МАТЕМАТИКА

УДК 517.972

МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ n-го ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2011 Т.В. Беседина[1]

Получена формула для моментной функции n-го порядка решения задачи Коши для трехмерного уравнения диффузии со случайными коэффициентами и случайным начальным условием.

Ключевые слова: уравнение диффузии, случайный процесс, моментные функции, характеристический функционал, вариационная производная.

1. Постановка задачи

Рассматривается начальная задача для уравнения диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = < \varepsilon(t), \nabla u > + \mu(t) \triangle u + f(t,x), \tag{1.1}$$

$$u(t_0, x) = u_0(x), \tag{1.2}$$

где $t \in [t_0, t_1] = T \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$ — вектор с компонентами x_1, x_2, x_3, $(\nabla u)_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, 3$, $\triangle$ – оператор Лапласа по x, $< \cdot, \cdot >$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $u : T \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — искомая функция, $\varepsilon : T \to \mathbb{R}^3$, $\mu : T \to \mathbb{R}$, $f : T \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ — случайные процессы.

Предполагается, что случайный процесс u_0 не зависит от случайных процессов ε, μ, f, и процессы ε, μ, f заданы характеристическим функционалом

$$\varphi(v, p, w) = \mathbf{M} exp(i \int\limits_T [< \varepsilon(s), v(s) > + \mu(s) p(s)] ds + i \int\limits_T \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(s,q) w(s,q) dq ds),$$

где $\mathbf{M}$ – знак математического ожидания по функции распределения процессов ε, μ и f, $v \in L_1^3(T)$, $p \in L_1(T)$, $w \in L_1(T \times \mathbb{R}^3)$, $L_1(T)$ и $L_1(T \times \mathbb{R}^3)$ – пространства суммируемых, соответственно, на отрезке T и на множестве $T \times \mathbb{R}^3$ функций.

Задача состоит в нахождении моментных функций решения задачи (1.1), (1.2).

Для нахождения моментных функций решения уравнения со случайными коэффициентами применяют различные подходы. В случае линейных дифференциальных уравнений поставленная задача может быть сведена к нахождению решений дифференциальных уравнений с обычными и вариационными производными [1; 2].

[1]Беседина Татьяна Владимировна (tanja_bes@yahoo.com), кафедра нелинейных колебаний Воронежского государственного университета, 394006, Российская Федерация, г. Воронеж, Университетская пл., 1.

В [3] получена формула моментной функции n-го порядка для дифференциального уравнения первого порядка в частных производных. В работах [4; 5] найдены математическое ожидание, вторая моментная и дисперсионные функции решения (1.1), (1.2). В данной работе выводится явная формула для моментной функции n-го порядка.

2. Характеристический функционал процессов ε, μ, f, u

Рассмотрим характеристический функционал процессов ε, μ, f, u

$$y(v,p,w,z) = \mathbf{M}e(v,p,w,z), \tag{2.1}$$

где

$$e(v,p,w,z) = exp(i\int\limits_T [< \varepsilon(s), v(s) > +\mu(s)p(s)]ds+$$

$$+i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}^3}[f(s,q)w(s,q) + u(s,q)z(s,q)]dqds),$$

$\mathbf{M}$ – знак математического ожидания по функции распределения процессов ε, μ, f и u, $z \in L_1(T\times\mathbb{R}^3)$.

Умножим (1.1), (1.2) на $e(v,p,w,z)$ и усредним по функции распределения случайных процессов ε, μ, f, u. Полученный результат формально можно записать в виде детерминированной задачи относительно y с обычными и вариационными производными

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\delta y}{\delta z(t,x)} = -i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\delta y}{\delta z(t,x)} - i\frac{\delta}{\delta p(t)}\triangle\frac{\delta y}{\delta z(t,x)} + \frac{\delta y}{\delta w(t,x)}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\delta y}{\delta z(t,x)}|_{t=t_0} = i\mathbf{M}(u_0(x)e(v,p,w,z)). \tag{2.3}$$

Отображение y будем искать в виде степенного ряда

$$y = y_0(v,p,w) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\int\ldots\int y_n(v,p,w,s_1,\ldots,s_n,x_{[1]},\ldots,x_{[n]})\times$$

$$\times z(s_1,x_{[1]})\ldots z(s_n,x_{[n]})ds_1\ldots ds_n dx_{[1]}\ldots dx_{[n]}, \tag{2.4}$$

где интегрирование ведется по переменным $s_1,\ldots,s_n$, по промежутку T, по переменным $x_{[1]},\ldots,x_{[n]}$ по $\mathbb{R}^3$, отображения y_n симметричны по парам переменных $(s_k, x_{[k]})$, $k=1,\ldots,n$.

