УДК 517.518.85+517.53

ГЛАДКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

© 2011 А.В. Болучевская[2]

В данной работе рассматривается задача кусочно-линейной аппроксимации отображений, являющихся решением эллиптической системы уравнений, и их дифференциалов по значениям в узлах треугольной сетки. Построено отображение, аппроксимирующее дифференциал, и получена оценка погрешности аппроксимации, не зависящая от степени вырожденности треугольников сети. Аналогичная оценка получена для отображений, аппроксимирующих дифференциал решения уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: кусочно-линейная аппроксимация, аппроксимация дифференциала, эллиптическая система уравнений, уравнение Бельтрами, погрешность аппроксимации, триангуляция.

1. Постановка задачи

В статье исследуется кусочно-линейная аппроксимация решений эллиптических систем, заданных на нерегулярных треугольных сетках, а также аппроксимация дифференциалов таких решений. Важно, что в подобных задачах погрешность аппроксимации производных, как правило, зависит от некоторых характеристик треугольников сети (например, от максимального или минимального углов) (см. напр. [1–3]). Это в свою очередь затрудняет построение сеток, поскольку присутствие вырождающихся треугольников с углами, не удовлетворяющими определенным условиям, может привести к отсутствию сходимости производных вообще. Поэтому при изучении аппроксимации дифференциалов решений эллиптических систем определенного вида возникла задача построения отображения, приближающего дифференциал с погрешностью, не зависящей от триангуляции.

Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, в которой задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек.

Для каждого такого набора рассмотрим его триангуляцию T_m [3, с. 32]. Для всякого треугольника $S \in T_m$ определим длину d_S его максимальной стороны. Положим

$$d_m = \max_{S \in T_m} d_S.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-97021-р_Поволжье_а).

[2]Болучевская Анна Владимировна (a.v.boluch@gmail.com), кафедра компьютерных наук и экспериментальной математики Волгоградского государственного университета, 400062, Российская Федерация, г. Волгоград, пр. Университетский, 100.

Будем рассматривать такие наборы точек P_m и их триангуляции T_m, для которых

$$d_m \to 0 \text{ при } m \to \infty \tag{1.1}$$

и

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, m_0 \in \mathbb{N}:\ \forall\, m > m_0\, \forall\, x \in D\, \exists\, a \in P_m \text{ такая, что } |a - x| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Пусть $f(x)\colon D \to D^*$, $D^* \subset \mathbb{R}^2$ — отображение вида $f(x) = (U(x), V(x))$, $x = (x_1, x_2)$, где $U(x), V(x) \in C^2(D)$ являются решениями эллиптической системы уравнений [4, с. 176]

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) = -\alpha_2(x)\frac{\partial U}{\partial x_2}(x), \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) = \alpha_1(x)\frac{\partial U}{\partial x_1}(x), \end{cases} \tag{1.3}$$

а $\alpha_1(x), \alpha_2(x) \in C^1(D)$, $\alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x) > 0\, \forall x \in D$ — условие эллиптичности.

Для всякого натурального m построим приближающее отображение $f_m(x)\colon D \to D^*$, $f_m(x) = (U_m(x),\ V_m(x))$ такое, что $U_m(x), V_m(x)$ — кусочно-линейные функции и

$$f_m(a) = f(a) \text{ для любой точки } a \in P_m.$$

Для всякого $x \in D$ рассмотрим дифференциал отображения $f(x)$:

$$df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial U}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}.$$

Для всякого $S \in T_m$ требуется построить матрицу $A_m(x)$, $x \in S$, аппроксимирующую $df(x)$, и оценить погрешность аппроксимации вида

$$e(S) = \sup_{x \in S} \parallel df(x) - A_m(x) \parallel .$$

Полученная оценка не должна зависеть от степени вырожденности треугольников.

