УДК 539.3+517.44

# ВЕКТОРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© 2011 А.А. Малышев, О.Э. Яремко[1]

В работе описан метод векторного преобразования Фурье с разрывными коэффициентами. Техника применения указанного метода к решению задач математической физики в случае неоднородных сред подробно проиллюстрирована на примере динамической задачи теории упругости.

**Ключевые слова:** преобразование Фурье, теория упругости, векторная задача Штурма – Лиувилля.

## 1. Предварительные сведения

В предлагаемой работе используется метод векторных интегральных преобразований Фурье. Данный метод широко используется в различных отраслях науки: математическая физика, комбинаторика, теория сигналов и многих других. При использовании метода векторных интегральных преобразований Фурье, дифференциальные уравнения и граничные условия задачи переводятся в уравнения и условия для трансформант, после нахождения которых искомое решение дается формулой обращения для рассматриваемого интегрального преобразования. Метод векторных интегральных преобразований Фурье эквивалентен методу собственных вектор-функций, предложенному А.Ф. Улитко [1], но вместе с тем он может успешно применяться к решению задач теории упругости в кусочно-однородных средах. Более детальное изучение теории интегральных преобразований Фурье с кусочно-постоянными коэффициентами в скалярном случае было осуществлено Я.С. Уфляндом [2; 3], Л.С. Найда [4], В.С. Проценко [5; 6], М.П. Ленюком [7–9]. Векторный вариант метода разработан О.Э. Яремко [10; 11].

Построенный метод используется для решения динамических задач теории упругости. Цель теории упругости — составление и решение уравнений, позволяющих определить деформацию данного тела при различных нагрузках и возникающих при этом напряжений. Подобными являются задачи об определении деформаций и напряжений в деталях различных конструкций. К динамическим задачам теории упругости относятся вопросы, касающиеся изучения распространения колебаний в упругих средах. Искомые величины являются функциями координат и времени. К этому типу относятся задачи о колебаниях конструкций и сооружений, а также задачи о распространении упругих волн. Наиболее актуальными

[1]Малышев Алексей Александрович (dovmaa@mail.ru), Яремко Олег Эммануилович (yaremki@yandex.ru), кафедра математического анализа Пензенского государственного педагогического университета, 440026, Российская Федерация, г. Пенза, ул. Лермонтова, 37.

являются динамические задачи теории упругости для неоднородных тел. В этом случае коэффициенты Ламе являются функциями координат, определяющими поле упругих свойств тела. Метод векторных интегральных преобразований Фурье относится к аналитическим методам решения задач теории упругости. Обширный список работ по использованию интегральных преобразований в задачах теории упругости приведен в монографии Я.С. Уфлянда [2].

## 2. Векторные преобразования Фурье с разрывными коэффициентами

Рассмотрим векторную задачу Штурма – Лиувилля [12] о конструкции ограниченного на множестве $I_n^+$ нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными матричными коэффициентами

$$\left(A_m^2\frac{d^2}{dx^2}+\lambda^2\mathrm{E}+\Gamma_m^2\right)y_m=0,\ \ q_m^2=\lambda^2\mathrm{E}+\Gamma_m^2,\ \ m=\overline{1,n+1} \tag{1}$$

по краевым условиям

$$\left(\left(\alpha_{11}^0+\lambda^2\delta_{11}^0\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{11}^0+\lambda^2\gamma_{11}^0\right)\right)y_1\Big|_{x=l_0}=0,\quad \|y_{n+1}\|\ |_{x=\infty}<\infty \tag{2}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов

$$\left(\left(\alpha_{j1}^k+\lambda^2\delta_{j1}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{j1}^k+\lambda^2\gamma_{j1}^k\right)\right)y_k=\left(\left(\alpha_{j2}^k+\lambda^2\delta_{j2}^k\right)\frac{d}{dx}+\left(\beta_{j2}^k+\lambda^2\gamma_{j2}^k\right)\right)y_{k+1},$$
$$x=l_k,\ \ k=\overline{1,n},\ \ j=1,2. \tag{3}$$

