

2⁰. В силу (16) μ -п. н. $A^{(n)} \rightarrow 0 \Rightarrow A^{(n)} \xrightarrow{\mu} 0$. Выберем произвольные $\varepsilon > 0$, $C > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu \left\{ \left| S_n A^{(n)} \right| > \varepsilon \right\} &= \mu \left\{ \left| S_n A^{(n)} \right| > \varepsilon, |S_n| > C \right\} + \\ &+ \mu \left\{ \left| S_n A^{(n)} \right| > \varepsilon, |S_n| \leq C \right\} \leq \mu \{ |S_n| > C \} + \mu \left\{ \left| A^{(n)} \right| > \varepsilon / C \right\}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом сходимости (19) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ \left| S_n A^{(n)} \right| > \varepsilon \right\} \leq 2\Phi(-C),$$

Переходя к пределу по $C \rightarrow +\infty$, получаем сходимость (20).

3⁰. Используя (15), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} B_i^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1 \right) = \\ &= \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1 \right) + \\ &+ \left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n}. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу (16), μ -п. н.

$$\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Тогда аналогично сходимости (20) доказывается сходимость

$$\left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \xrightarrow{\mu} 0. \quad (29)$$

Рассмотрим случайную последовательность

$$\bar{S}_n := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1 \right).$$

Следующее обозначение нам понадобится при доказательстве п.4⁰:

$$\bar{S}_{n+} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n |\zeta_{i,n}| \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}} - 1 \right).$$

Используя неравенство Бернулли $1 + \alpha \geq \sqrt{1 + 2\alpha}$, получим

$$\begin{aligned} |\bar{S}_n| \leq \bar{S}_{n+} &\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{|\zeta_{i,n}|^3}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}(n-1)} \sum_{i=1}^n \frac{|\zeta_{i,n}|^3}{s_{n,i}^2/s_\infty^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} s_{n,i}^2/s_\infty^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}(n-1)} \sum_{i=1}^n |\zeta_{i,n}|^3. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим первый множитель. Ввиду (15)

$$\frac{n-1}{n} \min_{1 \leq i \leq n} s_{n,i}^2/s_\infty^2 = s_n^2/s_\infty^2 - \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2. \quad (31)$$

Поскольку

$$\mu \{ \zeta_{i,n}^2 \leq u \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/2} dt,$$

то

$$\begin{aligned} \mu \left\{ \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \zeta_{i,n}^2 > \varepsilon \right\} &\leq \sum_{i=1}^n \mu \{ \zeta_{i,n}^2 > \varepsilon n \} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/2} dt \leq \\ &\leq \frac{n}{\sqrt{2\pi \varepsilon n}} \int_{\varepsilon n}^{\infty} e^{-t/2} dt = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi \varepsilon}} e^{-\varepsilon n/2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (32)$$

В силу (16) из (31) и (32) следует, что

$$\frac{n-1}{n} \min_{1 \leq i \leq n} s_{n,i}^2 / s_{\infty}^2 \xrightarrow{\mu} 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

тогда

$$\frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} s_{n,i}^2 / s_{\infty}^2} \xrightarrow{\mu} 1, \quad n \rightarrow \infty. \quad (33)$$

Наконец

$$\mu \left\{ \frac{1}{2\sqrt{n}(n-1)} \sum_{i=1}^n |\zeta_{i,n}|^3 > \varepsilon \right\} \leq \frac{nE|\zeta_{1,n}|^3}{2\varepsilon\sqrt{n}(n-1)} = \frac{n\sqrt{2}}{\varepsilon\sqrt{\pi n}(n-1)} \rightarrow 0 \quad (34)$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, из (30), (33) и (34) следует, что

$$|\bar{S}_n| \xrightarrow{\mu} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (35)$$

Теперь из (27)–(35) вытекает (21).