2. Оценка погрешности

Пусть в D задана прямоугольная декартова система координат. Для всякого m рассмотрим треугольник $S \in T_m$. Если l — направление наибольшей стороны треугольника, φ — угол в положительном направлении (против часовой стрелки) между этой стороной и осью абсцисс и

$$\begin{array}{ll} K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \frac{\alpha_2(x)\cos\varphi}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi}, & K_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \frac{\sin\varphi}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi}, \\ K_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \alpha_1(x)K_2, & K_4(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = -\alpha_1(x)\alpha_2(x)K_2, \\ K_5(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = -\frac{1}{\alpha_2(x)}K_1, & K_6(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \alpha_1(x)K_1, \end{array}$$

то верна

Теорема 2.1. Если $\forall x \in S$, элементы матрицы $A_m(x) = (a_{ij})$ имеют следующий вид:

$$\begin{array}{l} a_{11} = K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x), \\ a_{12} = K_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_5(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x), \\ a_{21} = K_4(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x), \\ a_{22} = K_6(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x) + K_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x), \end{array}$$

то справедлива оценка:

$$e(S) \leqslant M_1 d_m^{\alpha} + M_2 d_m^{\beta},$$

где $\alpha = \alpha(\alpha_1, \alpha_2) > 0, \beta = \beta(\alpha_1, \alpha_2) > 0, d = dist(S, \partial D), M_1 = M_1(\alpha_1, \alpha_2, U, d, diamD, \varphi)$, $M_2 = M_2(\alpha_1, \alpha_2, V, d, diamD, \varphi)$.

Доказательство. Доказательство теоремы опирается на идеи, предложенные в работе [5].

Обозначим вершины S как p_0, p_1, p_2 так, чтобы точки p_0 и p_1 образовывали максимальную сторону.

Пусть теперь $\forall\, x \in S$

$$\begin{array}{l} U_m(x) = c_1 + \langle A, x - p_0\rangle, \\ V_m(x) = c_2 + \langle B, x - p_0\rangle, \end{array}$$

где $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2), \quad a_k, b_k, c_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2$ и

$$\begin{array}{l} U_m(p_i) = U(p_i), \\ V_m(p_i) = V(p_i), \quad i = 0, 1, 2. \end{array} \tag{2.1}$$

Преобразуем систему координат путем переноса ее в точку p_0 и поворота против часовой стрелки на угол φ следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = (x_1 - x_1^0)\cos\varphi + (x_2 - x_2^0)\sin\varphi, \\ X_2 = -(x_1 - x_1^0)\sin\varphi + (x_2 - x_2^0)\cos\varphi, \end{array} \right.$$

где (X_1, X_2) — новые координаты точки x, $p_0 = (x_1^0, x_2^0)$. Тогда $U(x) = U(x_1(X_1, X_2), x_2(X_1, X_2))$, и коэффициенты матрицы $A_m(x)$ преобразуются к виду:

$$\begin{array}{llll} a_{11} = & \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) & a_{12} = & L_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x), \\ a_{21} = & \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) & a_{22} = & L_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) + L_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x), \end{array}$$

где

$$\begin{array}{l} L_1(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \frac{\sin\varphi\cos\varphi(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi}, \\ L_2(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = -\frac{1}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi}, \\ L_3(\alpha_1, \alpha_2, \varphi) = \frac{\alpha_1(x)\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi}. \end{array}$$

А система (1.3) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial V}{\partial X_1}(x) = \lambda_1(x)\frac{\partial U}{\partial X_1}(x) + \lambda_2(x)\frac{\partial U}{\partial X_2}(x), \\ \frac{\partial V}{\partial X_2}(x) = \lambda_3(x)\frac{\partial U}{\partial X_1}(x) + \lambda_1(x)\frac{\partial U}{\partial X_2}(x), \end{array} \right. \tag{2.2}$$

где

$$\begin{array}{l} \lambda_1(x) = \sin\varphi\cos\varphi\left(\alpha_2(x) - \alpha_1(x)\right), \\ \lambda_2(x) = \alpha_1(x)\sin^2\varphi + \alpha_2(x)\cos^2\varphi, \\ \lambda_3(x) = \alpha_1(x)\cos^2\varphi + \alpha_2(x)\sin^2\varphi. \end{array}$$

Поскольку функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы, то, согласно (2.1), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 + \langle A, p_i - p_0\rangle = U(p_0) + \langle \nabla U(p_0), p_i - p_0\rangle + r_1(p_i - p_0), \\ c_2 + \langle B, p_i - p_0\rangle = V(p_0) + \langle \nabla V(p_0), p_i - p_0\rangle + r_2(p_i - p_0), \end{array} \right.$$

где $r_1(p_i - p_0), r_2(p_i - p_0)$ — остаточные члены формулы Тейлора.

