УДК 517.51:517.98

СИСТЕМЫ СДВИГОВ ФУНКЦИИ

© 2011 Е.С. Климова[1]

В статье рассматриваются системы, образованные с помошью оператора сдвига вида $(T_{\lambda_k} g(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. где $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Найдены условия на функцию $g(x)$, а также на последовательность $(\lambda_n)_{n\in Z}$, для того чтобы система $(T_{\lambda_k} g(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ была полной, бесселевой, фреймовой последовательностью.

Ключевые слова: бесселева последовательность, фрейм, оператор сдвига, полные системы.

1. Основные определения

Напомним определение фрейма. Пусть H — гильбертово пространство.

Определение 1.1. Набор векторов $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ из H называется фреймом, если существуют константы $A, B > 0$ такие, что для любого $f \in H$ выполняются следующие неравенства:

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |< f, f_k >|^2 \leqslant B\|f\|^2.$$

Числа A и B называются границами фрейма. Наибольшая из нижних границ называется оптимальной нижней границей, а наименьшая из верхних границ — оптимальной верхней границей. Если $A = B$, то фрейм называется жестким, а если $A = B = 1$, то фреймом Парсеваля-Стеклова. Если ограничиться только верхней оценкой в определении фрейма, то мы получим определение бесселевой последовательности.

Определение 1.2. Число λ называется предельной точкой последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, если любая окрестность с центром в этой точке содержит элементы последовательности $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}} \neq \lambda$, то есть можно записать в виде $\forall\epsilon > 0$, $\exists N(\epsilon)$ такое, что $|\lambda_N - \lambda| < \epsilon$, $\lambda_N \neq \lambda$.

Определение 1.3. Последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ называется отделимой, если $\forall i \neq j$ выполняется $\inf_{i\neq j} |\lambda_i - \lambda_j| > \delta$, где $\delta > 0$.

Определение 1.4. Последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ называется относительно отделимой, если ее можно представить в виде объединения конечного числа отделимых последовательностей.

Определение 1.5. Для последовательности вещественных чисел $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ вводятся понятия верхней плотности

$$D^+ = \lim\sup_{h\to\infty} \frac{\nu^+(h)}{h}$$

[1]Климова Екатерина Сергеевна (depcy@yandex.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

и нижней плотности
$$D^- = \lim_{h\to\infty}\inf \frac{\nu^-(h)}{h},$$
где $\nu^+ = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sharp\left(\Lambda\cap\left[x-\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}\right]\right)$, $\nu^- = \inf_{x\in\mathbb{R}} \sharp\left(\Lambda\cap\left[x-\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}\right]\right)$.

В данной работе будут использоваться операторы трансляции, модуляции и преобразования Фурье .

Определение 1.6. Оператор $T_a : L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R})$, определяемый следующим образом:
$$(T_a f(x)) = f(x-a),$$
где $a\in\mathbb{R}$ называется оператором трансляции (сдвига) на a.

Определение 1.7. Оператором модуляции $E_b : L_2(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2(\mathbb{R})$ называется оператор
$$(E_b f(x))(x) = exp^{2\pi ibx} f(x).$$

Определение 1.8. Преобразование Фурье $\hat{f}(x)$ функции $f(x)\in L^2(\mathbb{R})$ определяется следующим образом:
$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi ix\gamma} dx, \gamma\in\mathbb{R}.$$

Приведем несколько важных соотношений между данными операторами:

1. $T_a E_b f(x) = e^{-2\pi iba} E_b T_a f(x) = e^{2\pi ib(x-a)} f(x-a)$.

Доказательство:

Распишем $E_b f(x) = e^{2\pi ixb} f(x)$,
$T_a(E_b f(x)) = e^{2\pi ib(x-a)} f(x-a) = e^{-2\pi iab} E_b T_a f(x)$.

2. $\mathbb{F}T_a = E_{-a}\mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$— преобразование Фурье.

Доказательство:

Распишем $T_a f(x) = f(x-a)$,
$\mathbb{F}T_a f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\, e^{-2\pi ix\gamma} dx = [x-a=y] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-2\pi i\gamma(y+a)} =$
$= e^{-2\pi ia\gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-2\pi i\gamma y} dy = E_{-a}\mathbb{F}(f)$.