При этом

$$\frac{\delta y}{\delta z(t,x)} = iy_1(v,p,w,t,x)+$$

$$+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n}{(n-1)!}\int\ldots\int y_n(v,p,w,t,s_1,\ldots,s_{n-1},x,x_{[1]},\ldots,x_{[n-1]})\times$$

$$\times z(s_1,x_{[1]})\ldots z(s_{n-1},x_{[n-1]})ds_1\ldots ds_{n-1}dx_{[1]}\ldots dx_{[n-1]},$$

$$\frac{\delta y}{\delta w(t,x)} = \frac{y_0(v,p,w)}{\delta w(t,x)} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\int\ldots\int\frac{\delta y_n(v,p,w,s_1,\ldots,s_n,x_{[1]},\ldots,x_{[n]})}{\delta w(t,x)}\times$$

$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_n,x_{[n]})ds_1...ds_n dx_{[1]}...dx_{[n]}.$$

Подставим (2.4) в (2.2)

$$i\frac{\partial y_1(v,p,w,t,x)}{\partial t}+$$
$$+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n}{(n-1)!}\int...\int\frac{\partial y_n(v,p,w,t,s_1,...,s_{n-1},x,x_{[1]},...,x_{[n-1]})}{\partial t}\times$$
$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_{n-1},x_{[n-1]})ds_1...ds_{n-1}dx_{[1]}...dx_{[n-1]}=$$
$$=-i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial i y_1(v,p,w,t,x)}{\partial x_k}-$$
$$-i\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n}{(n-1)!}\int...\int\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial y_n(v,p,w,t,s_1,...,s_{n-1},x,x_{[1]},...,x_{[n-1]})}{\partial x_k}\times$$
$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_{n-1},x_{[n-1]})ds_1...ds_{n-1}dx_{[1]}...dx_{[n-1]}-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta p(t)}\triangle i y_1(v,p,w,t,x)-$$
$$-i\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n}{(n-1)!}\int...\int\frac{\delta}{\delta p(t)}\triangle y_n(v,p,w,t,s_1,...,s_{n-1},x,x_{[1]},...,x_{[n-1]})\times$$
$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_{n-1},x_{[n-1]})ds_1...ds_{n-1}dx_{[1]}...dx_{[n-1]}+$$
$$+\frac{y_0(v,p,w)}{\delta w(t,x)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n!}\int...\int\frac{\delta y_n(v,p,w,s_1,...,s_n,x_{[1]},...,x_{[n]})}{\delta w(t,x)}\times$$
$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_n,x_{[n]})ds_1...ds_n dx_{[1]}...dx_{[n]}.$$

Приравняв степени по переменной z, упростив коэффициенты и воспользовавшись симметричностью y_n, получим

$$\frac{\partial y_n(v,p,w,t_1,...,t_n,x_{[1]},...,x_{[n]})}{\partial t_n}=$$
$$=-i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial y_n(v,p,w,t_1,...,t_n,x_{[1]},...,x_{[n]})}{\partial x_{[n]k}}-$$
$$-i\frac{\delta}{\delta p(t)}\triangle_{[n]}y_n(v,p,w,t_1,...,t_n,x_{[1]},...,x_{[n]})-$$
$$-i\frac{\delta y_{n-1}(v,p,w,t_1,...,t_{n-1},x_{[1]},...,x_{[n-1]})}{\delta w(t_n,x_{[n]})},\ \ n=1,2,..., \tag{2.5}$$

где $\triangle_{[n]}$ — оператор Лапласа по $x_{[n]}$.

Подставим (2.4) в (2.3)

$$iy_1(v,p,w,t_0,x)+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{i^k}{(k-1)!}\int...\int y_k(v,p,w,t_0,s_1,...,s_{k-1},x,x_{[1]},...,x_{[k-1]})\times$$
$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_{k-1},x_{[k-1]})ds_1...ds_{k-1}dx_{[1]}...dx_{[k-1]}=i\mathbf{M}(u_0(x)e(v,p,w,z)).$$

Вычислим производную от этого выражения $n-1$ порядка по z, $n=1,2,...$ в точке $(v,p,w,t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n]})$

$$i^n y_n(v,p,w,t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n]})+$$

$$+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{i^k}{(k-n)!}\int\ldots\int y_k(v,p,w,t_0,...,t_0,s_1,...,s_{k-n},x_{[1]},...,x_{[k-n]})\times$$

$$\times z(s_1,x_{[1]})...z(s_{k-n},x_{[k-n]})ds_1...ds_{k-n}dx_{[1]}...dx_{[k-n]}=$$

$$=i^n\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u_0(x_{[k]})e(v,p,w,z)).$$

Полагая в последнем выражении $z=0$, с учетом независимости процесса u_0 от процессов ε, μ, f, получим

$$y_n(v,p,w,t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n]})=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u_0(x_{[k]}))\varphi(v,p,w),\ \ n=1,2,... \tag{2.6}$$

Получили начальные задачи (2.5), (2.6) для нахождения y_n. Эти задачи рекуррентны: для нахождения y_n надо знать y_{n-1}.