где

$$y_m\left(x,\lambda\right)=\begin{pmatrix} y_{1m}\left(x,\lambda\right)\\ \vdots\\ y_{rm}\left(x,\lambda\right)\end{pmatrix},\|y_m\|=\sqrt{y_{1m}^2+...+y_{rm}^2},m=\overline{1,n+1}.$$

Пусть при некотором $\lambda$ рассматриваемая краевая задача имеет нетривиальное решение

$$y\left(x,\lambda\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\theta\left(l_k-x\right)y_k\left(x,\lambda\right)+\theta\left(x-l_n\right)y_{n+1}\left(x,\lambda\right).$$

В этом случае число $\lambda$ называется собственным значением, а соответствующее решение $y\left(x,\lambda\right)$ — собственной вектор-функцией. Здесь

$\alpha_{11}^0,\ \beta_{11}^0,\ \gamma_{11}^0,\ \delta_{11}^0,\ \alpha_{j1}^k,\ \beta_{j1}^k,\ \gamma_{j1}^k,\ \delta_{j1}^k,\ \alpha_{j2}^k,\ \beta_{j2}^k,\ \gamma_{j2}^k,\ \delta_{j2}^k,\ A_j$ — $(j=1,2;m=1,n+1;k=1,n)$ матрицы размера $r\times r$;

для матриц

$$M_{mk}\equiv\begin{pmatrix}\beta_{1m}^k+\lambda^2\gamma_{1m}^k & \alpha_{1m}^k+\lambda^2\delta_{1m}^k\\ \beta_{2m}^k+\lambda^2\gamma_{2m}^k & \alpha_{2m}^k+\lambda^2\delta_{2m}^k\end{pmatrix},\ \ m=1,2;\ \ k=\overline{1,n}$$

потребуем их невырожденность, т. е.

$$\det\ \ M_{mk}\neq 0,\ \ \lambda\in\left[0,\infty\right).$$

Матрицы $A_m^2$ и $\Gamma_m^2, m = \overline{1, n+1}$ — положительно-определенные [13]. Обозначим $\Phi_{n+1}(x) = e^{q_{n+1}xi}$; $\Psi_{n+1}(x) = e^{-q_{n+1}xi}$; $q_{n+1}^2 = A_{n+1}^{-2}\left(\lambda^2 \mathrm{E} + \Gamma^2\right)$. Индукционными соотношениями определим остальные $n$ пар матричнозначных функций $(\Phi_k, \Psi_k)$, $k = 1, n$ :

$$\begin{aligned}&\left[\left(\alpha_{j1}^k + \lambda^2\delta_{j1}^k\right)\tfrac{d}{dx} + \left(\beta_{j1}^k + \lambda^2\gamma_{j1}^k\right)\right](\Phi_k, \Psi_k) = \\ &= \left[\left(\alpha_{j2}^k + \lambda^2\delta_{j2}^k\right)\tfrac{d}{dx} + \left(\beta_{j2}^k + \lambda^2\gamma_{j2}^k\right)\right](\Phi_{k+1}, \Psi_{k+1}), \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, 2}.\end{aligned}$$

Введем также обозначения

$$\overset{0}{\underset{1}{\Phi}}(\lambda) = \left[\left(\alpha_{11}^0 + \lambda^2\delta_{11}^0\right)\frac{d}{dx} + \left(\beta_{11}^0 + \lambda^2\gamma_{11}^0\right)\right]\Phi_1(x, \lambda)\Big|_{x=l_0},$$

$$\overset{0}{\underset{1}{\Psi}}(\lambda) = \left[\left(\alpha_{11}^0 + \lambda^2\delta_{11}^0\right)\frac{d}{dx} + \left(\beta_{11}^0 + \lambda^2\gamma_{11}^0\right)\right]\Psi_1(x, \lambda)\Big|_{x=l_0},$$

$$\Omega_k = \begin{pmatrix} \Phi_k & \Psi_k \\ \Phi_k^{/} & \Psi_k^{/} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n+1}.$$