3. $\mathbb{F}E_a = T_a\mathbb{F}$

Доказательство:

Распишем $E_a = e^{2\pi ixa} f(x)$,
$\mathbb{F}E_a f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi ix(\gamma-a)} dx = T_a\mathbb{F}f(x)$.

2. Необходимое условие на последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, чтобы система $(T_{\lambda_n} g(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ образовывала фреймовую последовательность в $L^2(\mathbb{R})$

Будем рассматривать общий случай системы $(T_{\lambda_n} g(x))_{n\in\mathbb{Z}}$, где $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$— произвольная последовательность вщественных чисел. Попробуем выяснить, при каких условиях на последовательность Λ и функцию $g(x)$ данная система будет образовывать фреймовую последовательность.

В [1, т. 7.4.1] была сформулирована и доказана теорема, которая говорит о том, что система $(T_{\lambda_n} g(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ не может быть фреймом для всего пространства $L^2(\mathbb{R})$, если $g(x)\in L^2(\mathbb{R})$, но может образовывать фреймовую последовательность (то есть являться фреймом для замыкания линейной оболочки). В данной работе получено необходимое условие на последовательность Λ, для того чтобы система $(T_{\lambda_n} g(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ образовывала фреймовую последовательность. Справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1. Если последовательность вещественных чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет предельную точку λ, $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, то система $(T_{\lambda_n} f)_{n\in\mathbb{Z}}$ не может быть бесселевой.

Доказательство. Будем рассуждать от противного, предположив, что система сдвигов $(T_{\lambda_n} f(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ бесселева. Пусть последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ имеет предельную точку, это означает, что существует такая подпоследовательность $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbb{Z}} \subset (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, которая сходится к λ. Так как оператор сдвига непрерывен, то $T_{\lambda_{n_k}} \to T_\lambda$, при $k \to \infty$. Для доказательства того, что система $(T_{\lambda_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ не является бесселевой, достаточно показать, что система $\left(T_{\lambda_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ не является бесселевой. Так как последовательность λ_{n_k} сходится к λ, и оператор сдвига непрерывен, имеем, что для любого $\epsilon > 0$ существует число $\delta(\epsilon) > 0$ и такой номер $N_\epsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $n_k > N_\epsilon$ выполняется $\mid \lambda_{n_k} - \lambda \mid < \delta$ и $\parallel T_{\lambda_{n_k}} - T_\lambda \parallel < \epsilon$.

Возьмем $M \in \mathbb{N}$ и $\epsilon < \parallel f(x) \parallel$, где $M > N_\epsilon$, и рассмотрим следующую сумму:

$$\sqrt{\sum_{n=N_\epsilon}^{M} |< T_\lambda f, T_{\lambda_{n_k}} f >|^2} = \sqrt{\sum_{n=N_\epsilon}^{M} |< T_\lambda f, T_\lambda f - \left(T_\lambda f - T_{\lambda_{n_k}} f\right) >|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=N_\epsilon}^{M} |< T_\lambda f, T_\lambda f > - < T_\lambda f, \left(T_\lambda f - T_{\lambda_{n_k}} f\right) >|^2} \geqslant \sqrt{\sum_{n=N_\epsilon}^{M} |< T_\lambda f, T_\lambda f >|^2} -$$

$$- \sqrt{\sum_{n=N_\epsilon}^{M} |< T_\lambda f, T_\lambda f - T_{\lambda_{n_k}} >|^2} \geqslant \sqrt{M-N} \parallel T_\lambda f \parallel^2 -$$

$$- \sqrt{\sum_{n=N_\epsilon}^{M} \parallel T_\lambda f \parallel^2 \parallel T_\lambda f - T_{\lambda_{n_k}} f \parallel^2} = \sqrt{M-N} \parallel T_\lambda f \parallel^2 - \parallel T_\lambda f \parallel \sqrt{M-N}\epsilon \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{M-N} \parallel f(x) \parallel (\parallel f(x) \parallel - \epsilon) \to \infty$$

при $M \to \infty$. Это противоречит нашему предположению о том, что система бесселева.