Найдем y_0. Из (2.4) получаем, что $y_0 = y(v,p,w,0)$. Из (2.1) получаем $y(v,p,w,0)=\varphi(v,p,w)$. Таким образом,

$$y_0(v,p,w)=\varphi(v,p,w). \tag{2.7}$$

3. Моментная функция n-го порядка

Заметим, что

$$y_n(v,p,w,s_1,...,s_n,x_{[1]},...,x_{[n]})=i^{-n}\frac{\delta^n y(v,p,w,z)}{\delta z(s_1,x_{[1]})...\delta z(s_n,x_{[n]})}|_{z=0}.$$

Из (2.1) следует

$$\frac{\delta^n y(v,p,w,z)}{\delta z(s_1,x_{[1]})...\delta z(s_n,x_{[n]})}|_{z=0}=i^n\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u(s_k,x_{[k]})e(v,p,w,z))|_{z=0}=$$

$$=i^n\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u(s_k,x_{[k]})e(v,p,w,0)).$$

Тогда

$$y_n(0,0,0,s_1,...,s_n,x_{[1]},...,x_{[n]})=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u(s_k,x_{[k]})).$$

Таким образом, если $u(t,x)$ — решение задачи (1.1), (1.2), то моментная функция n-го порядка $\mathbf{M}(\prod\limits_{k=1}^{n}u(s_k,x_{[k]}))$ равна $y_n(0,0,0,s_1,...,s_n,x_{[1]},...,x_{[n]})$. Это является основанием для следующего определения.

Определение. Моментной функцией n-го порядка решения задачи (1.1), (1.2) называется $y_n(0,0,0,s_1,...,s_n,x_{[1]},...,x_{[n]})$, где y_n — симметричное по парам переменных $(s_k,x_{[k]})$, $k=1,...,n$ решение задачи (2.5), (2.6) в некоторой окрестности (0,0,0) переменных v,p,w. Если y_n является решением задачи (2.5), (2.6) в смысле обобщенных функций, то y_n называется обобщенной моментной функцией n-го порядка решения задачи (1.1), (1.2).

Замечание. Определение дано по той причине, что не приведены условия, при которых n-й коэффициент разложения характеристического функционала процессов ε, μ, f, u в ряд является решением задачи (2.5), (2.6).

4. Решение начальной задачи для дифференциального уравнения третьего порядка с обычными и вариационными производными

Задачи (2.5), (2.6) — это частный случай начальной задачи для дифференциального уравнения третьего порядка с обычными и вариационными производными, рассмотренной в [4]. Сформулируем этот результат с учетом особенностей задачи (2.5), (2.6).

Рассматривается задача

$$\frac{\partial z(t,x,v,p)}{\partial t} = -i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t)}\frac{\partial}{\partial x_k}z(t,x,v,p)-$$

$$-i\frac{\delta}{\delta p(t)}\triangle z(t,x,v,p)+g(t,x,v,p), \tag{4.1}$$

$$z(t_0,x,v,p)=z_0(x,v,p), \tag{4.2}$$

где $t\in T,\ x\in\mathbb{R}^3,\ v\in L_1^3(T),\ p\in L_1(T);\ z: T\times\mathbb{R}^3\times L_1^3(T)\times L_1(T)\to\mathbb{C}$ — искомая функция, $g: T\times\mathbb{R}^3\times L_1^3(T)\times L_1(T)\to\mathbb{C},\ z_0:\mathbb{R}^3\times L_1^3(T)\times L_1(T)\to\mathbb{C}$ — заданные отображения.

Пусть $\xi\in\mathbb{R}^3$ — вектор с компонентами $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$. Введем обозначения $|\xi|^2 = \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2$ и

$$\chi(t_1,t_2,s)=\begin{cases} sign(s-t_1), & \text{если } s \text{ принадлежит отрезку с концами } t_1,t_2;\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $F_x[f](\xi)$ обозначает преобразование Фурье [6] по переменной x, $F_\xi^{-1}[f](x)$ – обратное преобразование Фурье по переменной ξ.

Теорема 1. Пусть существует окрестность U нуля в $L_1^3(T)\times L_1(T)$ такая, что при всех $(v,p)\in U$ существуют непрерывные по v_k вариационные производные

$$\frac{\delta g(s,x,v-\xi\chi(s,t,\cdot),p+i|\xi|^2\chi(s,t,\cdot))}{\delta v_k(t)},\frac{\delta z_0(x,v-\xi\chi(t_0,t,\cdot),p+i|\xi|^2\chi(t_0,t,\cdot))}{\delta v_k(t)},$$

$k=1,2,3$, и непрерывные по p вариационные производные

$$\frac{\delta g(s,x,v-\xi\chi(s,t,\cdot),p+i|\xi|^2\chi(s,t,\cdot))}{\delta p(t)},\frac{\delta z_0(x,v-\xi\chi(t_0,t,\cdot),p+i|\xi|^2\chi(t_0,t,\cdot))}{\delta p(t)},$$

тогда

$$z(t,x,v,p)=F_\xi^{-1}[F_x[z_0(x,v-\xi\chi(t_0,t,\cdot),p+i|\xi|^2\chi(t_0,t,\cdot))](\xi)](x)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}F_\xi^{-1}[F_x[g(s,x,v-\xi\chi(s,t,\cdot),p+i|\xi|^2\chi(s,t,\cdot))](\xi)](x)ds \tag{4.3}$$

является решением задачи (4.1), (4.2) в смысле обобщенных функций.

