

ОПТИМАЛЬНОЕ ПО МИНИМУМУ РАСХОДОВ УПРАВЛЕНИЕ ТРОЙНЫМ ИНТЕГРАТОРОМ

© 2012 Ю.Н. Горелов,¹ М.В. Морозова²

Рассматривается решение задачи оптимального управления тройным интегратором с произвольными граничными условиями методом моментов. Показано, что в случае минимизации полного импульса управляющего воздействия или расхода управления решение L_∞ -проблемы моментов аппроксимируется оптимальным импульсным управлением. Получено общее решение задачи и исследована структура оптимального управления. Рассмотрен пример решения задачи с симметричными граничными условиями.

Ключевые слова: тройной интегратор, оптимальное управление, расходы управления, проблема моментов, принцип максимума Красовского, импульсное управление.

1. Постановка задачи

Угловое движение космического аппарата (КА), рассматриваемое по одному из каналов управления его ориентацией на заданном интервале $[t_0, t_f]$, описывается уравнениями

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \omega(t); \quad \frac{d\omega(t)}{dt} = \varepsilon(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f],$$

где $\gamma(t)$ — угол поворота, $\omega(t)$ — угловая скорость, $\varepsilon(t)$ — угловое ускорение, обусловленное как управляющими, так и возмущающими воздействиями, включая сюда и перекрестные связи между каналами управления, а именно: $\varepsilon(t)$ — сумма относительного управляющего момента $m(t)$ и возмущающих ускорений $f(t)$, то есть $\varepsilon(t) = m(t) + f(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f]$. В том случае, если управляющие моменты для КА создаются с помощью электромеханических исполнительных органов [1], то простейшая модель для $m(t)$ имеет вид

$$\frac{dm(t)}{dt} = u(t),$$

где $u(t)$ — управляющий параметр (или скорость изменения управляющего ускорения), на который в общем случае может накладываться ограничение: $|u(t)| \leq u_0$, $\forall t \in [t_0, t_f]$, где u_0 — его максимально допустимое значение.

¹Горелов Юрий Николаевич (yungor07@mail.ru), Институт проблем управления сложными системами РАН, 443020, Российская Федерация, г. Самара, ул. Садовая, 61; НОЦ СамГУ "Космические системы дистанционного зондирования" 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

²Морозова Марина Валериевна (morozova_mv@list.ru), кафедра информатики и вычислительной математики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Поэтому уравнения состояния, описывающие движение КА по каждому каналу управления его ориентацией, суть модель тройного интегратора:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t); \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t) + f(t); \quad \frac{dx_3(t)}{dt} = u(t), \quad (1.1)$$

где $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ — фазовые переменные, $f(t)$ — некоторая функция, которая здесь будет предполагаться известной функцией времени, а $u(t)$ — управляющий параметр. Отметим, что система (1.1) является вполне управляемой [2; 3].

Модель маневра переориентации КА задается граничными условиями для кинематических характеристик его углового движения и относительного управляющего момента. Граничные условия для объекта управления (1.1) в общем случае имеют следующий вид:

$$x_1(t_0) = x_{10}; \quad x_2(t_0) = x_{20}; \quad x_3(t_0) = x_{30}; \quad (1.2)$$

$$x_1(t_f) = x_{1f}; \quad x_2(t_f) = x_{2f}; \quad x_3(t_f) = x_{3f}, \quad (1.3)$$

где $x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{1f}, x_{2f}$ и x_{3f} — некоторые константы, значения которых таковы, что рассматриваемый маневр переориентации КА нетривиален, и, кроме того, здесь t_0 и t_f — фиксированные начальный и конечный моменты времени интервала управления, а $T = t_f - t_0$ — длительность маневра.

Задача управления (1.1)–(1.3) есть двухточечная граничная задача, и для нее здесь требуется найти такое управление $u(\cdot) = u[t_0, t_f]$, которое минимизирует функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)| d\tau. \quad (1.4)$$

Критерий оптимальности (1.4) в [2] рассматривается как расход "топлива" за маневр, а в [3] — как полный импульс управляющего воздействия. В общем случае (1.4) можно рассматривать как суммарную величину расходов управления за маневр.

1.1. Основные соотношения

Уравнения состояния объекта управления (1.1) можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{f}(t), \quad (1.5)$$

где $\mathbf{x}(t) = \text{col}[x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$ — вектор-столбец фазовых переменных, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица динамики, $\mathbf{b} = \text{col}(0, 0, 1)$, а $\mathbf{f}(t) = \text{col}(0, f(t), 0)$. Со-

ответственно граничные условия (1.2), (1.3) для объекта управления (1.1) также переписываются в виде

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (1.6)$$

где с учетом (1.2), (1.3) $\mathbf{x}_0 = \text{col}(x_{10}, x_{20}, x_{30})$, $\mathbf{x}_f = \text{col}(x_{1f}, x_{2f}, x_{3f})$.