▲

3. Системы весовых экспонент

Так как операторы трансляции и модуляции связаны между собой, то перед основным результатом данной работы приведем некоторые теоремы о системе $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$. В работе [2] были найдены необходимые и достаточные условия на последовательность $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, чтобы система $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ являлась фреймом в $L^2[-\pi,\pi]$. Приведем данную теорему.

Теорема 3.1 [2]. 1) Для того чтобы система $\left(e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ образовывала фрейм в $L_2[-\pi,\pi]$, достаточно, чтобы последовательность $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ была относительно отделима и $D^-(\Lambda) > 1$.

2) Для того чтобы $\left(e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ образовывала фрейм в $L^2[-\pi,\pi]$, необходимо, чтобы последовательность (λ_k) была относительно отделима и $D^-(\Lambda) \geqslant 1$.

Таким образом, при условии, что $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ относительно отделима и $D^-(\Lambda)=1$, система $\left(e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ может являться или не являться фреймом. Приведем пример:

Пример 3.2.

Возьмем последовательность $\Lambda=(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}=\left(k\left(1-\mid k\mid^{-\frac{1}{2}}\right)\right)_{|k|>1}$. Подсчитаем $D^-(\Lambda)=\lim\limits_{h\to\infty}\inf\frac{\sharp\Lambda\cap[-h,h]}{h}=\frac{h}{h}=1$. Последовательность Λ отделима, а значит, система $\left(e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ является бесселевой. В работе [2] доказано, что данная система образует фрейм.

Пример 3.3 [2; 4]. Если же в качестве последовательности $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ взять следующую систему:

$$\lambda_n=\begin{cases} n-\frac{1}{4}, \text{ если } n>0,\\ n+\frac{1}{4}, \text{ если } n<0,\\ 0, \text{ если } n=0,\end{cases}$$

то очевидно, что данная последовательность будет отделимой, при этом $D^-(\Lambda)=$ $=1$, но соответствующая система экспонент не будет образовывать фрейм.

Если рассматривать систему весовых экспонент $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, то естественно возникает вопрос, при каких условиях на функцию $g(x)\in L^2[-\pi,\pi]$ данная система будет образовывать бесселеву последовательность, фреймовую последовательность и являться полной. В статье [3] был рассмотрен частный случай, когда функция $g(x)$ являлась степенной, а последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}=(n)_{n\in\mathbb{Z}}$. В общем случае получен следующий результат:

Теорема 3.4. Пусть $\Lambda=(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}}$— последовательность вещественных чисел такая, что $D^-(\Lambda)>1$ и Λ относительно отделима, и пусть функция $g(x)\in L_2[-\pi,\pi]$, тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) Система $\left(g(x)\,e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ — фрейм для $L_2[-\pi,\pi]$.

2) Существуют такие константы $A,B>0$, что $A\leqslant\mid g(x)\mid\leqslant B$ п. в.

Доказательство.

Так как по условию теоремы Λ относительно отделима и $D^-(\Lambda)>1$, то по теореме 3.1 система $\left(e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ — фрейм с некоторыми границами $\alpha,\beta>0$. Докажем, что из утверждения 1) следует условие 2) теоремы.

Пусть $\left(g(x)\,e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$— фрейм с границами m,M, предположим, что утверждение 2) неверно, т. е. $\forall A>0$ существует множество $U\subset[-\pi,\pi]$ с положительной мерой $\mu(U)>0$ такое, что $\forall x\in U$ выполняется

$$\mid g(x)\mid< A.$$

Введем множества $E_n=\left(x\in[-\pi,\pi]:\mid g(x)\mid<\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbb{N}$.

Возьмем функции

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{|E_n|}}, \text{ если } x\in E_n,\\ 0, \text{ если } x\notin E_n.\end{cases}$$

Очевидно, что $\parallel f_n\parallel_2=\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mid f_n\mid^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_{E_n}\frac{1}{|E_n|}dx\right)^{\frac{1}{2}}=1$.