**Теорема 1.** Спектр задачи (1)–(3) непрерывен и заполняет всю полуось $(0, \infty)$. Задача Штурма – Лиувилля $r$ раз вырождена, т. е. каждому собственному значению $\lambda$ соответствует ровно $r$ линейно независимых собственных вектор-функций, в качестве последних можно взять $r$ столбцов матричнозначной функции

$$u(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \theta(x - l_{k-1})\,\theta(l_k - x)\,u_k(x, \lambda) + \theta(x - l_n)\,u_{n+1}(x, \lambda),$$

$$u_j(x, \lambda) = \Phi_j(x, \lambda)\overset{0}{\Phi}{}_1^{-1}(\lambda) - \Psi_j(x, \lambda)\overset{0}{\Psi}{}_1^{-1}(\lambda).$$

т. е.

$$y^m(x, \lambda) = \begin{pmatrix} u_{1m}(x, \lambda) \\ \vdots \\ u_{rm}(x, \lambda) \end{pmatrix}.$$

Двойственная задача Штурма – Лиувилля состоит в нахождении нетривиального решения сепаратной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными матричными коэффициентами

$$\left(A_m^2\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2\mathrm{E} + \Gamma_m^2\right)y_m = 0, \; q_m^2 = \lambda^2\mathrm{E} + \Gamma_m^2, \; m = \overline{1, n+1} \tag{4}$$

по краевым условиям

$$\left(\frac{d}{dx}y_1^*\left(\beta_{11}^0 + \lambda^2\gamma_{11}^0\right)^{-1} + y_1^*\left(\alpha_{11}^0 + \lambda^2\delta_{11}^0\right)^{-1}\right)\Big|_{x=l_0} = 0, \qquad \left\|y_{n+1}^*\right\| < \infty, \tag{5}$$

и условиям контакта в точках сопряжения интервалов:

$$\left(-\frac{d}{dx}y_k^*, y_k^*\right)\begin{pmatrix} \beta_{11}^k + \lambda^2\gamma_{11}^k & \alpha_{11}^k + \lambda^2\delta_{11}^k \\ \beta_{21}^k + \lambda^2\gamma_{21}^k & \alpha_{21}^k + \lambda^2\delta_{21}^k \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left(-\frac{d}{dx}y_{k+1}^*, y_{k+1}^*\right)\begin{pmatrix} \beta_{12}^k + \lambda^2\gamma_{12}^k & \alpha_{12}^k + \lambda^2\delta_{12}^k \\ \beta_{22}^k + \lambda^2\gamma_{22}^k & \alpha_{22}^k + \lambda^2\delta_{22}^k \end{pmatrix}^{-1}, \qquad x = l_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Решение рассматриваемой краевой задачи будем записывать в виде

$$y^*(\xi, \lambda) = \sum_{k=2}^{n} \theta(\xi - l_{k-1})\,\theta(l_k - \xi)\,y_k^*(\xi, \lambda) + \theta(l_1 - \xi)\,y_1^*(\xi, \lambda) + \theta(\xi - l_n)\,y_{n+1}^*(\xi, \lambda),$$

$$y_m^*(\xi,\lambda)=\begin{pmatrix} y_{m1}^*(\xi,\lambda) & \cdots & y_{mr}^*(\xi,\lambda)\end{pmatrix},$$

$$\|y_m^*\|=\sqrt{(y_{1m}^*)^2+...+(y_{rm}^*)^2}, m=\overline{1,n+1}.$$

**Теорема 2.** Спектр задачи (4)–(6) непрерывен и заполняет полуось $(0,\infty)$. Задача Штурма – Лиувилля $r$ раз вырождена, т. е. каждому собственному значению $\lambda$ соответствует ровно $r$ линейно независимых собственных строк-функций, в качестве последних можно взять $r$ строк матричнозначной функции

$$u^*(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\theta(x-l_{k-1})\,\theta(l_k-x)\,u_k^*(x,\lambda)\,+\,\theta(x-l_n)\,u_{n+1}^*(x,\lambda),$$

$$u_j^*(x,\beta)=\left(\overset{0}{\underset{1}{\Phi}}(\beta),\overset{0}{\underset{1}{\Psi}}(\beta)\right)\Omega_j^{-1}(x,\beta)\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{E}\end{pmatrix}A_j^{-2},$$

т. е.

$$y^{*j}(\xi,\lambda)=\begin{pmatrix} u_{j1}^*(\xi,\lambda) & \cdots & u_{jr}^*(\xi,\lambda)\end{pmatrix}, j=\overline{1,r}.$$

Наличие спектральной функции $u(x,\lambda)$ и сопряженной спектральной функции $u^*(x,\lambda)$ позволяет написать на множестве $I_n^+$ векторную теорему разложения.

