УДК 517.95

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2011 С.В. Кириченко[1]

В работе рассмотрена смешанная задача для вырождающегося уравнения гиперболического типа с интегральным условием. Доказана теорема о существовании единственного обобщенного решения.

Ключевые слова: вырождающееся уравнение, интегральное условие, обобщенное решение, априорная оценка, метод регуляризации, метод Галеркина.

Введение

На сегодняшний день в математической литературе имеется много работ, в которых изучены различные задачи для вырождающихся уравнений гиперболического типа. Большой интерес среди таких задач представляют задачи с нелокальными интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия возникают при изучении различных физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственного измерения. В качестве примера можно привести задачи, связанные с исследованием диффузии частиц в турбулентной плазме, процессов распространения тепла, процесса влагопереноса в капиллярно-пористых средах, при математическом моделировании технологических процессов, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики. Задачи с интегральными условиями для гиперболических уравнений рассматривались, например, в работах [1–5].

1. Основные результаты

Рассмотрим уравнение

$$K(x,t)u_{tt} - (a(x)u_x)_x + b(x,t)u_t + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1}$$

в области $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, коэффициенты которого достаточно гладкие функции, $a(x) > 0$, $K(x,t) \geqslant 0$ и $K(x,0) = 0$.

Задача 1: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую в Q уравнению (1), условиям

$$u(x,0) = 0, \tag{2}$$

[1]Кириченко Светлана Владимировна (svkirichenko@mail.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного университета путей сообщения, 443066, Российская Федерация, г. Самара, 1-й Безымянный переулок, 18.

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \tag{3}$$

и нелокальному условию

$$\int_0^T u(x,t)\,dt = 0. \tag{4}$$

Для исследования задач с интегральными условиями часто стандартные методы изучения оказываются неприемлемыми без соответствующих модификаций, поэтому сведем поставленную задачу (1)–(4) к смешанной задаче со стандартными условиями. Для этого введем функцию

$$v(x,t) = \int_0^t u(x,\tau)\,d\tau. \tag{5}$$

Тогда, если u – решение задачи (1)–(4), то функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}(K(x,t)v_{tt} - (a(x)v_x)_x + \tilde{b}(x,t)v_t + \tilde{c}(x,t)v) - \tilde{c}_t(x,t)v = f(x,t), \tag{6}$$

где $\tilde{b}(x,t) = b(x,t) - K_t(x,t)$, $\tilde{c}(x,t) = c(x,t) - \tilde{b}_t(x,t)$ и выполняются условия (2), (3).

Проинтегрировав (6) по t и учитывая, что $K(x,0) = 0$, $v(x,0) = 0$, получим уравнение

$$K(x,t)v_{tt} - (a(x)v_x)_x + \tilde{b}(x,t)v_t + \tilde{c}(x,t)v - \int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v(x,\tau)d\tau = F(x,t), \tag{7}$$

где $F(x,t) = \int\limits_0^t f(x,\tau)d\tau$ со следующими условиями на функцию $v(x,t)$:

$$v(x,T) = 0, \tag{8}$$

$$v_t(x,0) = 0, \tag{9}$$

$$v_x(0,t) = v_x(l,t) = 0. \tag{10}$$

Таким образом получаем следующую задачу 2: найти функцию $v(x,t)$, удовлетворяющую в Q уравнению (7) и условиям (8)–(10).

Введем понятие обобщенного решения задачи.

Умножим (7) на функцию $\eta(x,t)e^{-\lambda t}$, где $\eta(x,t) \in W_2^1(Q)$, $\lambda > 0$ и $\eta(x,T) = 0$, и проинтегрируем по области Q. В результате получим равенство

$$\int_0^T\int_0^l [-K(x,t)v_t\eta_t + (\lambda K(x,t) - K_t(x,t) + \tilde{b}(x,t))v_t\eta + a(x)v_x\eta_x +$$

$$+\tilde{c}(x,t)v\eta - \int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v\,d\tau\eta]e^{-\lambda t}\,dxdt = \int_0^T\int_0^l F(x,t)\eta e^{-\lambda t}\,dxdt. \tag{11}$$

Определение 1. *Функцию $v(x,t) \in W_2^1(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (7)–(10), если она удовлетворяет условию $v(x,0) = 0$ и тождеству (11) для всех функций $\eta(x,t)$ из указанного класса.*

Введем следующее обозначение: $A_0 = \max_{\overline{Q}} |\tilde{b}_t(x,t) - K_{tt}(x,t)|$. И пусть $\delta > 0$ — некоторое число.