Таким образом функции $f_n(x)\in L_2[-\pi,\pi]$. Так как система $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм, то $\forall f_n(x)\in L_2[-\pi,\pi]$ имеем:

$$m\parallel f_n(x)\parallel^2\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mid< f_n(x),g(x)\,e^{i\lambda_k x}>\mid^2\leqslant$$

$$\leqslant M \parallel f_n(x) \parallel^2,$$

$$m \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |< f_n(x)\,\bar{g}(x), e^{i\lambda_k x} >|^2 \leqslant \beta \parallel f_n(x)\,\bar{g}(x) \parallel^2 = \beta \int_{E_n} | \frac{1}{\sqrt{|E_n|}}\bar{g}(x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta}{|E_n|}\int_{E_n}\frac{1}{n^2}dx = \frac{\beta}{n^2}.$$

Так как $\frac{\beta}{n^2} \to 0$ при $n \longrightarrow \infty$, то мы получаем противоречие с тем, что $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм, следовательно, наше предположение неверно, и существует константа $A>0$ такая, что $|g(x)| \geqslant A$.

Теперь допустим, что $\forall B>0$ существует такое множество $V \in [-\pi,\pi]$, что $\mu(V)>0$ и $|g(x)|>B$.

Введем множества $E_s = (x : |g(x)|>s)$ и рассмотрим следующие функции:

$$f_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|E_s|}}, & \text{если } x \in E_s, \\ 0, & \text{если } x \notin E_s. \end{cases}$$

Тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f_s(x), g(x)\,e^{i\lambda_n x} >|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f_s(x)\,\bar{g}(x), e^{i\lambda_n x} >|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \parallel f_s(x)\,g(x) \parallel^2 = \alpha \int_{E_s} | \frac{1}{\sqrt{|E_n|}} g(x)|^2\,dx > \alpha s^2.$$

Так как $\alpha s^2 \to \infty$ при $s \to \infty$, то получаем противоречие с тем, что система $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм, следовательно, наше предположение неверно, и существует такая константа $B>0$, что $|g(x)| \leqslant B$ п. в. Таким образом получаем, что существуют такие константы $A, B > 0$, что $A \leqslant |g(x)| \leqslant B$ п. в.

Докажем теперь, что из утверждения 2) следует утверждение 1) теоремы. Пусть существуют такие константы $A, B>0$, что $A \leqslant |g(x)| \leqslant B$, тогда, так как $g(x) \in L_2[-\pi,\pi]$, то $g(x) \in L_\infty[-\pi,\pi]$, следовательно, $\forall f \in L_2[-\pi,\pi]$ функция $f(x)\,g(x) \in L_2[-\pi,\pi]$, тогда имеем:

$$\alpha \parallel f(x)\,\bar{g}(x) \parallel^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x)\,\bar{g}(x), e^{i\lambda_n x}> |^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), g(x)\,e^{i\lambda_n x} >|^2 \leqslant \beta \parallel f(x)\,\bar{g}(x) \parallel^2 .$$

Учитывая, что

$$A \parallel f(x) \parallel^2 \leqslant \parallel f(x)\,\bar{g}(x) \parallel^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 |g(x)|^2\,dx \leqslant B \parallel f(x) \parallel^2,$$

получим

$$\alpha A \parallel f(x) \parallel^2 \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), g(x)\,e^{i\lambda_n x} >|^2 \leqslant \beta B \parallel f(x) \parallel^2 .$$

Таким образом система $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм в $L_2[-\pi,\pi]$.

▲

Теорема 3.5. Пусть $g(x) \in L_2[-\pi,\pi]$ и $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность вещественных чисел такая, что $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — относительно отделима, и $D^-(\Lambda) > 1$, тогда следующие условия эквивалентны:

1) Система $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ бесселева в $L_2[-\pi,\pi]$.

2) Существует такая константа $B>0$, что $|g(x)| \leqslant B$ п. в.

Доказательство.

Так как по условию теоремы Λ относительно отделима и $D^-(\Lambda) > 1$, то система $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является фреймом с границами $\alpha, \beta > 0$.