**Теорема 3.** Пусть вектор-функция $f(x)$ определена на $I_n^+$, непрерывна, абсолютно интегрируема и имеет ограниченную вариацию. Тогда для каждого $x\in I_n^+$ справедлива формула разложения

$$f(x)=-\frac{1}{\pi j}\int_0^\infty u(x,\lambda)\Big(\int_{l_0}^\infty u^*(\xi,\lambda)\,f(\xi)\,d\xi+$$

$$+\left(\gamma_{11}^0 f_1(l_0)+\delta_{11}^0 f_1'(l_0)\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}(\lambda),\overset{0}{\underset{1}{\psi}}(\lambda)\right)\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}(\lambda)\times$$

$$\times\left\{\begin{pmatrix}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{k+1}(l_k)\\ f_{k+1}'(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_k(l_k)\\ f_k'(l_k)\end{pmatrix}\right\}\Big)\lambda d\lambda.$$

Установленные теоремы разложения позволяют ввести прямое $F_{n+}$ и обратное $F_{n+}^{-1}$ матричные интегральные преобразования Фурье на действительной полуоси с $n$ точками сопряжения:

$$F_{n+}[f](\lambda)=\int_{l_0}^\infty u^*(\xi,\lambda)\,f(\xi)\,d\xi++\left(\gamma_{11}^0 f_1(l_0)+\delta_{11}^0 f_1^{/}(l_0)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}}(\lambda),\overset{0}{\underset{1}{\psi}}(\lambda)\right)\Omega_k^{-1}(l_k,\lambda)\,M_{k1}^{-1}(\lambda)\times$$

$$\times\left\{\begin{pmatrix}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{k+1}(l_k)\\ f_{k+1}^{/}(l_k)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_k(l_k)\\ f_k^{/}(l_k)\end{pmatrix}\right\}\equiv\tilde f(\lambda), \tag{7}$$

$$F_{n+}^{-1}\left[\tilde f\right](x)=-\frac{1}{\pi j}\int_0^\infty\lambda u(x,\lambda)\,\tilde f(\lambda)\,d\lambda\equiv f(x), \tag{8}$$

где

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\theta(l_k-x)\,\theta(x-l_{k-1})\,f_k(x)\,+\theta(x-l_n)\,f_{n+1}(x).$$

С целью применения полученных интегральных формул для решения рассматриваемой задачи теории упругости приведем основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора

$$B=\sum_{j=1}^{n}\theta\left(x-l_{j-1}\right)\,\theta\left(l_j-x\right)\left(A_j^2\frac{d^2}{dx^2}+\Gamma_j^2\right)+\theta\left(x-l_n\right)\left(A_{n+1}^2\frac{d^2}{dx^2}+\Gamma_{n+1}^2\right).$$

**Теорема 4.** Если вектор-функция

$$f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\theta\left(x-l_{k-1}\right)\,\theta\left(l_k-x\right)f_k\left(x\right)\,+\theta\left(x-l_n\right)\,f_{n+1}\left(x\right),$$

трижды непрерывно дифференцируемая на множестве $I_n^+$, обладающая вместе со своими производными до третьего порядка включительно предельными значениями

$$f_k^{(m)}\left(l_{k-1}\right)=\lim_{x\to l_{k-1}+0}f_k^{(m)}\left(x\right),\ \ m=0,1,2,3;\quad k=\overline{1,n+1},$$

удовлетворяет краевому условию на бесконечности

$$\lim_{x\to\infty}\left(u^*\left(x,\lambda\right)\frac{d}{dx}f\left(x\right)-\frac{d}{dx}u^*\left(x,\lambda\right)\,f\left(x\right)\right)=0,$$