5. Нахождение n-го коэффициента разложения характеристического функционала в ряд

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_n^{-1}[f] = F_{\xi_{[1]}}^{-1}[...[F_{\xi_{[n]}}^{-1}[f](x_{[n]})]...](x_{[1]}),$$
$$\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)[f] = F_{x_{[k_1]}}[...[F_{x_{[k_m]}}[f](\xi_{[k_m]}]...](\xi_{[k_1]}),$$
$$\mathcal{F}_m^{-1}(k_1,...,k_m)[f] = F_{\xi_{[k_1]}}^{-1}[...[F_{\xi_{[k_m]}}^{-1}[f](x_{[k_m]}]...](x_{[k_1]}),$$
$$G_m^n(k_1,...,k_m)\varphi(v,p,w) =$$
$$= \varphi(v - \sum_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} \xi_{[l]}\chi(t_0,t_l,\cdot) - \sum_{l=1, l\in\{k_1,...,k_m\}}^{n} \xi_{[l]}\chi(s_l,t_l,\cdot), p +$$
$$+ i \sum_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} |\xi_{[l]}|^2\chi(t_0,t_l,\cdot) + i \sum_{l=1, l\in\{k_1,...,k_m\}}^{n} |\xi_{[l]}|^2\chi(s_l,t_l,\cdot), w),$$
$$G_0^n\varphi(v,p,w) = \varphi(v - \sum_{l=1}^{n} \xi_{[l]}\chi(t_0,t_l,\cdot), p + i\sum_{l=1}^{n} |\xi_{[l]}|^2\chi(t_0,t_l,\cdot), w).$$

Теорема 2. Пусть функции $\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{k} u_0(x_{[l]}))$ суммируемы на $\mathbb{R}^3 \times ... \times \mathbb{R}^3$, $k = 1,...,n$, существует окрестность U нуля в $L_1^3(T) \times L_1(T) \times L_1(T\times\mathbb{R}^3)$ такая, что при всех $(v,p,w) \in U$ существуют непрерывные по v_k вариационные производные

$$G_n^n(1,...,n)\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta v_k(t)}, \quad G_n^n(1,...,n)\frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta v_k(t)\delta w(s_1,x_{[1]})}, \quad ...,$$
$$G_n^n(1,...,n)\frac{\delta^{n+1}\varphi(v,p,w)}{\delta v_k(t)\delta w(s_1,x_{[1]})...\delta w(s_n,x_{[n]})}, \quad k = 1,2,3$$

и непрерывные по p вариационные производные

$$G_n^n(1,...,n)\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta p(t)}, \quad G_n^n(1,...,n)\frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta p(t)\delta w(s,x)}, \quad ...,$$
$$G_n^n(1,...,n)\frac{\delta^{n+1}\varphi(v,p,w)}{\delta p(t)\delta w(s_1,x_{[1]})...\delta w(s_n,x_{[n]})},$$

тогда

$$y_n(v,p,w,t_1,...,t_n,x_{[1]},...,x_{[n]}) = \mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n} \mathcal{F}_n^{-1}[G_0^n\varphi(v,p,w)] +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n-1}(-i)^m \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n} \int_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$
$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$
$$[G_m^n(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}]]ds_{k_m}...ds_{k_1} +$$

$$+(-i)^n \int\limits_{t_0}^{t_1} ... \int\limits_{t_0}^{t_n} \mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_n(1,...,n)[G_n^n(1,...,n)\frac{\delta^n\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_1,x_{[1]})...\delta w(s_n,x_{[n]})}]]ds_n...ds_1 \quad (5.1)$$

является решением задачи (2.5), (2.6) в смысле обобщенных функций.

Знак $*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$ обозначает свертку по переменным x с указанными индексами.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

Справедливость формулы (5.1) при $n = 1$ доказана в работах [4; 5]. Пусть формула (5.1) верна при n, покажем, что она верна и при $n+1$.

С учетом (5.1) задача (2.5), (2.6) для y_{n+1} запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_{n+1},x_{[1]},...,x_{[n+1]})}{\partial t_{n+1}} =$$

$$= -i\sum_{k=1}^{3}\frac{\delta}{\delta v_k(t_{n+1})}\frac{\partial y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_{n+1},x_{[1]},...,x_{[n+1]})}{\partial x_{n+1}}-$$

$$-i\frac{\delta}{\delta p(t_{n+1})}\triangle_{[n+1]}y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_{n+1},x_{[1]},...,x_{[n+1]})-$$

$$-i\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n} \mathcal{F}_n^{-1}[G_0^n\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(t_{n+1},x_{[n+1]})}]+$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}(-i)^{m+1}\sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t_{k_1}}...\int\limits_{t_0}^{t_{k_m}}\mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n}u_0(x_{[l]}))*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^n(k_1,...,k_m)\frac{\delta^{m+1}\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})\delta w(t_{n+1},x_{[n+1]})}]]ds_{k_m}...ds_{k_1}+$$

$$+(-i)^{n+1}\int\limits_{t_0}^{t_1}...\int\limits_{t_0}^{t_n}\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_n(1,...,n)$$

$$[G_n^n(1,...,n)\frac{\delta^{n+1}\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_1,x_{[1]})...\delta w(s_n,x_{[n]})\delta w(t_{n+1},x_{[n+1]})}]]ds_n...ds_1, \quad (5.2)$$

$$y_{n+1}(v,p,w,t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n+1]}) = \mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))\varphi(v,p,w). \quad (5.3)$$

Положим в (5.2) $t_1,...,t_n$ равными t_0. Так как $\chi(t_0,t_0,\cdot) = 0$, то $G_0^n = I$ — оператор тождественного преобразования. $k_1,...,k_m$ принимают значения от 1 до n, следовательно, $t_{k_1},...,t_{k_m}$ равны t_0, и все интегралы в (5.2) обращаются в ноль.