Учитывая, что $U(p_0) = c_1, V(p_0) = c_2$ и раскладывая векторы $A - \nabla U(p_0)$, $B - \nabla V(p_0)$, $p_i - p_0$ по базису, образованному в результате поворота системы координат, будем иметь

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0)\right)\left(X_1^i - X_1^0\right) + \left(\frac{\partial U_m}{\partial X_2}(x) - \frac{\partial U}{\partial X_2}(p_0)\right) \quad \left(X_2^i - X_2^0\right) = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = r_1(p_i - p_0), \\ \left(\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial V}{\partial X_1}(p_0)\right)\left(X_1^i - X_1^0\right) + \left(\frac{\partial V_m}{\partial X_2}(x) - \frac{\partial V}{\partial X_2}(p_0)\right) \quad \left(X_2^i - X_2^0\right) = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = r_2(p_i - p_0), \end{cases}$$

где $p_i = (X_1^i, X_2^i), i = 0, 1, 2$.

Поскольку $X_1^0 = X_2^0 = 0$ и $X_2^1 = 0$, то при $i = 1$ получим

$$\begin{cases} \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0) = \frac{r_1(p_1 - p_0)}{X_1^1}, \\ \frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial V}{\partial X_1}(p_0) = \frac{r_2(p_1 - p_0)}{X_1^1}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Система (1.3) является эллиптической в D. Следовательно, дифференцируя первое уравнение системы по x_2, второе — по x_1 и складывая уравнения, получим, что $U(x)$ удовлетворяет следующему эллиптическому уравнению второго порядка [6, с. 11]:

$$\alpha_1(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}(x) + \alpha_2(x)\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}(x) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x)\frac{\partial U}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2}(x)\frac{\partial U}{\partial x_2}(x) = 0. \tag{2.4}$$

Пусть $t \in [0, 1]$. Тогда получим

$$\nabla U(p_0 + t(x - p_0)) - \nabla U(p_0) = R(p_0 + t(x - p_0)),$$

где, в силу эллиптичности (2.4), функция $R(p_0 + t(x - p_0))$ удовлетворяет условию

$$\Big| R(p_0 + t(x - p_0)) \Big| \leqslant C_1 d^{-\alpha} |t(x - p_0)|^{\alpha},$$

где $C_1 = C_1(\alpha_1, \alpha_2, U, d, diamD)$ [6, с. 297].

Полученное равенство умножим скалярно на вектор $x - p_0$ и проинтегрируем по t. Тогда имеем

$$U(x) - U(p_0) = \langle \nabla U(p_0), x - p_0 \rangle + \int\limits_0^1 \langle R(p_0 + t(x - p_0)), x - p_0 \rangle dt.$$

Откуда, учитывая условие на $|R(p_0 + t(x - p_0))|$,

$$|U(x) - U(p_0) - \langle \nabla U(p_0), x - p_0 \rangle| \leqslant C_1 d^{-\alpha} \frac{|x - p_0|^{\alpha+1}}{\alpha + 1} \leqslant C_1 d^{-\alpha} \frac{d_S^{\alpha+1}}{\alpha + 1}.$$

Тогда из (2.3) получаем

$$\left| \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0) \right| = \frac{|r_1(p_1 - p_0)|}{d_S} \leqslant C_1 d^{-\alpha} \frac{d_S^{\alpha}}{\alpha + 1}. \tag{2.5}$$

Также ввиду эллиптичности (2.4) для всех $x \in S$ можем оценить

$$\left| \frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U}{\partial X_1}(p_0) \right| \leqslant C_1 d^{-\alpha} |x - p_0|^{\alpha} \leqslant C_1 d^{-\alpha} d_S^{\alpha}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial U}{\partial X_1}(x) - \frac{\partial U_m}{\partial X_1}(x) \right| \leqslant \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1} C_1 d^{-\alpha} d_m^{\alpha}.$$