то имеет место основное тождество интегрального преобразования дифференциального оператора $B$

$$F_{n+}\left[B\left(f\right)\right]\left(\lambda\right)=-\lambda^2\tilde{f}\left(\lambda\right)-\left\{\left(\beta_{11}^0f_1\left(l_0\right)+\alpha_{11}^0f_1^{/}\left(l_0\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\gamma_{11}^0A_1^2f_1^{//}\left(l_0\right)+\delta_{11}^0A_1^2f_1^{///}\left(l_0\right)\right)\right\}-\sum_{k=1}^{n}\left(\overset{0}{\underset{1}{\varphi}},\overset{0}{\underset{1}{\psi}}\right)\,\Omega_k^{-1}\left(l_k,\lambda\right)\,M_{k1}^{-1}\left(\lambda\right)\times$$

$$\times\left\{\left(\left(\begin{array}{cc}\beta_{21}^k & \alpha_{21}^k\\ \beta_{22}^k & \alpha_{22}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_{k+1}\left(l_k\right)\\ f_{k+1}^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc}\gamma_{21}^k & \delta_{21}^k\\ \gamma_{22}^k & \delta_{22}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}A_{k+1}^2f_{k+1}^{//}\left(l_k\right)\\ A_{k+1}^2f_{k+1}^{///}\left(l_k\right)\end{array}\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\left(\begin{array}{cc}\beta_{11}^k & \alpha_{11}^k\\ \beta_{12}^k & \alpha_{12}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}f_k\left(l_k\right)\\ f_k^{/}\left(l_k\right)\end{array}\right)-\left(\begin{array}{cc}\gamma_{11}^k & \delta_{11}^k\\ \gamma_{12}^k & \delta_{12}^k\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}A_k^2f_k^{//}\left(l_k\right)\\ A_k^2f_k^{///}\left(l_k\right)\end{array}\right)\right)\right\}. \qquad (9)$$

Доказательство теорем 1–4 проводится аналогично представленному в работе [11].

# 3. Динамические задачи теории упругости

Рассмотрим задачу о распределении напряжений в полубесконечном $n+$ $+\,1$-слойном упругом теле $I_n^+\times R=\{(x,y):x\in I_n^+,y\in R\}$, где $I_n^+=\bigcup\limits_{i=1}^{n+1}\left(l_{i-1},l_i\right)$. В случае плоской деформации вектор смещения $\overline{u}_i$ имеет компоненты $u_i,v_i,0$. Если согласно [14] ввести две функции напряжения $\varphi_i\left(x,y,t\right)$ и $\psi_i\left(x,y,t\right)$, определяемые соотношениями

$$u_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y},v_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x}, \qquad (10)$$

то выражения для компонент напряжения принимают вид [15]

$$\sigma_{ix}=\lambda_i\Delta\varphi_i+2\mu_i\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\partial y}\right),\quad \sigma_{iy}=\lambda_i\Delta\varphi_i+2\mu_i\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\partial y}\right),$$

$$\tau_{ixy} = \mu_i \left( 2\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \right), \tag{11}$$

где $\lambda_i, \mu_i$ — упругие постоянные Ламе [16]. При этом уравнения движения будут удовлетворяться, если функции напряжений $\varphi_i$ и $\psi_i$ выбрать в виде решений системы волновых уравнений:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = c_{1i}^2 \Delta \varphi_i, \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = c_{2i}^2 \Delta \psi_i \quad t > 0, -\infty < y < \infty, l_{i-1} < x < l_i \tag{12}$$

с нулевыми начальными условиями

$$\varphi_i(x,y,0) = 0, \quad \psi_i(x,y,0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_i(x,y,0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi_i(x,y,0)}{\partial t} = 0.$$

На границе тела прилагается изменяющееся со временем давление $p(y,t)$. Если считать, что касательное напряжение равно нулю, то граничные условия принимают вид

$\sigma_{1x} = -p(y,t), \quad \tau_{1xy} = 0$ при $x = 0$.

