МЕХАНИКА

УДК 539.42

О ПОСТРОЕНИИ МНОГОМАСШТАБНЫХ МОДЕЛЕЙ НЕУПРУГОГО РАЗРУШЕНИЯ[1]

© 2012 Е.М. Адылина, Л.В. Степанова[2]

В статье получено приближенное решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины в материале со степенным определяющим законом. Для построения решения используется метод возмущений, позволяющий получить асимптотическое представление для собственного значения нелинейной задачи как функции от показателя степени в определяющем законе материала и собственного значения, отвечающего линейной "невозмущенной" задаче.

Ключевые слова: нелинейная задача на собственные значения, напряженно-деформированное состояние у вершины трещины, сингулярность поля напряжений, многомасштабная модель разрушения, метод малого параметра, аналитическое решение.

1. О многомасштабных моделях неупругого разрушения

Вопросы неупругого деформирования и разрушения твердых тел вызывают интерес научного сообщества как в нашей стране, так и за рубежом [1–4]. Результаты теоретических исследований в области нелинейной механики разрушения в настоящее время служат базисом для инженерных расчетов на прочность и долговечность ответственных элементов конструкций [5]. Однако новые требования к точности расчетов и проектированию инженерных сооружений, требования наиболее полного использования несущей способности конструкции, к прогнозам несущей способности и живучести объектов, к возможности управления процессами разрушения, появление и использование на практике новых материалов (композиционные материалы, наноматериалы), новые усовершенствованные вычислительные возможности приводят к следующему: 1) необходимости комплексных исследований, объединяющих теоретический анализ, экспериментальные данные

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ № 12-08-00390).

[2]Адылина Екатерина Михайловна (kateadulina@mail.ru), Степанова Лариса Валентиновна (lst@ssu.samara.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

и компьютерное моделирование; 2) новым постановкам и решениям краевых задач неупругого деформирования и разрушения твердых тел, учитывающих процессы структурного разрушения и трещинообразования на разных уровнях (макро-, мезо- и микроуровни); 3) необходимости привлечения новых для нелинейной механики деформируемого твердого тела математических методов решения данных задач (математическая теория оптимального контроля, методы, развитые в асимптотической теории и их использование для решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих при введении автомодельных переменных; теория решения обратных задач). Наиболее важной проблемой представляется разработка и развитие математических многомасштабных моделей накопления повреждений на макро-, мезо- и микроуровнях у вершины трещины в элементах конструкций, находящихся в условиях пластического течения, высокотемпературной ползучести; усталостного нагружения и формулировка критериев разрушения неупругих материалов, учитывающих процессы повреждаемости материала в процессе деформирования [6–8]. Многомасштабность или многоуровневость процесса разрушения можно отразить, вводя в рассмотрение поля напряжений на различных расстояниях от кончика трещины с разной особенностью (с различной степенью сингулярности). Таким образом, сильная и слабая особенности механических полей у вершины трещины отражают многомасштабный процесс разрушения. В силу этих особенностей для моделирования процесса разрушения представляется важным знание всех возможных решений задачи определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины, а не только тех слагаемых в асимптотических разложениях полей напряжений и перемещений, которые традиционно удерживаются в классических решениях. Таким образом, многоуровневые модели разрушения требуют исследования всего спектра собственных значений в задаче определения полей напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины в материалах с нелинейными определяющими уравнениями. Если для упругих материалов в линейной механике разрушения построено полное разложение (решение Уильямса [9; 10]), то для материалов со степенными определяющими соотношениями многие вопросы остаются открытыми.

В данной статье рассматривается одна краевая задача механики трещин: задача определения напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины в материале со степенными определяющими уравнениями. Метод разложения компонент тензоров напряжений и деформаций по собственным функциям позволяет свести рассматриваемую задачу к нелинейной задаче на собственные значения.