Для решения полученной задачи воспользуемся результатом теоремы 1.

$$y_{n+1}(v,p,w,t_0,...,t_0,t_{n+1},x_{[1]},...,x_{[n+1]}) =$$

$$= F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[F_{x_{[n+1]}}[\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))\times$$

$$\times\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w))](\xi_{[n+1]})](x_{[n+1]})+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}} F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[F_{x_{[n+1]}}[-i\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n}$$

$$*_{1,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[\frac{\delta}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+$$

$$+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]](\xi_{[n+1]})](x_{[n+1]})ds_{n+1}=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1} u_0(x_{[k]}))*_{n+1}$$

$$*_{n+1}F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w))]](x_{[n+1]})-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}}\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[\frac{\delta}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)](x_{[n+1]})]ds_{n+1}.$$

Так как y_{n+1} симметрично относительно $(t_1,x_{[1]})$ и $(t_{n+1},x_{[n+1]})$, то

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n+1]})=$$

$$=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1} u_0(x_{[k]}))*_1\mathcal{F}_1^{-1}(1)[G_0^1\varphi(v,p,w)]-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{k=2}^{n+1} u_0(x_{[k]}))*_{2,...,n+1}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[\mathcal{F}_1(1)[G_1^1(1)\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_1,x_{[1]})}]]ds_1. \qquad (5.4)$$

Положим в (5.2) $t_2,...,t_n$ равными t_0. В этом случае $G_0^n=G_0^1$, все интегралы в (5.2) обратятся в ноль, кроме интеграла с верхним пределом t_1:

$$(-i)^{1+1}\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{l=2}^{n} u_0(x_{[l]}))*_{2,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_1(1)[G_1^1(1)\frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_1,x_{[1]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}]]ds_1.$$

Для решения полученной задачи с начальным условием (5.4) воспользуемся результатом теоремы 1.

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,t_0,...,t_0,t_{n+1},x_{[1]},...,x_{[n+1]})=F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[F_{x_{[n+1]}}[\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1} u_0(x_{[k]}))*_1$$

$$*_1\mathcal{F}_1^{-1}(1)[G_0^1\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{k=2}^{n+1} u_0(x_{[k]}))*_{2,...,n+1}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[\mathcal{F}_1(1)[G_1^1(1)\frac{\delta}{\delta w(s_1,x_{[1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]]ds_1](\xi_{[n+1]})](x_{[n+1]})+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}} F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[F_{x_{[n+1]}}[-i\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n}$$

$$*_{1,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[G_0^1\frac{\delta\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}]-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{l=2}^{n}u_0(x_{[l]}))*_{2,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_1(1)[G_1^1(1)\frac{\delta^2}{\delta w(s_1,x_{[1]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_1](\xi_{[n+1]})](x_{[n+1]})ds_{n+1}=$$

$$=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{1,n+1}$$

$$*_{1,n+1}\mathcal{F}_2^{-1}(1,n+1)[G_0^1\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{k=2}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{2,...,n+1}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_1(1)[G_1^1(1)\frac{\delta}{\delta w(s_1,x_{[1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]]ds_1-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}}\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_1(n+1)[G_0^1\frac{\delta}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{n+1}-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{l=2}^{n}u_0(x_{[l]}))*_{2,...,n}$$

$$*_{2,...,n}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_2(1,n+1)[G_1^1(1)\frac{\delta^2}{\delta w(s_1,x_{[1]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_1ds_{n+1}.$$

Воспользуемся симметричностью y_{n+1} относительно $(t_2,x_{[2]})$ и $(t_{n+1},x_{[n+1]})$

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,t_2,t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n+1]})=$$

$$=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{1,2}\mathcal{F}_2^{-1}(1,2)[G_0^2\varphi(v,p,w)]-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{k=2}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{2,...,n+1}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_1(1)[G_1^2(1)\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_1,x_{[1]})}]]ds_1-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_2}\mathbf{M}(\prod_{k=1,\neq 2}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{1,3,...,n+1}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_1(2)[G_1^2(2)\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_2,x_{[2]})}]]ds_2-$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\mathbf{M}(\prod_{k=3}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{3,...,n+1}$$

$$*_{3,...,n+1}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_2(1,2)[G_2^2(1,2)\frac{\delta^2\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_1,x_{[1]})\delta w(s_2,x_{[2]})}]]ds_1ds_2. \qquad (5.5)$$

На основании формул (5.4), (5.5) предположим, что

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_j,t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n+1]})=$$

$$= \mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,j} \mathcal{F}_j^{-1}(1,...,j)[G_0^j \varphi(v,p,w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{j}(-i)^m \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j} \int_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n+1} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^j(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m \varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}]]ds_{k_m}...ds_{k_1}. \quad (5.6)$$

Для доказательства вновь воспользуемся методом математической индукции. Пусть формула (5.6) верна при j, покажем, что она верна и при $j+1$.