Считая непрерывными компоненты вектора смещения $\overline{u}_i$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{ix}, \quad \tau_{ixy}$, приходим к следующим внутренним граничным условиям, т. н. условиям сопряжения [16; 17]

$$u_i = u_{i+1}, \quad v_i = v_{i+1}, \quad \sigma_{ix} = \sigma_{i+1x}, \quad \tau_{ixy} = \tau_{i+1xy}, \quad x = l_i.$$

Для решения задачи (10)–(12) применим по переменной $y$ преобразование Фурье [18], а по переменной $x$ векторное интегральные преобразование Фурье с разрывными коэффициентами из п.1. В образах Фурье по переменной $y$ задача (10)–(12) примет вид системы уравнений

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial t^2} = c_{1i}^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial x^2} - c_{1i}^2 \xi^2 \bar{\varphi}_i \quad \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial t^2} = c_{2i}^2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}_i}{\partial x^2} - c_{2i}^2 \xi^2 \bar{\psi}_i \qquad t > 0, \quad l_{i-1} < x < l_i \tag{13}$$

с начальными условиями

$$\bar{\varphi}_i(x,y,0) = 0, \quad \bar{\psi}_i(x,y,0) = 0, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}_i(x,y,0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\psi}_i(x,y,0)}{\partial t} = 0, \tag{14}$$

где $\bar{\varphi}_i, \bar{\psi}_i$ — изображения Фурье по переменной $y$ функций напряжения

$$\bar{\varphi}_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x,y,t) e^{j\xi y} dy, \quad \bar{\psi}_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(x,y,t) e^{j\xi y} dy$$

с граничными условиями

$$\sigma_{1x} = \lambda_1 \tfrac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial x^2} - \lambda_1 \xi^2 \bar{\varphi}_1 + 2\mu_1 \left( \tfrac{\partial^2 \bar{\varphi}_1}{\partial x^2} + j\xi \tfrac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial x} \right) = -\bar{p}(\xi,t) \text{ при } x = 0,$$

$$\bar{\tau}_{1xy} = \mu_1 \left( 2j\xi \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial x^2} - \xi^2 \bar{\psi}_1 \right) = 0, x = 0, \tag{15}$$

с внутренними условиями сопряжения

$$\tfrac{\partial \bar{\varphi}_i}{\partial x} + j\xi \bar{\psi}_i = \tfrac{\partial \bar{\varphi}_{i+1}}{\partial x} + j\xi \bar{\psi}_{i+1}, \quad j\xi \bar{\varphi}_i - \tfrac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial x} = j\xi \bar{\varphi}_{i+1} - \tfrac{\partial \bar{\psi}_{i+1}}{\partial x} \text{ при } x = l_i$$

$$\lambda_i \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial x^2} - \lambda_i \xi^2 \bar{\varphi}_i + 2\mu_i \left( \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_i}{\partial x^2} + j\xi \frac{\partial \bar{\psi}_i}{\partial x} \right) =$$

$$= \lambda_{i+1} \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{i+1}}{\partial x^2} - \lambda_{i+1} \xi^2 \bar{\varphi}_{i+1} + 2\mu_{i+1} \left( \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{i+1}}{\partial x^2} + j\xi \frac{\partial \bar{\psi}_{i+1}}{\partial x} \right)$$

при $x = l_i$

$$\mu_i\left(2j\xi\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial x}-\frac{\partial^2\bar{\psi}_i}{\partial x^2}-\xi^2\bar{\psi}_i\right)=\mu_{i+1}\left(2j\xi\frac{\partial\bar{\varphi}_{i+1}}{\partial x}-\frac{\partial^2\bar{\psi}_{i+1}}{\partial x^2}-\xi^2\bar{\psi}_{i+1}\right)x=l_i. \tag{16}$$

Обозначим $c=\max\limits_i\{c_{1i},c_{2i}\}$.

Применим к задаче (13)–(16) векторное интегральное преобразование Фурье с разрывными коэффициентами, определенное формулами (7)–(8). Положим в системе уравнений (1)

$$r=2,\quad A_i^2=\begin{pmatrix} c_{i1}^2 & 0\\ 0 & c_{i2}^2\end{pmatrix},\quad \Gamma_i^2=\begin{pmatrix} \left(c^2-c_{i1}^2\right)\xi^2 & 0\\ 0 & \left(c^2-c_{i2}^2\right)\xi^2\end{pmatrix},$$