Поскольку функция $V(x)$ также удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$\frac{1}{\alpha_2}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}(x)+\frac{1}{\alpha_1}(x)\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}(x)+\frac{\partial\left(\frac{1}{\alpha_2}\right)}{\partial x_1}(x)\frac{\partial V}{\partial x_1}(x)+\frac{\partial\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)}{\partial x_2}(x)\frac{\partial V}{\partial x_2}(x)=0,$$

то, проведя аналогичные рассуждения, получим оценку

$$\left|\frac{\partial V}{\partial X_1}(x)-\frac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\right|\leqslant\frac{\beta+2}{\beta+1}C_2d^{-\beta}d_m^{\beta},$$

где $C_2=C_2(\alpha_1,\alpha_2,V,d,diamD)$.

Теперь из системы (2.2) и уже полученных оценок имеем

$$\begin{aligned}
\Big|\tfrac{\partial U}{\partial X_2}(x)\ &-\Big(-\tfrac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\tfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)-\tfrac{1}{\lambda_2(x)}\tfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\Big)\Big|=\\
&=\Big|\tfrac{\partial U}{\partial X_2}(x)-\Big(L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\tfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)+L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\tfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\Big)\Big|\leqslant\\
&\leqslant\tfrac{\alpha+2}{\alpha+1}\big|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|C_1d^{-\alpha}d_m^{\alpha}+\tfrac{\beta+2}{\beta+1}\big|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|C_2d^{-\beta}d_m^{\beta},\\
\Big|\tfrac{\partial V}{\partial X_2}(x)\ &-\Big(\tfrac{\alpha_1(x)\alpha_2(x)}{\lambda_2(x)}\tfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)-\tfrac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\tfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\Big)\Big|=\\
&=\Big|\tfrac{\partial V}{\partial X_2}(x)-\Big(L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\tfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x)+L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\tfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x)\Big)\Big|\leqslant\\
&\leqslant\tfrac{\alpha+2}{\alpha+1}\big|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|C_1d^{-\alpha}d_m^{\alpha}+\tfrac{\beta+2}{\beta+1}\big|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|C_2d^{-\beta}d_m^{\beta}.
\end{aligned}$$

Отсюда, полагая, что $\parallel A\parallel=(a_{ij})=\sum\limits_{i,j}|a_{ij}|$, для всех $x\in S$ получим

$$\begin{aligned}
\parallel df(x)-A_m(x)\parallel\ &\leqslant\tfrac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1d^{-\alpha}\Big(1+\big|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|+\big|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|\Big)d_m^{\alpha}+\\
&+\tfrac{\beta+2}{\beta+1}C_2d^{-\beta}\Big(1+\big|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|+\big|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|\Big)d_m^{\beta}.
\end{aligned}$$

Обозначая

$$\begin{aligned}
M_1&=\tfrac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1d^{-\alpha}\Big(1+\sup_{x\in S}\big|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|+\sup_{x\in S}\big|L_3(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|\Big),\\
M_2&=\tfrac{\beta+2}{\beta+1}C_2d^{-\beta}\Big(1+\sup_{x\in S}\big|L_1(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|+\sup_{x\in S}\big|L_2(\alpha_1,\alpha_2,\varphi)\big|\Big),
\end{aligned}$$

получаем требуемое.

Следствие 2.1. Пусть в области $D\subset\mathbb{R}^2$ задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек и их триангуляций T_m. Тогда, если выполнены условия (1.1), (1.2) и $G\subset\subset D$ — произвольная компактно вложенная подобласть, то

$$\max_{S\in T_m,S\subset G}e(S)=\max_{S\in T_m,S\subset G}\sup_{x\in S}\parallel df(x)-A_m(x)\parallel\to 0\ \text{при}\ m\to\infty.$$

3. Оценка погрешности для уравнения Бельтрами

Пусть теперь D — область в $\mathbb{C}$, в которой задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек и их триангуляций T_m. Предположим также, что выполнены условия

$$d_m\to 0\ \text{при}\ m\to\infty \tag{3.1}$$

и

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,m_0\in\mathbb{N}:\ \forall\,m>m_0\,\forall\,z\in D\,\exists\,a\in P_m\ \text{такая, что}\ |a-z|<\varepsilon. \tag{3.2}$$