4⁰.

$$\begin{aligned} R_n &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \left[B_i^{(n)} - A^{(n)} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \left(\sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_{\infty}^2}} - \sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2 + ns_n^2/s_{\infty}^2}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_{\infty}^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \left(\sqrt{1 + \frac{\zeta_{i,n}^2}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_{\infty}^2}} - 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2(n+r-1)}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \right]. \\ |R_n| &\leq \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + ns_n^2/s_{\infty}^2}} \times \\ &\times \left[\bar{S}_{n+} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2(n+r-1)}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Заметим, что из доказательства п.3⁰ следует

$$\bar{S}_{n+} \xrightarrow{\mu} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Далее, в силу неравенства Чебышева, $\forall \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2(n+r-1)}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} > \varepsilon \right\} \leq \\ & \leq \frac{\sqrt{n}}{2\varepsilon \sqrt{2\pi}(n+r-1) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2(n+r-1)}} \right)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (38)$$

Наконец, из (28), (36), (37) и (38) следует (22). \square

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности можно считать, что вероятностное пространство $\{\Omega_0, \mathfrak{B}_0, \mathbb{P}_0\}$ есть $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu\}$, и

$$X_i^{(n)} = \Phi^{-1} (X_{i,n}^*). \quad (39)$$

Разобьем сумму в формуле (7) на два слагаемых

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \left[\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}} - 1 \right] + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n}.$$

Учитывая п. 1⁰ леммы 2, для доказательства справедливости утверждения теоремы достаточно (см. [18, с. 111]) показать сходимость по вероятности

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \left[\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}} - 1 \right] \xrightarrow{\mu} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (40)$$

По аналогии с работой [19] можно показать, что в случае рассматриваемой меры Стьюдента, условные функция распределения, порожденные проекциями этой меры на подпространства $\text{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, имеют вид

$$\begin{aligned} & F_{i|1\dots i\dots n}(X_i|X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_n) = \\ & = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} B \left(\frac{(n-1)s_{n,i}^2 + r}{ns_n^2 + r}; \frac{n+r-1}{2}, \frac{1}{2} \right), & \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle \geq 0, \\ \frac{1}{2} B \left(\frac{(n-1)s_{n,i}^2 + r}{ns_n^2 + r}; \frac{n+r-1}{2}, \frac{1}{2} \right), & \langle (\pi_n B \pi_n)^{-1} f_i, h \rangle < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

где $B(\cdot; \alpha, \beta)$ — бета-распределение.

Воспользуемся известной оценкой (см. [19]) для бета-распределений

$$1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1}{u}} \right) \leq \frac{1}{2} B \left(\frac{nu}{1+nu}; \frac{n}{2}, \frac{1}{2} \right) \leq 1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{n - \frac{1}{2}}{1+nu}} \right). \quad (42)$$

Из формул (39), (41) и (42) с учетом обозначений (12) и (13) получим

$$\sqrt{\frac{n+r-3/2}{r\eta^2 + ns_n^2/s_\infty^2}} \leq \frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}} \leq \sqrt{\frac{n+r-1}{r\eta^2 + (n-1)s_{n,i}^2/s_\infty^2}}. \quad (43)$$

Используя обозначения (14), и оценки (43) для любого $i = 1, 2, \dots$ нетрудно получить неравенства

$$\begin{aligned} & A^{(n)} \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \leq U_i^{(n)} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \leq B_i^{(n)} \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} \\ & B_i^{(n)} \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} < 0\}} \leq U_i^{(n)} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} < 0\}} \leq A^{(n)} \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} < 0\}}, \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства и суммируя по i , будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} B_i^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} [A^{(n)} - B_i^{(n)}] &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n U_i^{(n)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} A^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \mathbf{1}_{\{\zeta_{i,n} \geq 0\}} [B_i^{(n)} - A^{(n)}]. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в этом неравенстве в силу п. 2⁰, 3⁰, 4⁰ леммы 2, получаем (40). □

Следствие 1 (из теоремы 2). Пусть a_n — последовательность положительных чисел такая, что $a_n \rightarrow +\infty$. Если для некоторого распределения V

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \xrightarrow{d} V, \quad (44)$$

то

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} \xrightarrow{d} V. \quad (45)$$

Доказательство. Очевидно, п. 2⁰, 3⁰ и 4⁰ леммы 2 для сумм, нормированных числами a_n , выполняются, и, следовательно, повторяя доказательство теоремы, можно показать выполнение сходимости

$$\frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \left[\frac{X_i^{(n)}}{\zeta_{i,n}} - 1 \right] \xrightarrow{\mu} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Доказательство теоремы 3. В обозначениях леммы 2 соотношение (8) означает, что

$$D(S_n/\sqrt{n}) \rightarrow \sigma^2,$$

то есть

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_{i,n} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

что вместе со следствием 1 и доказывает теорему. □

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 4, введем нужные обозначения и сделаем несколько замечаний.