в краевых условиях (2) будем считать

$$\alpha_{11}^0=\begin{pmatrix} 0 & 2j\mu_1\xi\\ 2j\mu_1\xi & 0\end{pmatrix},$$

$$\beta_{11}^0=-\begin{pmatrix} \lambda_1+2\mu_1 & 0\\ 0 & -\mu_1\end{pmatrix}A_1^{-2}\Gamma_1^2-\begin{pmatrix} \lambda_1\xi^2 & 0\\ 0 & \mu_1\xi^2\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11}^0=-\begin{pmatrix} \lambda_1+2\mu_1 & 0\\ 0 & -\mu_1\end{pmatrix}A_1^{-2},\quad \delta_{11}^0=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

в условиях сопряжения (3) положим

$$\alpha_{11}^k=\begin{pmatrix} 0 & 2j\mu_k\xi\\ 2j\mu_k\xi & 0\end{pmatrix},$$

$$\beta_{11}^k=-\begin{pmatrix} \lambda_k+2\mu_k & 0\\ 0 & -\mu_k\end{pmatrix}A_k^{-2}\Gamma_k^2-\begin{pmatrix} \lambda_k\xi^2 & 0\\ 0 & \mu_k\xi^2\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{11}^k=-\begin{pmatrix} \lambda_k+2\mu_k & 0\\ 0 & -\mu_k\end{pmatrix}A_k^{-2},\quad \delta_{11}^k=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\alpha_{12}^k=\begin{pmatrix} 0 & 2j\mu_{k+1}\xi\\ 2j\mu_{k+1}\xi & 0\end{pmatrix},$$

$$\beta_{12}^k=-\begin{pmatrix} \lambda_{k+1}+2\mu_{k+1} & 0\\ 0 & -\mu_{k+1}\end{pmatrix}A_{k+1}^{-2}\Gamma_{k+1}^2-\begin{pmatrix} \lambda_{k+1}\xi^2 & 0\\ 0 & \mu_{k+1}\xi^2\end{pmatrix},$$

$$\gamma_{12}^k=-\begin{pmatrix} \lambda_{k+1}+2\mu_{k+1} & 0\\ 0 & -\mu_{k+1}\end{pmatrix}A_{k+1}^{-2},\quad \delta_{12}^k=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\alpha_{2i}^k=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \beta_{2i}^k=\begin{pmatrix} 0 & j\xi\\ j\xi & 0\end{pmatrix},\quad \gamma_{2i}^k=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \delta_{2i}^k=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},i=1,2.$$

Переходя к образам Фурье по переменной $x$ и учитывая тождество (9), запишем задачу (13)–(16) в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\varphi}}\\ \tilde{\bar{\psi}}\end{pmatrix}=-c^2\xi^2\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\varphi}}\\ \tilde{\bar{\psi}}\end{pmatrix}-\eta^2\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\varphi}}\\ \tilde{\bar{\psi}}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \bar{p}\,(\xi,t)\\ 0\end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\varphi}}\\ \tilde{\bar{\psi}}\end{pmatrix}(\xi,\eta,0)=0,\quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\varphi}}\\ \tilde{\bar{\psi}}\end{pmatrix}(\xi,\eta,0)=0, \tag{18}$$

здесь принято обозначение

$$\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\varphi}}\\ \tilde{\bar{\psi}}\end{pmatrix}(\eta,\xi)=F_{n+}\begin{pmatrix} \bar{\varphi}\\ \bar{\psi}\end{pmatrix}(\eta),$$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \theta\left(l_k - x\right) \theta\left(x - l_{k-1}\right) \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix} + \theta\left(x - l_n\right) \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \psi_k \end{pmatrix}.$$

Приведем решение задачи (15),(16)

$$\begin{pmatrix} \tilde{\bar{\varphi}} \\ \tilde{\bar{\psi}} \end{pmatrix} (\eta, \xi, t) = \int_0^t \frac{\sin\left(\sqrt{c^2\xi^2 + \eta^2}\,(t-\tau)\right)}{\sqrt{c^2\xi^2 + \eta^2}} \begin{pmatrix} \bar{p}\,(\xi,\tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau.$$

Возвращаясь к оригиналам по переменной $y$, получим

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} (\eta, y, t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^t \int_{y-c(t-\tau)}^{y+c(t-\tau)} J_0\left(\eta\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(y-s)^2}{c^2}}\right) \begin{pmatrix} p\,(s,\tau) \\ 0 \end{pmatrix} ds d\tau,$$