Пусть $f(z)$ — определенная в D комплекснозначная функция вида $f(z)==U(x_1,x_2)+iV(x_1,x_2)$, $z=x_1+ix_2\in D$, $U(x_1,x_2),V(x_1,x_2)\in C^2(D)$, удовлетворяющая уравнению Бельтрами [7, с. 80]

$$f_{\overline{z}}(z)=\mu(z)f_z(z),$$

где $|\mu(z)| < 1$, $\mu(z) = \mu_1(x_1, x_2) + i\mu_2(x_1, x_2)$, $\mu_1(x_1, x_2), \mu_2(x_1, x_2) \in C^1(D)$, $z \in D$ и

$$f_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) + i\frac{\partial f}{\partial x_2}(z)\right),$$
$$f_z(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z) - i\frac{\partial f}{\partial x_2}(z)\right).$$

Для всякого натурального m построим кусочно-линейную, определенную в D приближающую функцию $f_m(z) = U_m(x_1, x_2) + iV_m(x_1, x_2)$ такую, что

$$f_m(a) = f(a) \text{ для любой точки } a \in P_m.$$

Рассматривая $f(z)$ как отображение $(U(x_1, x_2), V(x_1, x_2))$, обозначим

$$df(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Для всякого $S \in T_m$ требуется построить отображение $A_m(z)$, $z \in S$, аппроксимирующее $df(z)$, с погрешностью вида

$$e(S) = \sup_{z \in S} \| df(z) - A_m(z) \|,$$

не зависящей от степени вырожденности треугольников сети.

Заметим, что уравнение Бельтрами приводится к эллиптической системе

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \omega_1(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \omega_2(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2), \\ \frac{\partial V}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \omega_3(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \omega_1(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, x_2), \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\omega_1(x_1, x_2) = -\frac{2\mu_1(x_1, x_2)}{1 - \mu_1^2(x_1, x_2) - \mu_2^2(x_1, x_2)},$$
$$\omega_2(x_1, x_2) = \frac{1 + 2\mu_1(x_1, x_2) + \mu_1^2(x_1, x_2) + \mu_2^2(x_1, x_2)}{1 - \mu_1^2(x_1, x_2) - \mu_2^2(x_1, x_2)},$$
$$\omega_3(x_1, x_2) = \frac{1 - 2\mu_1(x_1, x_2) + \mu_1^2(x_1, x_2) + \mu_2^2(x_1, x_2)}{1 - \mu_1^2(x_1, x_2) - \mu_2^2(x_1, x_2)}.$$

Эта система является более общим случаем системы (1.3).

Тогда, если l — направление наибольшей стороны треугольника S, φ — угол в положительном направлении (против часовой стрелки) между этой стороной и осью абсцисс и

$$K_1(\mu, \varphi) = \cos\varphi + \frac{\omega_1(x_1, x_2)}{\omega_2(x_1, x_2)}\sin\varphi,$$
$$K_2(\mu, \varphi) = \frac{1}{\omega_2(x_1, x_2)}\sin\varphi,$$
$$K_3(\mu, \varphi) = \sin\varphi - \frac{\omega_1(x_1, x_2)}{\omega_2(x_1, x_2)}\cos\varphi,$$
$$K_4(\mu, \varphi) = -\frac{1}{\omega_2(x_1, x_2)}\cos\varphi,$$
$$K_5(\mu, \varphi) = -\omega_3(x_1, x_2)\sin\varphi + \frac{\omega_1^2(x_1, x_2)}{\omega_2(x_1, x_2)}\sin\varphi,$$
$$K_6(\mu, \varphi) = \omega_3(x_1, x_2)\cos\varphi - \frac{\omega_1^2(x_1, x_2)}{\omega_2(x_1, x_2)}\cos\varphi,$$