Положим в (5.6) $t_{j+1},...,t_n$ равными t_0. В этом случае $G_0^n = G_0^j$ и $G_m^n(k_1,...,k_m) = G_m^j(k_1,...,k_m)$. В (5.2) интегралы с верхними пределами $t_{j+1},...,t_n$ обратятся в ноль, останутся следующие интегралы:
$\sum\limits_{m=1}^{j}(-i)^{m+1} \sum\limits_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j} \int\limits_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int\limits_{t_0}^{t_{k_m}} ... .$

По теореме 1 решение полученной задачи с начальным условием (5.6) находится по формуле

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_j,t_0,...,t_0,t_{n+1},x_{[1]},...,x_{[n+1]}) =$$

$$= F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[F_{x_{[n+1]}}[\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,j}$$

$$*_{1,...,j}\mathcal{F}_j^{-1}(1,...,j)[G_0^j \varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot), p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{j}(-i)^m \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j} \int_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n+1} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^j(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+$$

$$+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}](\xi_{[n+1]})](x_{[n+1]})+$$

$$+\int_{t_0}^{t_{n+1}} F^{-1}_{\xi_{[n+1]}}[F_{x_{[n+1]}}[-i\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n}$$

$$*_{1,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[G_0^j \frac{\delta\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}]+$$

$$+\sum_{m=1}^{j}(-i)^{m+1} \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j} \int_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^j(k_1,...,k_m)\frac{\delta^{m+1}}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+$$

$$+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}](\xi_{[n+1]}))](x_{[n+1]})ds_{n+1}=$$

$$=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{1,...,j,n+1}\mathcal{F}^{-1}_{j+1}(1,...,j,n+1)[G^j_0\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{j}(-i)^m\sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j}\int_{t_0}^{t_{k_1}}...\int_{t_0}^{t_{k_m}}\mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n+1}u_0(x_{[l]}))*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G^j_m(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}-$$

$$-i\int_{t_0}^{t_{n+1}}\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[\mathcal{F}_1(n+1)[G^j_0\frac{\delta}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{n+1}+\sum_{m=1}^{j}(-i)^{m+1}\times$$

$$\times\sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j}\int_{t_0}^{t_{n+1}}\int_{t_0}^{t_{k_1}}...\int_{t_0}^{t_{k_m}}\mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n}u_0(x_{[l]}))*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[\mathcal{F}_{m+1}(k_1,...,k_m,n+1)$$

$$[G^j_m(k_1,...,k_m)\frac{\delta^{m+1}}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}ds_{n+1}.$$

Воспользуемся симметричностью y_{n+1} относительно $(t_{j+1},x_{[j+1]})$ и $(t_{n+1},x_{[n+1]})$

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_{j+1},t_0,...,t_0,x_{[1]},...,x_{[n+1]})=$$

$$=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{1,...,j+1}\mathcal{F}^{-1}_{j+1}(1,...,j+1)[G^{j+1}_0\varphi(v,p,w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{j}(-i)^m\sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j}\int_{t_0}^{t_{k_1}}...\int_{t_0}^{t_{k_m}}\mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n+1}u_0(x_{[l]}))*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G^{j+1}_m(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}]]ds_{k_m}...ds_{k_1}-$$

$$-i\int_{t_0}^{t_{j+1}}\mathbf{M}(\prod_{k=1,\neq j+1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n+1,\neq j+1}\mathcal{F}^{-1}_{n+1}[\mathcal{F}_1(j+1)$$

$$[G^{j+1}_1(j+1)\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}]]ds_{n+1}+\sum_{m=1}^{j}(-i)^{m+1}\times$$

$$\times \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{j} \int\limits_{t_0}^{t_{j+1}} \int\limits_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int\limits_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m,j+1\}}^{n+1} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m,j+1\}}$$

$$*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m,j+1\}} \mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_{m+1}(k_1,...,k_m,j+1)$$

$$[G_{m+1}^{j+1}(k_1,...,k_m,j+1)\frac{\delta^{m+1}}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\times$$

$$\times\varphi(v,p,w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}ds_{n+1}.$$

Преобразовав суммы в проследнем выражении, получим правую часть (5.6), записанную для $j+1$. Таким образом, формула (5.6) верна.