Теорема 1. *Пусть $a(x), \tilde{b}(x,t), \tilde{b}_t(x,t), \tilde{c}(x,t), \tilde{c}_t(x,t)$ непрерывны в $\overline{Q}$, $K(x,t)$, $K_t(x,t)$, $K_{tt}(x,t)$ непрерывны в Q. Если $\tilde{c}_t(x,t) > \frac{1+A_0^2}{2\delta} > 0$, $\tilde{c}(x,t) < 0$, $2\tilde{b}(x,t) - 3K_t(x,t) \geqslant 2\delta > 0$, $K(x,T) \geqslant 0$, то существует единственное обобщенное решение задачи (7)–(10).*

Доказательство.

1. Единственность решения

Для доказательства единственности в тождестве (11) с $F(x,t) \equiv 0$ возьмем функцию

$$\eta(x,t) = e^{\lambda t} \int_t^T v(x,\tau)\, d\tau.$$

Интегрируя (11) по частям и принимая во внимание начальные и граничные условия, получим:

$$\int_0^T \int_0^l (\tilde{b}(x,t) - \frac{3}{2}K_t(x,t))v^2\, dxdt + \frac{1}{2}\int_0^l a(x)(\int_0^T v_x\, dt)^2\, dx - \frac{1}{2}\int_0^l \tilde{c}(x,t)(\int_t^T v\, d\tau)^2\, dx +$$
$$+ \int_0^T \int_0^l \tilde{c}_t(x,t)(\int_t^T v\, d\tau)^2\, dxdt = \int_0^T \int_0^l (\tilde{b}_t(x,t) - K_{tt}(x,t)) \int_t^T v\, d\tau v\, dxdt +$$
$$+ \int_0^T \int_0^l \int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau) v\, d\tau \int_t^T v\, d\tau\, dxdt. \tag{12}$$

Заметим, что на основании условий теоремы

$$\tilde{b}(x,t) - \frac{3}{2}K_t(x,t) \geqslant \delta > 0, \quad \forall (x,t) \in \overline{\mathrm{Q}}. \tag{13}$$

Теперь сделаем некоторые оценки. В силу неравенства Коши с ε

$$|\int_0^T\int_0^l (\tilde{b}_t(x,t) - K_{tt}(x,t)) \int_t^T v\, d\tau v\, dxdt| \leqslant \frac{\delta_1}{2}\int_0^T\int_0^l v^2\, dxdt + \frac{A_0^2}{2\delta_1}\int_0^T\int_0^l (\int_t^T v\, d\tau)^2\, dxdt;$$

$$|\int_0^T\int_0^l\int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau) v\, d\tau \int_t^T v\, d\tau\, dxdt| \leqslant \frac{\delta_2}{2}\int_0^T\int_0^l v^2\, dxdt + \frac{1}{2\delta_2}\int_0^T\int_0^l (\int_t^T v\, d\tau)^2\, dxdt.$$

Выберем числа δ_i $(i = 1; 2)$ так, чтобы $\delta_1 + \delta_2 \leqslant 2\delta$, где δ – число из неравенства (13). Положив, например,

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta,$$

будем считать, что

$$c_t(x,t) > \frac{1 + A_0^2}{2\delta}.$$

Тогда из (12) получаем неравенство

$$\int_0^T\int_0^l v^2\,dxdt \leqslant 0,$$

из которого следует, что $v(x,t)\equiv 0$ в Q.

2. Существование решения

Для доказательства существования решения применим метод регуляризации и метод Галеркина. Рассмотрим функцию

$$K_\varepsilon(x,t) = K(x,t)+\varepsilon \tag{14}$$

и уравнение

$$L_\varepsilon \equiv K_\epsilon(x,t)v_{tt} - (a(x)v_x)_x + \tilde{b}(x,t)v_t + \tilde{c}(x,t)v - \int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v\,d\tau = F(x,t). \tag{15}$$

Зададим пространство $\tilde{W}_2^1(Q)=\{v(x,t): v(x,t)\in W_2^1(Q), v(x,T)=0\}$.