Как известно, переходное отображение для управляемой системы (1.5) задается формулой Коши:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)[\mathbf{b}u(\tau) + \mathbf{f}(\tau)]d\tau, \quad (1.7)$$

где Φ — переходная матрица системы, с учетом вида которой для (1.5) тогда получим

$$\Phi(t_f, \tau)\mathbf{b} = \mathbf{h}(\tau) = \text{col}[h_1(\tau), h_2(\tau), h_3(\tau)],$$

где

$$h_1(\tau) = \frac{1}{2}(t_f - \tau)^2; \quad h_2(\tau) = t_f - \tau; \quad h_3(\tau) = 1, \quad \forall \tau \in [t_0, t_f]. \quad (1.8)$$

Введем также вектор-функцию $\mathbf{g}(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau$ с компонентами

$$g_1(t) = \int_{t_0}^t (t - \tau)f(\tau)d\tau; \quad g_2(t) = \int_{t_0}^t f(\tau)d\tau; \quad g_3(t) \equiv 0. \quad (1.9)$$

При $t = t_f$ (1.7) можно переписать в виде

$$\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)\mathbf{b}u(\tau)d\tau = \mathbf{c}, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{x}_f - \Phi(t_f, t_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{g}(t_f) = \text{col}(c_1, c_2, c_3)$, а компоненты этого вектора вычисляются с учетом (1.6), (1.8) и (1.9) по формулам:

$$\begin{aligned} c_1 &= x_{1f} - x_{10} - (t_f - t_0)x_{20} - \frac{1}{2}(t_f - t_0)^2x_{30} - g_1(t_f); \\ c_2 &= x_{2f} - x_{20} - (t_f - t_0)x_{30} - g_2(t_f); \quad c_3 = x_{3f} - x_{30}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнение (1.10) с учетом (1.8) также можно переписать в виде системы равенств, называемых моментными:

$$\int_{t_0}^{t_f} h_k(\tau)u(\tau)d\tau = c_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.12)$$

Таким образом, решение двухточечной граничной задачи (1.5), (1.6) сводится к решению уравнения моментов (1.10) относительно управления $u(\cdot) = u[t_0, t_f]$ или, что то же самое, к проблеме моментов [3; 4]. Если дополнительно потребовать, чтобы искомое управление доставляло минимум какому-либо показателю его качества, например в виде (1.4), тогда задача (1.4)–(1.6) становится задачей оптимального управления. Очевидно, что (1.4) — функционал типа нормы в пространстве $L_1[t_0, t_f]$, поскольку $J(u) = \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)|d\tau = \|u(\cdot)\|_{L_1}$. В связи с этим задача (1.4), (1.12) — оптимальная L_∞ -проблема моментов. В приведенной постановке задача оптимального управления тройным интегратором ранее не рассматривалась.

1.2. Принцип максимума Н.Н. Красовского

В соответствии с данной постановкой задачи (1.4)–(1.6) и формулировкой проблемы моментов [3; 4] в (1.8) $h_k(\cdot) \in L_\infty[t_0, t_f]$, $k = 1, 2, 3$, то есть эти функции суть элементы пространства измеримых существенно ограниченных на интервале $[t_0, t_f]$ функций. Так как в L_∞ норма определяется как существенный (истинный) максимум

$$\|h_k(\cdot)\|_{L_\infty} = \text{vrai max}_{t \in [t_0, t_f]} |h_k(t)|,$$

то здесь для (1.8) норма вводится так:

$$\|h_k(\cdot)\|_{L_\infty} = \max_{t \in [t_0, t_f]} |h_k(t)|.$$

Поскольку функции (1.8) линейно независимы на любом интервале $[t_0, t_f]$ (для любых $0 < T < \infty$), то уравнения (1.10) для задачи (1.5), (1.6) разрешимы для любых чисел c_k (1.11), из которых хотя бы одно должно отличаться от нуля (это означает нетривиальность маневра переориентации КА). Решение системы уравнений (1.10) состоит в том, чтобы найти такой линейный ограниченный функционал $\phi \in L_\infty^*$, который здесь имеет вид: $\phi[h(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} h(\tau)u(\tau)d\tau$, что для него выполняется система равенств (1.10):

$$\phi[h_k(\cdot)] = c_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.13)$$

Функционал ϕ в (1.13) называют разрешающим данную проблему моментов.

Если система (1.10) разрешима, тогда существует минимальный элемент $h_0(\cdot) \in P$ [3; 4]:

$$P = \left\{ h(\cdot) : h(\cdot) = \sum_{k=1}^3 l_k h_k(\cdot), \sum_{k=1}^3 l_k c_k = 1 \right\}, \quad (1.14)$$

и для него выполняется следующее условие: $0 < \rho_0 = \|h_0(\cdot)\|_{L_\infty} \leq \|h(\cdot)\|_{L_\infty}$, $\forall h(\cdot) \in P$, которое является необходимым и достаточным для разрешимости любой конечномерной проблемы моментов в L_p , $1 \leq p \leq \infty$ [3]. При этом для разрешающего функционала имеет место: $\phi[h(\cdot)] = 1$, $\forall h(\cdot) \in P$. Поскольку $h_0(\cdot) \in P$, то и $\phi[h_0(\cdot)] = 1$. Для разрешающего функционала имеет место оценка: $\|\phi\|_{L_p^*} \geq 1/\rho_0$. Соответственно норма оптимального разрешающего функционала ϕ_0 равна: $\|\phi_0\|_{L_\infty^*} = 1/\rho_0$ [4].