Пусть выполняется утверждение 1) теоремы, то есть система $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ является бесселевой, допустим, что утверждение 2) неверно, то есть для любой константы $B>0$ существует множество $U\in[-\pi,\pi]$ с мерой $\mu(U)>0$ такое, что $\mid g(x)\mid > B$ для $x\in U$. Возьмем множества $E_n=(x:\mid g(x)\mid > n)$ и рассмотрим функции

$$f_n(x)=\left\{\begin{array}{r} \frac{1}{\sqrt{|E_n|}},\ \text{если}\ x\in E_n,\\ 0,\ \text{если}\ x\notin E_n. \end{array}\right.$$

Тогда

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|< f_n(x)\,,g(x)\,e^{i\lambda_k x}>|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|< f_n(x)\,\bar g(x)\,,e^{i\lambda_k x}>|^2\leqslant\| f_n(x)\,\bar g(x)\,\|^2\ .$$

Учитывая, что $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм, имеем:

$$\alpha\parallel f_n(x)\,\bar g(x)\,\|^2\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|< f_n(x)\,\bar g(x)\,,e^{i\lambda_k x}>|^2\ .$$

$$\alpha n^2\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|< f_n(x)\,\bar g(x)\,,e^{i\lambda_k x}>|^2\ .$$

Последнее противоречит тому, что $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ фрейм, следовательно, наше предположение неверно, значит, существует константа $B>0$ такая, что $\mid g(x)\mid\leqslant B$.

Докажем, что из утверждения 2) теоремы следует утверждение 1).

Пусть $\mid g(x)\mid < B$, следовательно

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|< f(x)\,,g(x)\,e^{i\lambda_n x}>|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|< f(x)\,\bar g(x)\,,e^{i\lambda_n x}>|^2\leqslant\beta\parallel f(x)\,\bar g(x)\,\|^2=$$

$$=\beta\int_{-\pi}^{\pi}\mid f(x)\mid^2\mid\bar g(x)\mid^2 dx\leqslant\beta B^2\parallel f(x)\,\|^2\ .$$

Таким образом $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ бесселева в $L_2[-\pi,\pi]$.

▲

Теорема 3.6. Пусть $g(x)\in L_2[-\pi,\pi]$ и $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность вещественных чисел такая, что $\Lambda=(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — относительно отделима, и $D^-(\Lambda)>$ >1, тогда следующие условия эквивалентны:

1) Система $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ полная в $L_2[-\pi,\pi]$.

2) Мера $\mu(x:g(x)=0)=0$.

Доказательство.

Пусть $< f(x)\,,g(x)\,e^{i\lambda_n x}>=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$. Отсюда следует, что скалярное произведение $< f(x)\,\bar g(x)\,,e^{i\lambda_n x}>=0,\ \forall n\in\mathbb{Z}$. В силу полноты системы $\left(e^{i\lambda_n x}\right)$ имеем, что $f(x)\,\bar g(x)=0$, так как $\bar g(x)\neq 0$, то $f(x)=0$ п. в., следовательно $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)$— полная система.

Теперь пусть $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)$ полная, то есть $< f(x)\,,g(x)\,e^{i\lambda_n x}>=0$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$.

Допустим, что существует множество $U\subset[-\pi,\pi]$ с мерой $\mu(U)>0$ такое, что $g(x)=0,\ \forall x\in U$.

Тогда если в качестве функции $f(x)$ возьмем

$$f(x)=\left\{\begin{array}{l} 1,\ \text{если}\ x\in U,\\ 0,\ \text{если}\ x\notin U, \end{array}\right.$$

то имеем $f(x)\,g(x)=0,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$.

Тогда

$$< f(x)\,\bar{g}(x)\,, e^{i\lambda_n x} >= 0 =< f(x)\,, g(x)\,e^{i\lambda_n x} >= 0,$$

при этом $f(x) \neq 0$ п. в.

Последнее противоречит тому, что $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ полная система, следовательно, $\mu(x : g(x) = 0) = 0$.

▲

Из теоремы 3.4 и 3.5 вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.7. Пусть $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность вещественных чисел такая, что $\left(e^{i\lambda_n x}\right)_{\ltimes\in\mathbb{Z}}$ — жесткий фрейм, то следующие утверждения эквивалентны:

1) Система $\left(g(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$— жесткий фрейм в $L_2[-\pi,\pi]$.

2) $|\,g(x)\,| = A$.