Пусть $j=n$, тогда

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_n,t_0,x_{[1]},...,x_{[n+1]}) =$$

$$= \mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n} \mathcal{F}_n^{-1}(1,...,n)[G_0^n\varphi(v,p,w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(-i)^m \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int\limits_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n+1} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^n(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}]]ds_{k_m}...ds_{k_1}. \tag{5.7}$$

Решим задачу (5.2), (5.7). По теореме 1

$$y_{n+1}(v,p,w,t_1,...,t_{n+1},x_{[1]},...,x_{[n+1]}) = F_{\xi_{[n+1]}}^{-1}[F_{x_{[n+1]}}[\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n}$$

$$*_{1,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}(1,...,n)[G_0^n\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(-i)^m \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int\limits_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n+1} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^n(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),p+$$

$$+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(t_0,t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}](\xi_{[n+1]})](x_{[n+1]})+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}} F_{\xi_{[n+1]}}^{-1}[F_{x_{[n+1]}}[-i\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n}$$

$$*_{1,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[G_0^n\frac{\delta}{\delta w(t_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+$$

$$+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}(-i)^{m+1} \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int\limits_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^n(k_1,...,k_m)\frac{\delta^{m+1}}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})\delta w(t_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}+$$

$$+(-i)^{n+1}\int\limits_{t_0}^{t_1}...\int\limits_{t_0}^{t_n}\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_n(1,...,n)$$

$$[G_n^n(1,...,n)\frac{\delta^{n+1}}{\delta w(s_1,x_{[1]})...\delta w(s_n,x_{[n]})\delta w(t_{n+1},x_{[n+1]})}\varphi(v-$$

$$-\xi_{[n+1]}\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),p+i|\xi_{[n+1]}|^2\chi(s_{n+1},t_{n+1},\cdot),w)]]ds_n...ds_1](x_{[n+1]})ds_{n+1}=$$

$$=\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n+1}u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n+1}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[G_0^{n+1}\varphi(v,p,w)]+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}(-i)^m\sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t_{k_1}}...\int\limits_{t_0}^{t_{k_m}}\mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n+1}u_0(x_{[l]}))*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n+1,\notin\{k_1,...,k_m\}}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^{n+1}(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}]]ds_{k_m}...ds_{k_1}](\xi_{[n+1]})](x_{[n+1]})-$$

$$-i\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}}\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}u_0(x_{[k]}))*_{1,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[G_1^{n+1}(n+1)\frac{\delta\varphi(v,p,w)}{\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}]ds_{n+1}+$$

$$+\sum_{m=1}^{n-1}(-i)^{m+1}\times$$

$$\times\sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}}\int\limits_{t_0}^{t_{k_1}}...\int\limits_{t_0}^{t_{k_m}}\mathbf{M}(\prod_{l=1,l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n}u_0(x_{[l]}))*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_{m+1}(k_1,...,k_m,n+1)$$

$$[G_{m+1}^{n+1}(k_1,...,k_m,n+1)\frac{\delta^{m+1}}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\times$$

$$\times\varphi(v,p,w)]]ds_{k_m}...ds_{k_1}ds_{n+1}+(-i)^{n+1}\int\limits_{t_0}^{t_1}...\int\limits_{t_0}^{t_n}\int\limits_{t_0}^{t_{n+1}}\mathcal{F}_{n+1}^{-1}[\mathcal{F}_{n+1}(1,...,n+1)$$

$$[G_{n+1}^{n+1}(1,...,n+1)\frac{\delta^{n+1}}{\delta w(s_1,x_{[1]})...\delta w(s_n,x_{[n]})\delta w(s_{n+1},x_{[n+1]})}\times$$

$$\times\varphi(v,p,w)]]ds_{n+1}ds_n...ds_1](x_{[n+1]})ds_{n+1}.$$

Преобразовав суммы в проследнем выражении, получим правую часть (5.1), записанную для $n+1$. Таким образом, формула (5.1) верна.

Теорема доказана.

6. Нахождение моментной функции n-го порядка

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда

$$\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u(t_k, x_{[k]})) =$$

$$= \mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n} \mathcal{F}_n^{-1}[G_0^n \varphi(0,0,0)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} (-i)^m \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n} \int_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)$$

$$[G_m^n(k_1,...,k_m) \frac{\delta^m \varphi(0,0,0)}{\delta w(s_{k_1}, x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m}, x_{[k_m]})}]] ds_{k_m}...ds_{k_1} +$$

$$+(-i)^n \int_{t_0}^{t_1} ... \int_{t_0}^{t_n} \mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_n(1,...,n)[G_n^n(1,...,n) \frac{\delta^n \varphi(0,0,0)}{\delta w(s_1, x_{[1]})...\delta w(s_n, x_{[n]})}]] ds_n...ds_1 \quad (6.1)$$

является обобщенной моментной функцией n-го порядка решения задачи (1.1), (1.2).

Доказательство. По определению положим в (5.1) переменные v, p, w равными нулю, получим формулу (6.1).

Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай. Пусть случайный процесс f не зависит от процессов ε, μ. В этом случае

$$\varphi(v,p,w) = \varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)\varphi_f(w),$$

где $\varphi_{\varepsilon,\mu}(v,p)$ и $\varphi_f(w)$ — характеристические функционалы процессов ε, μ и f соответственно.