В силу изометрического изоморфизма [3; 4] $\mathbf{I}: L_p^*[t_0, t_f] \rightarrow L_q[t_0, t_f]$, $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, для задач оптимального управления типа (1.4)–(1.6) и соответствующим им оптимальным проблемам моментов имеет место

$$\min_{u(\cdot)} \|u(\cdot)\|_{L_q} = \min_{\phi} \|\phi\|_{L_p^*} = \frac{1}{\rho_0}.$$

На этом равенстве основывается правило минимакса [3] или принцип максимума Н.Н. Красовского [4] как универсальный метод решения задач оптимального управления линейными системами.

Принцип максимума Н.Н. Красовского [4]. Пусть $h_0(\tau) = \mathbf{I}_0^T \Phi(t_f, \tau) \mathbf{b}$ — решение задачи (по $\mathbf{l} = \mathbf{l}_0$):

$$\min_{\mathbf{l}^T \mathbf{c} = 1} \|\mathbf{l}^T \Phi(t_f, \cdot) \mathbf{b}\|_{L_p} = \rho_0,$$

где $\mathbf{l} = \text{col}(l_1, l_2, l_3, \dots)$ и $\mathbf{c} = \text{col}(c_1, c_2, c_3, \dots)$. Тогда если задача

$$\max_{\|u(\cdot)\|_{L_q} = \frac{1}{\rho_0}} \int_{t_0}^{t_f} h_0(\tau)u(\tau)d\tau$$

имеет единственное решение $u^*(\cdot)$, то $u^*(t)$, $\forall t \in [t_0, t_f]$ — оптимальное управление.

В соответствии с принципом максимума решение задачи оптимального управления (1.4)–(1.6) сводится к последовательному решению следующих задач:

во-первых, определение нормы минимального элемента из множества P (1.14), а именно:

$$\min_{h(\cdot) \in P} \|h(\cdot)\|_{L_\infty} = \min_{l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 = 1} \left(\max_{\tau \in [t_0, t_f]} |h(\tau)| \right) = \|h_0(\cdot)\|_{L_\infty} = \rho_0, \quad (1.15)$$

где

$$h(\tau) = \frac{1}{2} l_1 (t_f - \tau)^2 + l_2 (t_f - \tau) + l_3; \quad (1.16)$$

во-вторых, синтез оптимального управления из условия:

$$\max_{\|u(\cdot)\|_{L_1} = \frac{1}{\rho_0}} \int_{t_0}^{t_f} h_0(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (1.17)$$

2. Решение задачи оптимального управления по минимуму его расходов для тройного интегратора

Вначале рассмотрим задачу (1.15). Очевидно, что здесь при любых допустимых значениях l_1 , l_2 и l_3 , которые удовлетворяют ограничению: $l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 = 1$, экстремальные значения $h(\tau)$ (1.16) может иметь только в точках $\tau = t_0$, $\tau = t_f$, а также в точке $\tau = \tau_m = t_f + l_2/l_1$, если, конечно, при этом $t_0 < \tau_m < t_f$. Значения $|h(\tau)|$ в указанных точках будут равны

$$\mu_0 = |h(t_0)| = \left| \frac{1}{2} l_1 (t_f - t_0)^2 + l_2 (t_f - t_0) + l_3 \right|;$$

$$\mu_f = |h(t_f)| = |l_3|; \quad \mu_m = |h(\tau_m)| = \left| l_3 - \frac{1}{2} \frac{l_2^2}{l_1} \right|.$$

Пусть $\vartheta(l_1, l_2, l_3) = \max\{\mu_0, \mu_f, \mu_m\}$. Тогда (1.15) сводится к задаче

$$\rho_0 = \rho_0(l_{10}, l_{20}, l_{30}) = \min_{l_1 c_1 + l_2 c_2 + l_3 c_3 = 1} \vartheta(l_1, l_2, l_3), \quad (2.1)$$

решая которую можно получить минимальный элемент $h_0(\tau)$ и его норму ρ_0 . Если они найдены, то можно приступать к решению задачи (1.17), то есть непосредственно к синтезу программы оптимального управления. С учетом того, что $h_0(\cdot) \in P$ и $\phi_0[h_0(\cdot)] = 1$, задача (1.17) тогда будет представлена следующими соотношениями:

$$\max_{u(\cdot)} \int_{t_0}^{t_f} h_0(\tau) u(\tau) d\tau = 1; \quad \int_{t_0}^{t_f} |u(\tau)| d\tau = \frac{1}{\rho_0}. \quad (2.2)$$

2.1. Решение задачи с симметричными граничными условиями

Предваряя решение задачи (2.2) в общем случае, рассмотрим вначале пример синтеза оптимального управления для системы (1.1) в одном частном случае задания граничных условий (1.2), (1.3), предполагая дополнительно, что в (1.1) $f(t) = 0$. Итак, пусть (1.2), (1.3) задают маневр переориентации КА на угол γ_T ($0 < \gamma_T \leq \pi$), а именно:

$$x_1(t_0) = 0; \quad x_2(t_0) = 0; \quad x_3(t_0) = 0; \quad (2.3)$$

$$x_1(t_f) = \gamma_T; \quad x_2(t_f) = 0; \quad x_3(t_f) = 0. \quad (2.4)$$

Далее для удобства в (2.3), (2.4) примем: $t_0 = -T/2$; $t_f = +T/2$, где $T = t_f - t_0$. В этом случае граничные условия (2.3), (2.4) оказываются симметричными относительно момента времени $t = 0$.