Введем понятие обобщенного решения задачи (15), (8)–(10). Умножим (15) на функцию $\nu(x,t)e^{-\lambda t}$, где $\nu(x,t)\in\tilde{W}_2^1(Q)$ и проинтегрируем по области Q. В результате получим равенство

$$\int_0^T\int_0^l [-K_\varepsilon(x,t)v_t\nu_t + (\lambda K_\varepsilon(x,t) - (K_\varepsilon(x,t))_t + \tilde{b}(x,t))v_t\nu + a(x)v_x\nu_x +$$

$$+\tilde{c}(x,t)v\nu - \int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v\,d\tau\nu]e^{-\lambda t}\,dxdt = \int_0^T\int_0^l F(x,t)\nu e^{-\lambda t}\,dxdt. \tag{16}$$

Определение 2. *Функцию $v(x,t)\in W_2^1(Q)$ будем называть обобщенным решением задачи (15), (8)–(10), если она удовлетворяет условию $v(x,0)=0$ и тождеству (16) для всех функций $\nu(x,t)\in\tilde{W}_2^1(Q)$.*

Рассмотрим фундаментальную, полную в $W_2^1(0,l)$ систему линейно независимых функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$, $w_k(x)\in C^2[0,l]$, $(w_k,w_l)=\delta_{kl}$ и будем искать приближенное решение задачи (15), (8)–(10) в виде

$$v^m(x,t)=\sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x) \tag{17}$$

из соотношений

$$\int_0^l [K_\varepsilon(x,t)v_{tt}^m - (a(x)v_x^m)_x + \tilde{b}(x,t)v_t^m + \tilde{c}(x,t)v^m -$$

$$-\int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v^m\,d\tau]w_j(x)dx = \int_0^l F(x,t)w_j(x)dx. \tag{18}$$

Подставим (17) в (18), после несложных преобразований и смены порядка суммирования и интегрирования получим

$$\int\limits_0^l K_\varepsilon(x,t)\,dx c_j''(t) + \int\limits_0^l \tilde{b}(x,t)\,dx c_j'(t) - \sum_{k=1}^m \int\limits_0^l (a'(x)w_k'w_j + a(x)w_k''w_j -$$

$$-\tilde{c}(x,t)w_k w_j)\,dx c_k(t) = f_j(t) + \int\limits_0^l\int\limits_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)c_j(\tau)d\tau\,dx, \qquad (19)$$

где $f_j(t) = \int\limits_0^l F(x,t)w_j(x)dx$.

Из условий (8) и (9) имеем

$$c_k(0) = 0,\ c_k'(0) = 0. \qquad (20)$$

Получили задачу Коши относительно функций $c_k(t)$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (19) с данными (20), которая имеет единственное решение [6 , с. 27].

Таким образом, для любого m существует единственная функция $v^m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k(t)w_k(x)$, и последовательность приближенных решений построена.

Покажем теперь, что эта последовательность ограничена. Умножим (18) на $c_k'(t)e^{-\lambda t}$, просуммируем и проинтегрируем по t.

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l e^{-\lambda t}[K_\varepsilon(x,t)v_{tt}^m v_t^m - (a(x)v_x^m)_x v_t^m + \tilde{b}(x,t)(v_t^m)^2 + \tilde{c}(x,t)v^m v_t^m]\,dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)e^{-\lambda t}v_t^m\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l (\int\limits_0^t \tilde{c}_\tau v^m\,d\tau)e^{-\lambda t}v_t^m\,dxdt.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int\limits_0^l K_\varepsilon(x,T)(v_t^m(x,T))^2dx + \int\limits_0^T\int\limits_0^l e^{-\lambda t}(\frac{\lambda}{2}K_\varepsilon(x,t) - \frac{1}{2}(K_\varepsilon(x,t))_t + \tilde{b}(x,t))\times$$

$$\times(v_t^m)^2\,dxdt + \frac{\lambda}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l e^{-\lambda t}a(x)(v_x^m)^2dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l e^{-\lambda t}(\frac{\lambda}{2}\tilde{c}(x,t) - \frac{1}{2}\tilde{c}_t(x,t)(v^m)^2\,dxdt =$$

$$= \int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)e^{-\lambda t}v_t^m\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^l (\int\limits_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v^m\,d\tau)e^{-\lambda t}v_t^m\,dxdt.$$