Без ограничения общности можно считать, что вектор $\mathbf{X}_2 = (X_1, X_2)$ задан на вероятностном пространстве $\{\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}), \mu_1\}$, где μ_1 — мера Коши, заданная функционалом (9), $X_i = \langle \cdot, e_i \rangle$, $i = 1, 2$.

Следуя работе [19], введем функционал $s_\infty^2(x)$ и множество сходимости Γ :

$$s_\infty^2(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, e_i \rangle^2}{\lambda_i^2},$$

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{H} : 0 < s_\infty^2(x) < \infty\}.$$

В работе [19] установлено, что $\mu_1\{\Gamma\} = 1$. Будем предполагать, что все вводимые далее случайные величины заданными на множестве Γ и для краткости опускать аргумент x .

Обозначим

$$\xi_i := \frac{\langle x, e_i \rangle}{\lambda_i s_\infty(x)}, \quad \eta := \frac{1}{s_\infty(x)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (46)$$

Как показано в работах [9; 19], введенные случайные величины обладают следующими свойствами:

1) относительно меры μ_1 система случайных величин

$$\eta^2, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots, \quad (47)$$

независима;

2) случайные величины ξ_i имеют стандартное гауссовское распределение

$$\mu_1\{\xi_i \leq u\} = \Phi(u), \quad \forall i \in \mathbb{N}; \quad (48)$$

3) плотность распределения случайной величины $s_\infty(x)$ имеет вид

$$g(u) := \frac{d}{du} \mu_1\{s_\infty(x) \leq u\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^{-2} e^{-1/2u^2}.$$

Заметим также, что из последнего соотношения следует, что случайная величина $\eta^2 = s_\infty^{-2}(x)$ является квадратом (0,1)-гауссовской случайной величины с плотностью распределения

$$p_{\eta^2}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} e^{-u/2}, \quad u > 0. \quad (49)$$

Доказательство теоремы 4. Воспользуемся известным представлением условных функций распределения n -мерного распределения Коши (см. [19]) с помощью бета-распределения $B(\cdot; \cdot, \cdot)$ (см. [20, с. 47]). Именно условные функции распределения каждой компоненты вектора \mathbf{X}_2 относительно другой имеют вид

$$F_{1|2}(x_1|x_2) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_1^2/\lambda_1^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_1 \geq 0, \\ \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_1^2/\lambda_1^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_1 < 0. \end{cases} \quad (50)$$

$$F_{2|1}(x_2|x_1) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_2^2/\lambda_2^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_2 \geq 0, \\ \frac{1}{2}B\left(\frac{1+x_2^2/\lambda_2^2}{1+x_1^2/\lambda_1^2+x_2^2/\lambda_2^2}; 1, \frac{1}{2}\right), & x_2 < 0. \end{cases} \quad (51)$$

Из определения функции B -распределения (см. [20, с. 47]) легко видеть, что

$$B\left(x; 1, \frac{1}{2}\right) = 1 - \sqrt{1-x}. \quad (52)$$

Из (50) и (51), с учетом (52) и обозначений (46), получим

$$F_{i|3-i}(X_i|X_{3-i}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\frac{1}{s_\infty^2} + \xi_1^2 + \xi_2^2}} \right), \quad i = 1, 2.$$

В силу (47), (48) и (49) существует случайная величина ξ_3 такая, что $\xi_3^2 = 1/s_\infty^2(x)$, и (ξ_1, ξ_2, ξ_3) гауссовский вектор с независимыми (0,1) компонентами. Таким образом

$$X_{i,2}^* = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} \right], \quad i = 1, 2.$$

Теперь покажем, что случайные величины $X_{i,2}^*$, $i = 1, 2$ не являются ассоциированными. Рассмотрим неубывающие функции

$$f(x) = g(x) = (2x - 1) \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(2x - 1),$$

$$\tilde{g}(x) = (2x - 1) \mathbf{1}_{(-\infty, 0]}(2x - 1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\text{cov} \left(f \left(X_{1,2}^{(1)} \right), g \left(X_{2,2}^{(1)} \right) \right) = \frac{1}{6\pi} - \frac{1}{64} > 0,$$

$$\text{cov} \left(f \left(X_{1,2}^{(1)} \right), \tilde{g} \left(X_{2,2}^{(1)} \right) \right) = \frac{1}{64} - \frac{1}{6\pi} < 0.$$

□

Пример 1. Рассмотрим пример, приведенный в работе [8].