С учетом (2.3), (2.4) из (1.11) получим: $c_1 = \gamma_T > 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Но тогда в (1.15) и (1.16) $l_1 = l_{10} = 1/c_1 = 1/\gamma_T$, а параметры l_2 и l_3 произвольны. Таким образом, функция (1.16) как элемент множества P (1.14) будет иметь вид

$$h(\tau) = \frac{1}{2c_1} \left[\left(\frac{T}{2} - \tau \right)^2 + 2l_2c_1 \left(\frac{T}{2} - \tau \right) + 2l_3c_1 \right] = \frac{1}{2c_1} g(\tau; l_2, l_3)$$

и на границах интервала управления $[-T/2, +T/2]$:

$$\mu_0 = \frac{1}{2c_1} \left| g \left(-\frac{T}{2}; l_2, l_3 \right) \right|; \quad \mu_f = \frac{1}{2c_1} \left| g \left(+\frac{T}{2}; l_2, l_3 \right) \right|.$$

Так как $\tau_m = T/2 + l_2c_1$, то условие $-T/2 < \tau_m < T/2$ выполняется если $0 > l_2 > -T/(4c_1)$ и, стало быть, $\mu_m = |h(\tau_m)| = |l_3 - (c_1l_2^2)/2|$. Вводя функцию $\tilde{\vartheta}(l_2, l_3) = \max\{\mu_0, \mu_f, \mu_m\}$, сведем (2.1) к следующей задаче:

$$\rho_0 = \min_{-\infty \leq l_2 \leq +\infty, -\infty \leq l_3 \leq +\infty} \tilde{\vartheta}(l_2, l_3). \quad (2.5)$$

Можно показать, в том числе прямым расчетом, что минимум в (2.5) достигается только тогда, когда ось симметрии параболы, график которой задается функцией $g(\tau; l_2, l_3)$, проходит через точку $\tau = 0$, то есть $\tau_m = 0$. Отсюда получим $l_{20} = -T/(2c_1)$, $g(\tau; l_{20}, l_3) = \tau^2 + 2l_3c_1 - T^2/4$, $\mu_0 = \mu_f = l_3$ и $\mu_m = -(2c_1)^{-1} (2l_3c_1 - T^2/4)$. Стало быть, тогда

$$\rho_0 = \min_{-\infty \leq l_3 \leq +\infty} \tilde{\vartheta}(l_{20}, l_3).$$

Отсюда получим $l_{30} = T^2/(16c_1)$, а также $\rho_0 = T^2/(16c_1)$ и минимальный элемент

$$h_0(\tau) = \frac{1}{2c_1} g(\tau; l_{20}, l_{30}) = \frac{1}{2c_1} \left(\tau^2 - \frac{T^2}{8} \right). \quad (2.6)$$

Таким образом, задача (1.15) в рассматриваемом здесь случае решена.

Обращаясь теперь к (2.2), нетрудно видеть, что из условия максимума первого интеграла в (2.2) должно выполняться $\text{sign } u(\tau) = \text{sign } h_0(\tau)$, если только $|h_0(\tau)| \geq \Delta$, где Δ — некоторое число: $0 \leq \Delta \leq T^2/(16c_1)$, иначе, $u(\tau) = 0$. Кроме того, для выполнения ограничения в виде второго интеграла в (2.2) необходимо, чтобы для управляющего параметра поточечно выполнялось условие: $|u(\tau)| \leq u_0 < \infty$, $\forall \tau \in [-T/2, +T/2]$. Но тогда решение задачи (2.2) после замены в (2.2) интегралов интегральными суммами можно было бы свести к простейшей задаче оптимального распределения ограниченного ресурса [5], решение которой в данном случае является очевидным. Однако при любом $u_0 < \infty$ для элемента $h_0(\tau)$ (2.6) требуемое число Δ не существует. Тем не менее при $\Delta \rightarrow T^2/(16c_1)$ и, соответственно, при $u_0 \rightarrow \infty$ приближенное решение задачи (2.2) возможно при "импульсном" управлении, сосредоточенном в малых окрестностях экстремальных точек функции (2.6).

Действительно, выбирая достаточно малые (в сравнении с T) числа ε_0 , ε_f и ε_m , можно построить следующую допустимую программу управления:

$$\hat{u}_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} a_0/\varepsilon_0, & \tau \in I_0 = [-T/2, -T/2 + \varepsilon_0]; \\ a_f/\varepsilon_f, & \tau \in I_f = [T/2 - \varepsilon_f, T/2]; \\ -a_m/(2\varepsilon_m), & \tau \in I_m = [-\varepsilon_m, +\varepsilon_m]; \\ 0, & \tau \in [-T/2, +T/2] \setminus (I_0 \cup I_m \cup I_f), \end{cases} \quad (2.7)$$