Оценим слагаемые в правой части последнего равенства

$$|\int\limits_0^T\int\limits_0^l e^{-\frac{\lambda}{2}t}v_t^m(\int\limits_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v^m\,d\tau)e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,dxdt| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l e^{-\lambda t}(v_t^m)^2\,dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^l e^{-\lambda t}(\int\limits_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v^m\,d\tau)^2\,dxdt;$$

$$\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}(\int_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v^m\,d\tau)^2\,dxdt \leqslant \int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}\int_0^T \tilde{c}^2_\tau(x,\tau)\,d\tau\int_0^T (v^m)^2\,dtdxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1T\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}(v^m)^2\,dxdt,$$

где $C_1 = \max_{[0,T]}\int\limits_0^T \tilde{c}^2_\tau(x,\tau)\,d\tau$.

$$|\int_0^T\int_0^l e^{-\frac{\lambda}{2}t}F(x,t)e^{-\frac{\lambda}{2}t}v^m_t\,dxdt| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}F^2(x,t)\,dxdt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}(v^m_t)^2\,dxdt.$$

Учитывая, что $v^m_x(x,0)=0$ (из условия (8)), получим

$$\frac{e^{-\lambda T}}{2}\int_0^l K_\varepsilon(x,T)(v^m_t(x,T))^2\,dx + \frac{\lambda}{2}\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}a(x)(v^m_x)^2\,dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}(\frac{\lambda}{2}K_\varepsilon(x,t) - \frac{1}{2}(K_\varepsilon(x,t))_t + \tilde{b}(x,t) - 1)(v^m_t)^2\,dxdt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}(\frac{\lambda}{2}\tilde{c}(x,t) - \frac{1}{2}\tilde{c}_t(x,t) - \frac{1}{2}C_1T)(v^m)^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^l e^{-\lambda t}F^2(x,t)\,dxdt.$$

Обозначим $C_2 = \max_{[0,T]}\{\lambda\tilde{c}(x,t) - \tilde{c}_t(x,t) - C_1T; \lambda K_\varepsilon(x,t) - (K_\varepsilon(x,t))_t + 2\tilde{b}(x,t) - - 2; \lambda a(x)\}$ и учитывая, что $K_\varepsilon(x,T) > 0$, получим

$$C_2\|v\|^2_{W^1_2(Q)} \leqslant \|F\|^2_{L_2(Q)}. \tag{21}$$

Так как выражение в правой части не зависит от m, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $v(x,t) \in W^1_2(Q)$ [7, с. 214].

Покажем, что $v(x,t)$ есть обобщенное решение задачи (15),(8)–(10).

Условия (8)–(10) будут выполнены в силу слабой сходимости $\{v^m(x,t)\}$ к $v(x,t)$, которая означает, что $\{v^m_x(x,t)\}$ и $\{v^m_t(x,t)\}$ слабо сходятся к $v_x(x,t)$ и $v_t(x,t)$. Покажем, что этот предел удовлетворяет тождеству (16). Умножим (18) на $e^{-\lambda t}h_i(t)$, просуммируем по i (от 1 до m) и проинтегрируем по t от 0 до T, учитывая, что $h_i(T)=0$.

Обозначив

$$\eta(x,t) = \sum_{i=1}^m h_i(t)w_i(x),$$

получаем

$$\int_0^T\int_0^l [K_\varepsilon(x,t)v^m_{tt}\eta e^{-\lambda t} - (a(x)v^m_x)_x\eta e^{-\lambda t} + \tilde{b}(x,t)v^m_t\eta e^{-\lambda t} + \tilde{c}(x,t)v^m\eta e^{-\lambda t} -$$

$$-\int\limits_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)v^m\,d\tau\eta e^{-\lambda t}]\,dxdt = \int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)\eta e^{-\lambda t}\,dxdt.$$