В пространстве \mathbb{H} с о.н.б. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ введем бесконечное семейство конечномерных подпространств:

$$\mathbb{H}_{(2^k-1, 2^{k+1}-2)} = \text{span}\{f_{2^k-1}, \dots, f_{2^{k+1}-2}\}, k = 1, 2, \dots$$

В каждом из этих подпространств рассмотрим конечномерные операторы

$$B_0^{(k)} : \mathbb{H}_{(2^k-1, 2^{k+1}-2)} \rightarrow \mathbb{H}_{(2^k-1, 2^{k+1}-2)},$$

задаваемые в базисе $\{f_n\}$ ($n = 2^k - 1, \dots, 2^{k+1} - 2$) трехдиагональными симметрическими $(2^k \times 2^k)$ -матрицами:

$$B_0^{(k)} = \frac{1}{2^{2k}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зададим оператор $B_0 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ в базисе $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ с помощью блочно-диагональной бесконечной симметрической матрицы

$$B_0 = \text{diag}[B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, \dots, B_0^{(k)}, \dots].$$

Оператор B_0 ограничен, положительно определен и является ядерным. Далее будем считать, что $n = 2^{k+1} - 2$, тогда

$$\pi_n B_0 \pi_n = \text{diag}[B_0^{(1)}, B_0^{(2)}, \dots, B_0^{(k)}];$$

$$(\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} = \text{diag}[(B_0^{(1)})^{-1}, (B_0^{(2)})^{-1}, \dots, (B_0^{(k)})^{-1}];$$

$$(B_0^{(l)})^{-1} = 2^{2l} \left[\min(r, s) - \frac{rs}{2^l + 1} \right], \quad r, s = 1, \dots, 2^l, \quad l = 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_j \rangle}{[\langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_i, f_i \rangle \langle (\pi_n B_0 \pi_n)^{-1} f_j, f_j \rangle]^{1/2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{D}_k, \quad (53)$$

где

$$\widehat{D}_k := \frac{1}{4(2^k - 1)^2} \sum_{l=1}^k \left(\sum_{r=1}^{2^l} \sum_{s=1}^{2^l} \left[\min \left\{ \frac{r}{2^l + 1}, \frac{s}{2^l + 1} \right\} - \frac{r}{2^l + 1} \cdot \frac{s}{2^l + 1} \right] \right) \times$$

$$\times \left[\frac{r}{2^l + 1} \left(1 - \frac{r}{2^l + 1} \right) \frac{s}{2^l + 1} \left(1 - \frac{s}{2^l + 1} \right) \right]^{-1/2}.$$

Обозначим двойную сумму в круглых скобках через c_l . Рассматривая, аналогично [8], двойной интеграл от квадрата корреляционной функции броуновского моста как предел интегральных сумм, получим при $l \rightarrow \infty$

$$\frac{c_l}{(2^l + 1)^2} \rightarrow I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\min\{x, y\} - xy}{\sqrt{x(1-x)y(1-y)}} dx dy = \frac{1}{4}(\pi^2 - 3).$$

Тогда для $l > L_\varepsilon$

$$(2^l + 1)^2 I(1 - \varepsilon) < c_l < (2^l + 1)^2 I(1 + \varepsilon),$$

откуда следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{D}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I}{4(2^k - 1)^2} \sum_{l=1}^k (2^l + 1)^2.$$

Вычислим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{D}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{I}{4(2^k - 1)^2} \left[\frac{4}{3} (2^{2k} - 1) + 4(2^k - 1) + k \right] = I/3 = \frac{1}{12}(\pi^2 - 3).$$

Таким образом в силу теоремы 3 в случае, когда мера Стьюдента задана оператором B_0 , выполняется

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(n)} \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2),$$

где $\sigma^2 = (\pi^2 - 3)/12$.