где $a_0 > 0$, $a_f > 0$, $a_m > 0$ — некоторые числа. Подставляя (2.7) в (2.2), при $(\varepsilon_0, \varepsilon_f, \varepsilon_m) \rightarrow 0$ получим в пределе (как для первого, так и для второго интегралов в (2.2)): $a_0 + a_f + a_m = 1/\rho_0 = 16c_1/T^2$ — нижнюю грань расхода управления для программы (2.7) или, что то же самое, полный импульс управляющего воздействия [3]. Отметим, что в программе управления (2.7) при $(\varepsilon_0, \varepsilon_f, \varepsilon_m) \rightarrow 0$ "импульсы" управления вырождаются в δ -функции и, соответственно, в пределе также можно принять $\Delta = T^2/(16c_1)$. Далее, интегрируя последовательно третье и второе уравнения в (1.1) с учетом граничных условий (2.3), (2.4) и переходя к пределу в (2.7), получим

$$a_0 + a_f - a_m = 0; \quad 2a_0 - a_m = 0,$$

а отсюда следует, что $a_0 = a_f$ и $a_m = 2a_0$, то есть в (2.7) должно быть

$$a_0 = a_f = \frac{4c_1}{T^2}; \quad a_m = \frac{8c_1}{T^2}.$$

Таким образом, здесь получена следующая программа δ -импульсного оптимального управления ($c_1 = \gamma_T > 0$):

$$u^*(\tau) = \frac{4\gamma_T}{T^2} \left[\delta \left(\tau + \frac{T}{2} \right) - 2\delta(\tau) + \delta \left(\tau - \frac{T}{2} \right) \right], \quad (2.8)$$

где δ -функции введены с учетом построения отвечающих им "импульсов" в (2.7), а именно: при $\tau = -T/2$ δ -функция определена в точке $\tau = -T/2 + 0$, при $\tau = T/2$ — в точке $\tau = T/2 - 0$. Очевидно, что программа (2.8) не является элементом $L_1[-T/2, +T/2]$, то есть она не относится к классу допустимых управляющих воздействий в рассматриваемой задаче, а является предельной "точкой" при $(\varepsilon_0, \varepsilon_f, \varepsilon_m) \rightarrow 0$ для программы (2.7).

При наличии ограничения: $|u(t)| \leq u_0 < \infty$, $\forall t \in [-T/2, +T/2]$ решение задачи (1.1), (1.4), (2.3), (2.4) можно получить с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [2]. При этом программа оптимального управления с учетом симметрии граничных условий (2.3), (2.4) здесь будет иметь следующий вид:

$$u(\tau) = \begin{cases} u_0, & \tau \in [-T/2, -T/2 + \tau_1] \cup [T/2 - \tau_1, T/2]; \\ -u_0, & \tau \in [-\tau_1, +\tau_1]; \\ 0, & \tau \in [-T/2 + \tau_1, -\tau_1] \cup [+ \tau_1, T/2 - \tau_1], \end{cases}$$

где $0 < \tau_1 < T/4$, а $4\tau_1 u_0$ — минимальный расход управления. Очевидно, что эта программа при $u_0 \rightarrow \infty$ и, соответственно, при $\tau_1 \rightarrow 0$ также в пределе стремится к полученной ранее программе δ -импульсного оптимального управления (2.8).

2.2. Предварительные замечания к синтезу оптимального управления в общем случае

Возвращаясь к рассмотрению общего случая произвольных граничных условий, но при $t_0 < \tau_m < t_f$, отметим, что решение задачи (1.15) или (2.1), то есть определение минимального элемента $h_0(\tau)$ и его нормы ρ_0 вполне достаточно для синтеза программы управления, которая аналогична (2.7). Из условия максимума первого интеграла в (2.2) необходимо, чтобы соответствующие "импульсы" прикладывались только в точках экстремума функции $\varsigma(\tau) = |h_0(\tau)|$, а именно:

$$\hat{u}_\varepsilon(\tau) = \begin{cases} (a_0/\varepsilon_0) \operatorname{sign} h_0(t_0), & \tau \in I_0 = [t_0, t_0 + \varepsilon_0]; \\ (a_f/\varepsilon_f) \operatorname{sign} h_0(t_f), & \tau \in I_f = [t_f - \varepsilon_f, t_f]; \\ [a_m/(2\varepsilon_m)] \operatorname{sign} h_0(\tau_m), & \tau \in I_m = [\tau_m - \varepsilon_m, \tau_m + \varepsilon_m]; \\ 0, & \tau \in [t_0, t_f] \setminus (I_0 \cup I_m \cup I_f), \end{cases} \quad (2.9)$$

где ε_0 , ε_f и ε_m — достаточно малые числа (в сравнении с T), а τ_m — точка экстремума $h_0(\tau)$ внутри интервала управления $[t_0, t_f]$. Очевидно, что иные варианты приложения "импульсов", отличные от указанных в (2.9), не обеспечивают достижение максимума для первого интеграла в (2.2). То же самое справедливо и для каких-либо других дополнительных "импульсов" вне точек экстремума $h_0(\tau)$. Не затрагивая здесь достаточных условий максимума для первого интеграла в (2.2), которые требуют, вообще говоря, выполнения условий: $\mu_0 = \mu_f = \mu_m$ [3, с. 188, теор. 23.1], рассмотрим с учетом произвольности граничных условий формальное решение задачи, связанной с максимизацией первого интеграла в (2.2).