то верна

Теорема 3.1. Пусть $\forall z \in S$, коэффициенты матрицы $A_m(z) = (a_{ij})$ имеют следующий вид:

$$a_{11} = K_1(\mu, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1, x_2) + K_2(\mu, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1, x_2),$$
$$a_{12} = K_3(\mu, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1, x_2) + K_4(\mu, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1, x_2),$$
$$a_{21} = K_5(\mu, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1, x_2) + K_1(\mu, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1, x_2),$$
$$a_{22} = K_6(\mu, \varphi)\frac{\partial U_m}{\partial l}(x_1, x_2) + K_3(\mu, \varphi)\frac{\partial V_m}{\partial l}(x_1, x_2).$$

Тогда справедлива оценка:

$$e(S) \leqslant M_1 d_m^{\alpha} + M_2 d_m^{\beta},$$

где $\alpha = \alpha(\mu) > 0, \beta = \beta(\mu) > 0, d = dist(S, \partial D), M_1 = M_1(\mu, U, d, diam D, \varphi)$, $M_2 = M_2(\mu, V, d, diam D, \varphi)$.

Доказательство. Производя поворот системы координат, аналогичный повороту, описанному в доказательстве теоремы 2.1, получаем, что $(x_1, x_2) = (x_1(X_1, X_2), x_2(X_1, X_2))$, и система (3.3) примет тот же вид, что и система (2.2):

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial X_1}(x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial X_1}(x_1, x_2) + \lambda_2(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial X_2}(x_1, x_2), \\ \frac{\partial V}{\partial X_2}(x_1, x_2) = \lambda_3(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial X_1}(x_1, x_2) + \lambda_1(x_1, x_2)\frac{\partial U}{\partial X_2}(x_1, x_2), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1, x_2) &= \tfrac{2\mu_1(x_1,x_2)\sin 2\varphi - 2\mu_2(x_1,x_2)\cos 2\varphi}{1-\mu_1^2(x_1,x_2)-\mu_2^2(x_1,x_2)}, \\ \lambda_2(x_1, x_2) &= \tfrac{1+\mu_1^2(x_1,x_2)+\mu_2^2(x_1,x_2)+2\mu_1(x_1,x_2)\cos 2\varphi+2\mu_2(x_1,x_2)\sin 2\varphi}{1-\mu_1^2(x_1,x_2)-\mu_2^2(x_1,x_2)}, \\ \lambda_3(x_1, x_2) &= \tfrac{1+\mu_1^2(x_1,x_2)+\mu_2^2(x_1,x_2)-2\mu_1(x_1,x_2)\cos 2\varphi-2\mu_2(x_1,x_2)\sin 2\varphi}{1-\mu_1^2(x_1,x_2)-\mu_2^2(x_1,x_2)}. \end{aligned}$$

А коэффициенты матрицы $A_m(z)$ также преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \tfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x_1, x_2), \\ a_{12} &= L_1(\mu, \varphi)\tfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x_1, x_2) + L_2(\mu, \varphi)\tfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x_1, x_2), \\ a_{21} &= \tfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x_1, x_2), \\ a_{22} &= L_3(\mu, \varphi)\tfrac{\partial U_m}{\partial X_1}(x_1, x_2) + L_1(\mu, \varphi)\tfrac{\partial V_m}{\partial X_1}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\mu, \varphi) &= -\tfrac{\omega_1(x_1,x_2)}{\omega_2(x_1,x_2)}, \\ L_2(\mu, \varphi) &= -\tfrac{1}{\omega_2(x_1,x_2)}, \\ L_3(\mu, \varphi) &= \omega_3(x_1, x_2) - \tfrac{\omega_1^2(x_1,x_2)}{\omega_2(x_1,x_2)}. \end{aligned}$$

Далее, поступая как в доказательстве теоремы 2.1 и полагая

$$\begin{aligned} M_1 &= \tfrac{\alpha+2}{\alpha+1}C_1 d^{-\alpha}\Big(1 + \sup_{z\in S}\big|L_1(\mu, \varphi)\big| + \sup_{z\in S}\big|L_3(\mu, \varphi)\big|\Big), \\ M_2 &= \tfrac{\beta+2}{\beta+1}C_2 d^{-\beta}\Big(1 + \sup_{z\in S}\big|L_1(\mu, \varphi)\big| + \sup_{z\in S}\big|L_2(\mu, \varphi)\big|\Big), \end{aligned}$$

получаем требуемое.