Литература

- [1] Sklar A. Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges // Publ. Inst. Statist. Univ. Paris. 1959. V. 8. P. 229–231.
- [2] Nelsen R. An Introduction to Copulas. Second Edition. New York: Springer, 2006.
- [3] Fisher N.I. Copulas / S. Kotz, C.B. Read, D.L. Banks (eds) // Encyclopedia of Statistical Sciences, Update. V. 1. Wiley; New York, 1997. P. 159–163.
- [4] Schweizer B., Wolf E.F. On nonparametric measures of dependence fo random variables // Ann. Statist. 1981. № 9. P. 879–885.
- [5] Darsow W.F., Nguyen B., Olsen E.T. Copulas and Markov processes // Illinois J. Math. 1992. № 36. P. 600–642.
- [6] Rosenblatt M. Remarks on multivariate transformation // Ann. Math. Stat. 1952. V. 23. P. 470–472.
- [7] Шатских С.Я. Об одном варианте преобразования независимости // Теория вероятн. и ее примен. 1992. Т. 37. Вып. 4. С. 815–816.
- [8] Шатских С.Я. Усиленный закон больших чисел для схемы серий условных распределений эллиптически контурированных мер // Теория вероятн. и ее примен. 2005. Т. 50. Вып. 2. С. 291–312.
- [9] Шатских С.Я. Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве: асимптотические свойства условных распределений // Изв.РАЕН. Серия МММИУ. 1999. Т. 3. № 3. С. 43–81.

- [10] Горячкин О.В. Методы слепой обработки сигналов и их приложения в системах радиотехники и связи. М.: Радио и связь, 2003. 229 с.
- [11] Горячкин О.В., Шатских С.Я. Метод анализа независимых компонент на основе преобразования независимости // Доклады РАН. 2004. Т. 398. № 4.
- [12] Кнутова Е.М., Шатских С.Я. Асимптотические свойства условных квантилей для одного класса симметрических распределений // Теория вероятн. и ее примен. 2006. Т. 51. Вып. 2. С. 374–382.
- [13] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями σ -аддитивной меры Коши // Вестник СамГУ. 2005. № 6(40). С. 51–59.
- [14] Савинов Е.А., Шатских С.Я. Центральная предельная теорема для случайных величин, порожденных условными распределениями проекций устойчивой меры на гильбертовом пространстве // Вестник СамГУ. 2007. № 9/1. С. 121–127.
- [15] Савинов Е.А. Асимптотические свойства конечномерных условных распределений сферически-симметричных мер на локально выпуклом пространстве // Известия вузов. Сер. Математика. 2005. № 3. С. 71–78.
- [16] Dedecker J., Doukhan P. et al. Weak Dependence: With Examples and Applications// Lecture Notes in Statistics. 2007. № 190. 318 p.
- [17] Булинский А.В., Вронский М.А. Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2. № 4. С. 999–1018.
- [18] Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1986. 328 с.
- [19] Shatskih S.Ya. Asymptotic properties of conditional quantiles of the Cauchy distribution on Hilbert space // Journal of Math. Sciences. 1999. V. 93. № 4. P. 574–581.
- [20] Вероятность и математическая статистика: энциклопедия / гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. 910 с.

Поступила в редакцию 22/X/2011;
в окончательном варианте — 22/X/2011.

**LIMIT THEOREM FOR INDEPENDENCE
TRANSFORMATIONS COPULAS OF STUDENT'S
t-DISTRIBUTION**

© 2011 E.A. Savinov²

In the paper we study copulas obtained as a result of independence transformation of random vectors with Student's t-distribution. For the triangular scheme of dependent r.v. connected by such IT-copulas central limit theorem is proved. In addition, it is shown that two-dimensional IT-copula of Cauchy distribution is not associated.

Key words: copulas, independence transformations, limit theorems.

Paper received 22/X/2011.

Paper accepted 22/X/2011.

²Savinov Evgeniy Anatolievich (henrylee@dxdy.ru), the Dept. of Probability Theory and Mathematical Statistics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.