Итак, пусть $t_0 < \tau_m < t_f$ и в общем случае $\tau_m \neq 0$, а также пусть хотя бы одно из значений μ_0 , μ_f и μ_m отлично от других (тем самым исключается случай $\mu_0 = \mu_f = \mu_m$). Переходя в (2.9) к пределу при $(\varepsilon_0, \varepsilon_f, \varepsilon_m) \rightarrow 0$, получим следующую δ -импульсную программу управления:

$$u_\delta(\tau) = s_0 a_0 \delta(\tau - t_0 + 0) + s_m a_m \delta(\tau - \tau_m) + s_f a_f \delta(\tau - t_f - 0), \quad (2.10)$$

где $s_0 = \text{sign } h_0(t_0)$, $s_f = \text{sign } h_0(t_f)$, $s_m = \text{sign } h_0(\tau_m)$. Если подставить (2.10) в (2.2), то получим

$$\mu_0 a_0 + \mu_f a_f + \mu_m a_m = 1, \quad a_0 + a_f + a_m = \frac{1}{\rho_0}. \quad (2.11)$$

Кроме того, проинтегрируем еще третье уравнение (1.1) с учетом (2.10):

$$s_0 a_0 + s_f a_f + s_m a_m = c_3. \quad (2.12)$$

Решение системы (2.11), (2.12) относительно коэффициентов a_0 , a_f , a_m в (2.10) найдем по формулам Крамера:

$$a_0 = \frac{D_0}{D}; \quad a_f = \frac{D_f}{D}; \quad a_m = \frac{D_m}{D}, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \mu_0(s_m - s_f) + \mu_f(s_0 - s_m) + \mu_m(s_f - s_0); \\ D_0 &= (s_m - s_f) + (\mu_f - \mu_m)c_3 + \frac{s_f \mu_m - s_m \mu_f}{\rho_0}; \\ D_f &= (s_0 - s_m) + (\mu_m - \mu_0)c_3 + \frac{s_m \mu_0 - s_0 \mu_m}{\rho_0}; \\ D_m &= (s_f - s_0) + (\mu_0 - \mu_f)c_3 + \frac{s_0 \mu_f - s_f \mu_0}{\rho_0}. \end{aligned}$$

Тогда вычисления по формулам (2.13) доставляют следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(s_m - s_f)\rho_0 + (\mu_f - \mu_m)c_3\rho_0 + s_f \mu_m - s_m \mu_f}{\mu_0(s_m - s_f) + \mu_f(s_0 - s_m) + \mu_m(s_f - s_0)} \frac{1}{\rho_0}; \\ a_f &= \frac{(s_0 - s_m)\rho_0 + (\mu_m - \mu_0)c_3\rho_0 + s_m \mu_0 - s_0 \mu_m}{\mu_0(s_m - s_f) + \mu_f(s_0 - s_m) + \mu_m(s_f - s_0)} \frac{1}{\rho_0}; \\ a_m &= \frac{(s_f - s_0)\rho_0 + (\mu_0 - \mu_f)c_3\rho_0 + s_0 \mu_f - s_f \mu_0}{\mu_0(s_m - s_f) + \mu_f(s_0 - s_m) + \mu_m(s_f - s_0)} \frac{1}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Очевидно, что полученные выражения для значений a_0 , a_f , a_m (2.14) не только носят формальный характер, но и являются недоопределенными. Действительно, если согласно достаточным условиям предположить, что $(\mu_0, \mu_f, \mu_m) \rightarrow \rho_0$, то в (2.14) получим неопределенность вида $0/0$. Кроме того, очевидно, что знаки s_0 ,

s_m и s_f тогда должны чередоваться, и, наконец, в (2.14) в явном виде отсутствует информация о части граничных условий (например, в виде c_1 и c_2), в том числе и о параметре τ_m . В связи с этим необходимо либо получить явное решение задачи (2.1) в виде $h_0(\tau)$ и его нормы ρ_0 , либо воспользоваться установленной структурой оптимального управления (2.9) или (2.10), конкретизировав ее в части чередования знаков s_0 , s_m и s_f , и установить явные зависимости между искомыми параметрами в программах (2.9) или (2.10) и граничными условиями (1.2), (1.3).

2.3. Общее решение задачи оптимального управления

Итак, с учетом структуры программы "импульсного" управления (2.9) в качестве расчетной схемы для определения ее параметров, а именно: a_0 , a_f , a_m и τ_m , примем ее предельный вариант (2.10). Для удобства проводимых далее вычислений также примем: $t_0 = 0$; $t_f = T$ и $f(t) = 0$. Для определенности можно еще предположить, что в (2.10) $s_0 = s_f = \pm 1$, $s_m = \mp 1$. Тогда программа (2.10) будет иметь вид

$$u_\delta(\tau) = \tilde{a}_0\delta(\tau + 0) - \tilde{a}_m\delta(\tau - \tau_m) + \tilde{a}_f\delta(\tau - T - 0), \quad (2.15)$$

где $\tilde{a}_k = s_0 a_k$, $k = 0, f, m$.

На рисунке показан вид получаемых с учетом (2.15) программ изменения фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ объекта управления (1.1) с учетом $s_0 = +1$, а также их значения в точках $t = 0, \tau_m, T$ с учетом обозначений в (1.2), (1.3); стрелками показаны соответствующие δ -импульсы.