4. Фреймы сдвигов

Пусть множество $E \subseteq \mathbb{R}$ — конечной меры. Обозначим

$$P_E = \left(f \in L^2(\mathbb{R}) : \operatorname{supp}\hat{f} \subseteq E\right),$$

где $\operatorname{supp}\hat{f}$—носитель преобразования Фурье функции $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 4.1. Пусть последовательность $\Lambda = (\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ такая, что $\left(e^{i\lambda_k x}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$— фрейм для $L^2(E)$. Пусть функция $g(x) \in P_E$, тогда:

1) система $\left(T_{\lambda_k} g(x)_{k\in\mathbb{Z}}\right)$ бесселева система в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существует константа $B > 0$ такая, что

$$|\,\hat{g}(\omega)\,| \leqslant B$$

для почти всех $\omega \in \mathbb{R}$.

2) Система $(T_{\lambda_k} g(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ — фрейм для P_E тогда и только тогда, когда существуют константы $A > 0$, $B > 0$ такие, что:

$$A \leqslant |\,\hat{g}(\omega)\,| \leqslant B$$

для почти всех $\omega \in E$.

3) Система $(T_{\lambda_k} g(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ — фреймовая последовательность в $L^2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда существуют такие константы $A, B > 0$, что:

$$A \leqslant |\,\hat{g}(\omega)\,| \leqslant B$$

для почти всех $\omega \in \operatorname{supp}\hat{g}$.

Доказательство:

1) Пусть $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$, рассмотрим

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |< f(x)\,, T_{\lambda_k} g(x) >|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |< \hat{f}(\omega)\,, \hat{g}(\omega)\,e^{i\lambda_k \omega} >|^2\,.$$

По теореме 3.4 система $\left(\hat{g}(x)\,e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ бесселева тогда и только тогда, когда $|\,\hat{g}(\omega)\,| \leqslant B$ для $\omega \in E$.

Так как $\|\,\hat{f}(x)\,\|^2_{L_2(E)} \leqslant \|\,\hat{f}(x)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$, то существует такая константа $\beta > 0$, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |< f, T_{\lambda_k} g(x) >|^2 \leqslant \beta\,\|\,\hat{f}(x)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\,.$$

Последнее эквивалентно тому, что существует константа $B > 0$ такая, что $|\hat{g}(\omega)| \leqslant B$.

2) Возьмем функцию $f(x) \in P_E$. Так как $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |< f(x), T_{\lambda_n} g(x) >|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |< \hat{f}(x), \hat{g}(x) e^{i\lambda_n x} >|^2$ и учитывая, что $\| f(x) \|_{P_E} = \| \hat{f}(x) \|_{L^2(E)}$, то по теореме 3.4 $\left(\hat{g}(x) e^{i\lambda_n x}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ — фрейм тогда и только тогда, когда существуют такие константы $A, B > 0$, что $A \leqslant |\hat{g}(x)| \leqslant B$.

Последнее эквивалентно тому, что $(T_{\lambda_k} g(x))_{k\in\mathbb{Z}}$ — фрейм в $L^2(E)$ тогда и только тогда, когда существуют такие константы $A, B > 0$, что $A \leqslant |\hat{g}(\omega)| \leqslant B$, для $\omega \in E$.

▲

Литература

[1] Christensen O. An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston: Birkhäuser, 2002.

[2] Seip C. On the connection between exponential bases and certain related sequences in $L^2[-\pi, \pi]$ // Jornal of Functional Anal. Mathematics. 1995. № 130. P. 131–160.

[3] Голубева Е.С. Фреймы экспонент со степенным весом // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 2.

[4] Кадец М.И. Точное значение постоянной Палея-Винера // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 155. № 6.

[5] Кашин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999.

[6] Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М.: БИНОМ, 2008.

Поступила в редакцию 22/*III*/2011;
в окончательном варианте — 22/*III*/2011.

THE SYSTEM OF SHIFTS OF FUNCTIONS

© 2011 E.S. Klimova[2]

The system of shift of functions $(T_{\lambda_k} g(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ in $L^2(\mathbb{R})$ space is considered in this paper, where $\lambda_n \in \mathbb{R}$. We find conditions on real sequence (λ_n) which provide such properties of the system as to be a frame, Bessel system, complete sequence in the space $L^2(\mathbb{R})$.

Key words: Bessel sequence, frame, shift operator, complete systems.

Paper received 22/*III*/2011.
Paper accepted 22/*III*/2011.

[2]Klimova Ekaterina Sergeevna (`depcy@yandex.ru`), the Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.