Следствие 3.1. Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ задана последовательность $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ конечных наборов точек и их триангуляций T_m. Тогда, если выполнены условия (3.1), (3.2) и $G \subset\subset D$ — произвольная компактно вложенная подобласть, то

$$\max_{S\in T_m, S\subset G} e(S) = \max_{S\in T_m, S\subset G} \sup_{z\in S} \| df(z) - A_m(z) \| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Замечание 3.1. Элементы матрицы $A_m(z)$ могут быть представлены как

$$\begin{aligned} a_{11} &= K_1(\mu, \varphi)g_1(z) + K_2(\mu, \varphi)g_2(z), \\ a_{12} &= K_3(\mu, \varphi)g_1(z) + K_4(\mu, \varphi)g_2(z), \\ a_{21} &= K_5(\mu, \varphi)g_1(z) + K_1(\mu, \varphi)g_2(z), \\ a_{22} &= K_6(\mu, \varphi)g_1(z) + K_3(\mu, \varphi)g_2(z), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \tfrac{1}{2}\left((f_m)_{\overline{z}} + \overline{(f_m)_z}\right)e^{-i\varphi} + \tfrac{1}{2}\left(\overline{(f_m)_{\overline{z}}} + (f_m)_z\right)e^{i\varphi}, \\ g_2(z) &= -\tfrac{1}{2}i\left(\overline{(f_m)_z} - (f_m)_{\overline{z}}\right)e^{i\varphi} + \tfrac{1}{2}i\left(\overline{(f_m)_{\overline{z}}} - (f_m)_z\right)e^{-i\varphi} \end{aligned}$$

или ввиду дифференцируемости $f_m(z)$,

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \tfrac{1}{2}f_m'(z)e^{-i\varphi} + \tfrac{1}{2}\overline{f_m'(z)}e^{i\varphi}, \\ g_2(z) &= -\tfrac{1}{2}if_m'(z)e^{i\varphi} + \tfrac{1}{2}i\overline{f_m'(z)}e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Замечание 3.2. Если $f(z)$ — голоморфное в D отображение, то есть $\mu(z) \equiv \equiv 0\, \forall z \in D$, тогда

$$K_1(\mu,\varphi) = K_6(\mu,\varphi) = -K_5(\mu,\varphi) = \cos\varphi,$$
$$K_2(\mu,\varphi) = K_3(\mu,\varphi) = -K_4(\mu,\varphi) = \sin\varphi.$$

Литература

[1] Субботин Ю.Н. Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Труды Математического института АН СССР. 1989. № 189. С. 117—137.
[2] Shewchuk J. What is a good linear finite element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures. Preprint, 2002. 66 p.
[3] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. М.: Мир, 1989. 478 с.
[4] Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
[5] Клячин В.А., Пабат Е.А. C^1-аппроксимация поверхностей уровня функций, заданных на нерегулярных сетках // Сиб. журн. индуст. мат. 2010. № 13(2). С. 69–78.
[6] Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 464 с.
[7] Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 134 с.

Поступила в редакцию 18/*VI*/2011;
в окончательном варианте — 19/*VII*/2011.

SMOOTH APPROXIMATION FOR THE SOLUTIONS OF ELLIPTIC SYSTEMS

 A.V. Boluchevskaya[3]

The paper is devoted to the problem of piecewise-linear approximation of mapping for the elliptic system of solutions defined on triangular grids. A mapping is build to approximate the differential, and the estimate of error of approximation that does not depend on the degree of degeneracy of triangles of the grid. An analogous estimate is obtained for mappings which approximate the differential of solution of Beltrami equation.

Key words: piecewise-linear approximation, approximation of a differential, elliptic system of equations, Beltrami equation, approximation error bound, triangulation.

Paper received 18/*VI*/2011.
Paper accepted 19/*VII*/2011.

[3]Boluchevskaya Anna Vladimirovna (`a.v.boluch@gmail.com`), the Dept. of Computer Science and Experimental Mathematics, Volgograd State University, Volgograd, 400062, Russian Federation.