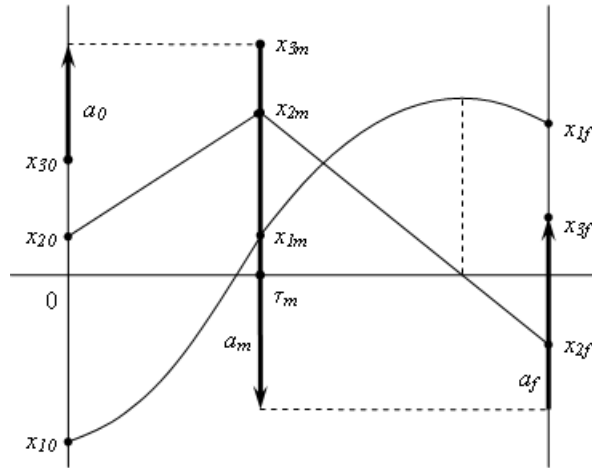


Рис. Схема определения параметров δ -импульсного оптимального управления

Учитывая (2.15), из третьего уравнения (1.1) в точке $t = 0+$ получим $x_3(0+) = x_3 + \tilde{a}_0 = x_{3m}$ и, соответственно, $\forall t \in (0, \tau_m)$ имеет место: $x_3(t) = x_{3m}$. Далее, интегрируя оставшиеся уравнения (1.1) на интервале $[0, \tau_m)$ с учетом (1.2), получим

$$x_{2m} = x_{20} + (x_{30} + \tilde{a}_0)\tau_m; \quad x_{1m} = x_{10} + x_{20}\tau_m + \frac{1}{2}(x_{30} + \tilde{a}_0)\tau_m^2.$$

Очевидно, что в точке $t = \tau_m + 0$ имеет место: $\tilde{x}_{3m} = x_{3m} - \tilde{a}_m = x_{30} + \tilde{a}_0 - \tilde{a}_m$ (см. рисунок). Поэтому интегрируя далее (1.1) на интервале $(\tau_m, T]$, с учетом при-

веденных начальных условий $x_1(\tau_m) = x_{1m}$; $x_2(\tau_m) = x_{2m}$; $x_3(\tau_m) = \tilde{x}_{3m}$ получим

$$\begin{aligned} x_{3f} &= \tilde{x}_{3m} + \tilde{a}_f = x_{30} + \tilde{a}_0 - \tilde{a}_m + \tilde{a}_f; \\ x_{2f} &= x_{2m} + (x_{30} + \tilde{a}_0 - \tilde{a}_m)(T - \tau_m) = x_{20} + (x_{30} + \tilde{a}_0)T - \tilde{a}_m(T - \tau_m); \\ x_{1f} &= x_{1m} + x_{2m}(T - \tau_m) + \frac{1}{2}(x_{30} + \tilde{a}_0 - \tilde{a}_m)(T - \tau_m)^2 = \\ &= x_{10} + x_{20}T + \frac{1}{2}(x_{30} + \tilde{a}_0)T^2 - \frac{1}{2}\tilde{a}_m(T - \tau_m)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (1.11) получаем следующую линейную систему относительно \tilde{a}_0 , \tilde{a}_f , \tilde{a}_m :

$$\frac{1}{2}\tilde{a}_0T^2 - \frac{1}{2}\tilde{a}_m(T - \tau_m)^2 = c_1; \quad \tilde{a}_0T - \tilde{a}_m(T - \tau_m) = c_2; \quad (2.16)$$

$$\tilde{a}_0 - \tilde{a}_m + \tilde{a}_f = c_3. \quad (2.17)$$

Решение системы (2.16) имеет вид

$$\tilde{a}_0 = \frac{2c_1 - (T - \tau_m)c_2}{T\tau_m}; \quad \tilde{a}_m = \frac{2c_1 - Tc_2}{(T - \tau_m)\tau_m}. \quad (2.18)$$

Соответственно, с учетом (2.18) из (2.17) можно получить $\tilde{a}_f = \tilde{a}_m - \tilde{a}_0 + c_3$ или $a_f = a_m - a_0 + s_0c_3$. Полный импульс управляющего воздействия, или расход управления (1.4), согласно (2.15), (2.18) будет равен:

$$J(u_\delta; \tau_m) = a_0(\tau_m) + a_m(\tau_m) + a_f(\tau_m) = 2a_m(\tau_m) + s_0c_3;$$

его минимум достигается при $\tau_m = T/2$, то есть $J(u^*) = J(u_\delta; T/2) = s_0F/T^2 \geq 0$, где $F = 16c_1 - 8Tc_2 + T^2c_3$. Очевидно, что здесь $s_0 = \text{sign}F$, то есть $J(u^*) = |F|/T^2$. Соответственно при $\tau_m = T/2$ из (2.17), (2.18) также следует:

$$a_0 = \frac{s_0(4c_1 - Tc_2)}{T^2}; \quad a_m = \frac{s_0(8c_1 - 4Tc_2)}{T^2}; \quad a_f = \frac{s_0(4c_1 - 3Tc_2 + T^2c_3)}{T^2}. \quad (2.19)$$

С другой стороны, с учетом (2.2) и (2.11) $J(u^*) = 1/\rho_0$. Следовательно, норма минимального элемента $h_0(\tau)$ в рассматриваемой задаче будет равна

$$\rho_0 = \frac{T^2}{|F|} = \frac{T^2}{|16c_1 - 8Tc_2 + T^2c_3|}. \quad (2.20)$$

Отметим, что (2.19) и (2.20) имеют место и в том случае, когда в (1.1) $f(t) \neq 0$, для чего следует ввести согласно (1.11) соответствующие поправки для c_1 и c_2 , а именно: $\tilde{c}_1 = c_1 - g_1(T)$; $\tilde{c}_2 = c_2 - g_2(T)$, где с учетом (1.9) (и принятого выше $t_0 = 0$ и $t_f = T$) требуемые поправки вычисляются так:

$$g_1(T) = \int_0^T (T - \tau)f(\tau)d\tau; \quad g_2(T) = \int_0^T f(\tau)d\tau.$$

Очевидно, что в этом случае значение оптимального расхода управления $J(u^*)$ изменяется на величину $\Delta J(u^*) = (8/T)[g_2(T) - 2g_1(T)/T]$.