Интегрируя по частям первое и второе слагаемые, учитывая (10) и условие $\eta(x,T)=0$, получим

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l [-K_\varepsilon(x,t)v_t^m\eta_t + (\lambda K_\varepsilon(x,t) - (K_\varepsilon(x,t))_t + \tilde{b}(x,t))v_t^m\eta + a(x)v_x^m\eta_x +$$

$$+\tilde{c}(x,t)v^m\eta - \int\limits_0^t \tilde{c}_\tau(x,\tau)vd\tau\eta]\,dxdt = \int\limits_0^T\int\limits_0^l F(x,t)\eta\,dxdt. \qquad (22)$$

Тождество (22) справедливо для любой функции

$$\eta(x,t) = \sum_{i=1}^m h_i(t)w_i(x).$$

Обозначим совокупность таких функций $\eta(x,t)$ через θ_m. В (22) перейдем к пределу при фиксированной функции $\eta(x,t)\in\theta_m$. Это приведет к тождеству (16) для предельной функции $v(x,t)$ при любой функции $\eta(x,t)\in\theta_m$. Но $\bigcup_{m=1}^\infty \theta_m$ плотно в $\tilde{W}_2^1(Q)$, а $v(x,t)\in W_2^1(Q)$, следовательно, тождество (16) будет выполняться для $v(x,t)$ при $\forall\eta\in\tilde{W}_2^1(Q)$. Следовательно, $v(x,t)$ – обобщенное решение задачи (15), (8)–(10).

Тогда для любого фиксированного $\varepsilon>0$ задача (15), (8)–(10) имеет решение $v^\varepsilon(x,t)$. Рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_k\}$. Для функций $v^\varepsilon(x,t)$ будет справедлива равномерная по ε оценка (21), правая часть которой не зависит от ε. Следовательно, существует подпоследовательность $\{\varepsilon_k^{'}\}$ положительных чисел, которую можно выделить из $\{\varepsilon_k\}$, и функция $v(x,t)$ такие, что при $k\to\infty$ выполняется: $\varepsilon_k^{'}\to 0$, $v^{\varepsilon_k^{'}}(x,t)\to v(x,t)$ в $W_2^1(Q)$, $v_t^{\varepsilon_k^{'}}(x,t)\to v_t(x,t)$ $v_x^{\varepsilon_k^{'}}(x,t)\to v_x(x,t)$ почти всюду в Q. Получаем, что предельная функция $v(x,t)$ удовлетворяет (7) и условиям (8)–(10.)

Так как условие (5) однозначно определяет функцию $v(x,t)$ через функцию $u(x,t)$ и если выполнены условия теоремы 1, то можно заключить, что существует единственное решение задачи (1)–(4).

Литература

[1] Кожанов А.И., Пулькина Л.С. Краевые задачи с интегральным граничным условием для многомерных гиперболических уравнений // ДАН. 2005. Т. 404. № 5. С. 589–592.

[2] Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Матем. моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.

[3] Пулькина Л.С. Начально-краевая задача с нелокальным граничным условием для многомерного гиперболического уравнения //Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 8. С. 1084–1089.

[4] Пулькина Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения // Матем. заметки. 2003. Т. 74. № 3. С. 435–445.

[5] Бейлин С.А. Смешанная задача с интегральным условием для волнового уравнения // Неклассические уравнения математической физики: сб. науч. трудов. Новосибирск. 2005. С. 37–43.

[6] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1974. 331 с.

[7] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 408 с.

Поступила в редакцию 14/ *VI*/2011;
в окончательном варианте — 26/*X*/2011.

A MIXED PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR A DEGENERATIVE EQUATION OF THE HYPERBOLIC TYPE

 S.V. Kirichenko[2]

In this article, the mixed problem for the hyperbolic degenerate equation with an integral condition is considered. The existence and uniqueness of a generalized solution are proved.

Key words: degenerate equation, integral condition, generalized solution, apriori estimate, regularization method, Galerkin method.

Paper received 14/ *VI*/2011.
Paper accepted 26/*X*/2011.

[2]Kirichenko Svetlana Vladimirovna (svkirichenko@mail.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Railway Transport, Samara, 443066, Russian Federation.