где $J_0$ — функция Бесселя [19]. Применив в заключение обратное интегральное преобразование Фурье $F_{n+}^{-1}$ из (8), найдем функции напряжений

$$\begin{pmatrix} \varphi_i \\ \psi_i \end{pmatrix} (x, y, t) =$$

$$= -\frac{1}{j\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{y-c(t-\tau)}^{y+c(t-\tau)} H_i\left(x, \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(y-s)^2}{c^2}}\right) \begin{pmatrix} p\,(s,\tau) \\ 0 \end{pmatrix} ds d\tau, \qquad (19)$$

где

$$H_i\left(x, z\right) = \int_0^\infty \eta u_i\left(x, \eta\right) J_0\left(\eta z\right) d\eta.$$

Наличие выражений (17) для функций напряжения позволяет по формулам (10),(11) найти компоненты вектора перемещений $u_i, v_i, 0$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{ix}, \sigma_{iy}, \tau_{ixy}$.

## Литература


[1] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Динамика связных полей в элементах конструкций. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 279 с.

[2] Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.

[3] Уфлянд Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. Л., 1976. С. 93–106.

[4] Найда Л.С. Гибридные интегральные преобразования типа Ханкеля–Лежандра // Мат. методы анализа динам. систем. 1984. Т. 8. С. 132–135.

[5] Проценко В.С., Соловьев А.И. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред // Прикладная механика. 1982. Т. 13. № 1. С. 62–67.

[6] Проценко В.С., Головченко А.В. Обобщенное интегральное преобразование типа Фурье–Лежандра // Мат. методы анализа. Харьков, 1982. № 6. С. 26–28.

[7] Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования (Бесселя, Лежандра, Бесселя) // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43. Вып. 6. С. 770–779.

[8] Ленюк М.П. Гибридные интегральные преобразования (Бесселя, Фурье, Бесселя) // Матем. физика и нелинейная механика. 1989. Вып. 12(46). С. 68–74.

[9] Ленюк М.П. Интегральное преобразование Фурье на кусочно-однородной полупрямой // Изв. вузов. Сер. Математика. 1989. Т. 4. С. 14–18.

[10] Яремко О.Э. Матричные интегральные преобразования Фурье для задач с разрывными коэффициентами и операторы преобразования // Доклады РАН. 2007. Т. 417. № 3. С. 323–325
[11] Баврин И.И., Матросов В.Л., Яремко О.Э. Операторы преобразования в анализе, математической физике и теории распознавания образов. М.: Прометей, 2006. 292 с.
[12] Судаков Р.С. Простые методы прикладной теории матриц. М.: РХД, 2005. 450 с.
[13] Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. М.: Мир, 1990. 584 с.
[14] Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Иностр. лит., 1955, 668 с.
[15] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Теория упругости. М.: Наука, 1987. Т. 7. 247 с.
[16] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 7-е изд. М.: Наука, 2004. 743 с.
[17] Ахтямов А.М., Садовничий В.А., Султанаев Я.Т. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. М.: Изд-во Московского университета, 2009.
[18] Оболашвили Е.И. Преобразования Фурье и его применение в теории упругости. Тбилиси: Мецниереба, 1979. 230 с.
[19] Снеддон И.Н., Бери Д.С. Классическая теория упругости. М.: Вузовская книга, 2008. 215 с.

Поступила в редакцию $6/V/2011$;
в окончательном варианте — $6/V/2011$.

# FOURIER VECTOR TRANSFORMATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS IN THE THEORY OF ELASTICITY

© 2011 A.A. Malyshev, O.E. Jaremko[2]

The article deals with the description of the method of Fourier vector transformation with discontinuous coefficients. The dynamics of the theory of elasticity illustrates the technique of method in solving problems of mathematical physics of heterogeneous media.

**Key words:** Fourier transformation, theory of elasticity, the Sturm — Liouville vector.

Paper received $6/V/2011$.
Paper accepted $6/V/2011$.

[2]Malyshev Alexey Alexandrovich (`dovmaa@mail.ru`), Jaremko Oleg Emanuilovich (`yaremki@yandex.ru`), the Dept. of Mathematical Analysis, Penza State Pedagogical University, Penza, 440026, Russian Federation.