Зная норму минимального элемента $h_0(\tau)$ (2.20), его можно записать в явном виде. Действительно, для всех $h(\cdot) \in P$ в (1.14):

$$h(\tau) = \frac{1}{2}l_1(T - \tau)^2 + l_2(T - \tau) + l_3, \quad l_1c_1 + l_2c_2 + l_3c_3 = 1.$$

В точках экстремума $h_0(\cdot) \in P$ на $[0, T]$, то есть в точках $\tau = 0$, $\tau = T/2$, $\tau = T$, значения $|h_0(\tau)|$, очевидно, должны быть равны ρ_0 в силу установленной симметрии минимального элемента. Поскольку

$$h_0(0) = \frac{1}{2}l_{10}T^2 + l_{20}T + l_{30}; \quad h_0\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{8}l_{10}T^2 + \frac{1}{2}l_{20}T + l_{30}; \quad h_0(T) = l_{30},$$

то получим следующую систему уравнений относительно l_{10} , l_{20} , l_{30} :

$$\frac{1}{2}l_{10}T^2 + l_{20}T + l_{30} = s_0\rho_0; \quad \frac{1}{8}l_{10}T^2 + \frac{1}{2}l_{20}T + l_{30} = -s_0\rho_0; \quad l_{30} = s_0\rho_0.$$

Отсюда сразу же следует $l_{30} = s_0\rho_0$, а также $l_{10} = 16s_0\rho_0/T^2$ и $l_{20} = -8s_0\rho_0/T$. Очевидно, что $\sum_{k=1}^3 l_{k0}c_k \equiv 1$, а минимальный элемент имеет следующий вид:

$$h_0(\tau) = \frac{8s_0\rho_0}{T^2} \left[\left(\tau - \frac{T}{2} \right)^2 - \frac{T^2}{8} \right].$$

В заключение здесь отметим, что функция $F = 16c_1 - 8Tc_2 + T^2c_3$ в знаменателе выражения (2.20) с учетом соотношений для c_1 , c_2 и c_3 (1.11) является функцией от заданных значений фазовых переменных в граничных условиях (1.2), (1.3) и от T , то есть $F = F(x_{10}, x_{1f}, x_{20}, x_{2f}, x_{30}, x_{3f}, T)$. Поскольку $\rho_0 > 0$, то должно выполняться условие $|F| > 0$. Но возможен и такой вариант задания параметров маневра и его длительности T , что $F = 0$. В этом случае объект управления (1.1) на интервале $[0, T]$ совершает свободное движение, то есть $u(\tau) \equiv 0$, с начальными условиями (1.2), и при этом автоматически выполняются конечные условия (1.3).

Заключение

В статье поставлена и решена задача оптимального управления тройным интегратором с произвольными граничными условиями на минимум расходов управления или, что то же самое, полного импульса управляющих воздействий на заданном интервале. Решение получено в виде программы δ -импульсного управления с помощью принципа максимума Н.Н. Красовского при сведении задачи к L_∞ -проблеме моментов. При анализе параметров оптимальной программы управления выявлен вариант задания граничных условий, для которых управление тождественно нулевое, когда его объект совершает свободное движение, а граничные условия выполняются автоматически. Поскольку с помощью тройного интегратора можно моделировать движение КА с электромеханическими исполнительными органами по одному из каналов управления его ориентацией, в том числе с учетом перекрестных связей между ними, постольку решение рассмотренной задачи представляет интерес как для формирования оптимальных программ управления переориентацией КА в пространстве, так и при проектировании систем управления ориентацией КА в части оценки их предельных характеристик.

Литература

- [1] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974. 600 с.

- [2] Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
- [3] Красовский Н.Н. Теория управления движением: линейные системы. М.: Наука, 1965. 476 с.
- [4] Мороз А.И. Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987. 304 с.
- [5] Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.: Наука, 1965. 460 с.

Поступила в редакцию 2/X/2012;
в окончательном варианте — 2/X/2012.

OPTIMAL CONTROL OF THREEFOLD INTEGRATOR ACCORDING TO MINIMUM CONSUMPTION

© 2012 Y.N. Gorelov³ M.V. Morozova⁴

The solution of optimal control problem of the threefold integrator with any boundary conditions by method of moments is considered. It is shown that in case of minimization of total impulse of control influence or control consumption, the solution of L_∞ -moments problem is approximated by optimal impulse control. The general solution of the problem is obtained and the structure of optimal control is researched. The example of solution of a problem with symmetric boundary conditions is considered.

Key words: threefold integrator, optimal control, control consumptions, problem of moments, Krasovsky's maximum principle, impulse control.

Paper received 2/X/2012.
Paper accepted 2/X/2012.

³Gorelov Yuri Nikolaevich (youngor07@mail.ru), Institute for the Control of Complex Systems of RAS, Samara, 443020, Russian Federation; Research and Education Center "Space Systems of Remote Sensing", Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.

⁴Morozova Marina Valerievna (morozova_mv@list.ru), the Dept. of Informatics and Computational Mathematics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.