Теорема 4. Если случайный процесс f не зависит от процессов ε, μ, функции $\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{k} f(s_l, x_{[l]}))$ суммируемы на $T \times ... \times T \times \mathbb{R}^3 \times ... \times \mathbb{R}^3$, $k = 1,...,n$, кроме того, выполнены условия теоремы 2, тогда

$$\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u(t_k, x_{[k]})) =$$

$$= \mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n} u_0(x_{[k]})) *_{1,...,n} \mathcal{F}_n^{-1}[G_0^n \varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{k_1<k_2<...<k_m=1}^{n} \int_{t_0}^{t_{k_1}} ... \int_{t_0}^{t_{k_m}} \mathbf{M}(\prod_{l=1, l\notin\{k_1,...,k_m\}}^{n} u_0(x_{[l]})) *_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}}$$

$$*_{1,...,n,\notin\{k_1,...,k_m\}} \mathcal{F}_n^{-1}[G_m^n(k_1,...,k_m)\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)] *_{k_1,...,k_m}$$

$$*_{k_1,...,k_m} \mathbf{M}(\prod_{l=1}^{m} f(s_{k_l}, x_{[k_l]})) ds_{k_m}...ds_{k_1} +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}...\int\limits_{t_0}^{t_n}\mathcal{F}_n^{-1}[G_n^n(1,...,n)\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)]*_{1,...,n}\mathbf{M}(\prod_{k=1}^{n}f(s_k,x_{[k]}))ds_n...ds_1 \tag{6.2}$$

является обобщенной моментной функцией n-го порядка решения задачи (1.1), (1.2).

Доказательство.

$$G_0^n\varphi(0,0,0)=G_0^n\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)\varphi_f(0)=G_0^n\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0),$$

$$G_m^n(k_1,...,k_m)\frac{\delta^m\varphi(0,0,0)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}=G_m^n(k_1,...,k_m)\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)\times$$

$$\times\frac{\delta^m\varphi_f(0)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}.$$

$$\varphi_f(w)=\mathbf{M}exp(i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}^3}f(s,q)w(s,q)dqds),$$

тогда

$$\frac{\delta^m\varphi_f(0)}{\delta w(s_{k_1},x_{[k_1]})...\delta w(s_{k_m},x_{[k_m]})}=$$

$$=i^m\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{m}f(s_{k_l},x_{[k_l]})exp(i\int\limits_T\int\limits_{\mathbb{R}^3}f(s,q)w(s,q)dqds))|_{w=0}=$$

$$=i^m\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{m}f(s_{k_l},x_{[k_l]})).$$

$$\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)[G_m^n(k_1,...,k_m)\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)i^m\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{m}f(s_{k_l},x_{[k_l]}))]]=$$

$$=i^m\mathcal{F}_n^{-1}[G_m^n(k_1,...,k_m)\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)[\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{m}f(s_{k_l},x_{[k_l]}))]]=$$

$$=i^m\mathcal{F}_n^{-1}[G_m^n(k_1,...,k_m)\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)]*_{1,...,n}\mathcal{F}_n^{-1}[\mathcal{F}_m(k_1,...,k_m)[\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{m}f(s_{k_l},x_{[k_l]}))]]=$$

$$=i^m\mathcal{F}_n^{-1}[G_m^n(k_1,...,k_m)\varphi_{\varepsilon,\mu}(0,0)]*_{k_1,...,k_m}\mathbf{M}(\prod_{l=1}^{m}f(s_{k_l},x_{[k_l]})).$$

Подставив эти соотношения в (6.1), получим (6.2).

Теорема доказана.

Заключение

Полученые формулы могут использоваться для нахождения моментных функций n-го порядка для решения задачи Коши, коэффициенты уравнения и начальное условие которой являются различными случайными процессами, если известен характеристический функционал процессов ε, μ, f и моментные функции u_0 до n-го порядка включительно. В случае, если случайный процесс f не зависит от процессов ε, μ, требуется знать не характеристический функционал процесса f, а всего лишь моментные функции до n-го порядка включительно.

Литература

[1] Задорожний В.Г. Методы вариационного анализа. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2006. 316 с.

[2] Задорожний В.Г. О нахождении моментных функций решения задачи Коши уравнения диффузии со случайными коэффициентами // Известия АН РАН. Сер.: Математическая. 2002. Т. 66. № 4. С. 119–136.

[3] Строева Л.Н. Моментная функция N-го порядка решения линейного дифференциального уравнения первого порядка в частных производных со случайными коэффициентами // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики ВГУ, 2002. Вып. 3. С. 193–208.

[4] Беседина Т.В., Задорожний В.Г. О трехмерном стохастическом уравнении диффузии // International Scientific Journal "Spectral and evolution problems". 2009. № 19. P. 13–20.

[5] Беседина Т.В., Задорожний В.Г. Моментные функции решения уравнения переноса и диффузии // Вестник ВГУ. Сер.: Физика. Математика. 2010. № 2. С. 15–25.

[6] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

Поступила в редакцию 4/IV/2011;
в окончательном варианте — 4/IV/2011.

N-ORDER MOMENT FUNCTION FOR THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFUSION EQUATION WITH RANDOM COEFFICIENTS

 T.V. Besedina[2]

Formula for n-order moment function for the solution of the Cauchy problem for three-dimensional diffusion equation with random coefficients and random initial condition is derived.

Key words: diffusion equation, random processes, moment function, characteristic functional, variational derivative.

Paper received 4/IV/2011.
Paper accepted 4/IV/2011.

[2]Besedina Tatiana Vladimirovna (tanja_bes@yahoo.com), the Dept. of Nonlinear Oscillations, Voronezh State University, Voronezh, 394006, Russian Federation.