В нелинейной механике разрушения при применении метода разложения по собственным функциям полей напряжений и деформаций в непосредственной окрестности вершин трещин нормального отрыва и поперечного сдвига приходят к задаче на собственные значения, решение которой получают, как правило, численно методами Рунге — Кутты в сочетании с методом пристрелки. Однако метод пристрелки для данного класса задач становится многопараметрическим и результаты требуют дополнительного обоснования. Поэтому требуется качественное исследование спектра собственных значений в нелинейных задачах на собственные значения. Решение задач на собственные значения предполагается получить с помощью метода возмущений, достаточно широко применяемого в асимптотической теории для исследования задач на собственные значения. Однако в нелинейной механике разрушения преимущества этого подхода, по-видимому, не были еще использованы и, следовательно, в механике разрушения данная методика является оригинальной.

Качественное исследование нелинейных задач на собственные значения, получающихся при введении автомодельной переменной, позволит установить автомодельное промежуточное асимптотическое решение задачи о трещине в упругом нелинейно-вязком материале и, следовательно, пролить свет на необходимость учета скоростей упругих деформаций у вершины трещины. Введение автомодельной переменной второго рода приводит к новому для нелинейной механики разрушения классу задач на собственные значения, требующих детального изучения. Поэтому аналитические решения нелинейных задач на собственные значения необходимы и для построения промежуточных автомодельных асимптотик (автомодельных асимптотик второго рода [24]).

2. Задача определения напряженно-деформированного состояния вблизи кончика трещины в материале со степенным определяющим законом

Исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины нормального отрыва в материале со степенными определяющими уравнениями

$$\varepsilon_{ij} = 3B\sigma_e^{n-1}s_{ij}/2, \tag{2.1}$$

где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций, s_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma_e = (3s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ – интенсивность напряжений, B, n – материальные константы, приводит к необходимости исследования уравнений равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \tag{2.2}$$

и условия совместности деформаций

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varepsilon_{r\theta}}{\partial\theta}\right) = \frac{\partial^2\varepsilon_{rr}}{\partial\theta^2} - r\frac{\partial\varepsilon_{rr}}{\partial r} + r\frac{\partial^2(r\varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \tag{2.3}$$

В случае исследования трещины нормального отрыва в предположении реализации плоского деформированного состояния определяющие принимают вид:

$$\varepsilon_{rr} = -\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{3}{4}B\sigma_e^{n-1}(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}), \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{3}{2}B\sigma_e^{n-1}\sigma_{r\theta}, \tag{2.4}$$

где интенсивность напряжений определяется формулой

$$\sigma_e^2 = 3(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2/4 + 3\sigma_{r\theta}^2.$$

В полярных координатах компоненты тензора напряжений выражаются через функцию напряжений Эри $F(r,\theta)$ в следующем виде:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\theta\theta}, \qquad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}\right), \tag{2.5}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ – оператор Лапласа.

Степенной характер определяющих уравнений задачи позволяет обратиться к представлению функции напряжений Эри в виде разложения по собственным функциям:

$$F(r,\theta) = r^{\lambda+1}f(\theta). \tag{2.6}$$

Тогда компоненты тензора напряжений принимают вид:

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1}\left[(\lambda+1)f + f''\right], \quad \sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1}\lambda(\lambda+1)f, \quad \sigma_{r\theta} = -r^{\lambda-1}\lambda f',$$

а условие совместности приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно функции $f(\theta)$

$$\begin{aligned}
&f_e^2 f^{IV}\left\{(n-1)\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]^2+f_e^2\right\}+(n-1)(n-3)\times\\
&\times\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}^2\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+\\
&+(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]^2+\left[(1-\lambda^2)f+f''\right](1-\lambda^2)f''+\right.\\
&\left.+4\lambda^2\left(f''^2+f'f'''\right)\right\}\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+2(n-1)f_e^2\times\\
&\times\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+\\
&+C_1(n-1)f_e^2\left\{\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]\left[(1-\lambda^2)f'+f'''\right]+4\lambda^2 f'f''\right\}f'+\\
&+C_1 f_e^4 f''-C_2 f_e^4\left[(1-\lambda^2)f+f''\right]+f_e^4(1-\lambda^2)f''=0,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
&f_e^2 = \left[(1-\lambda^2)f+f''\right]^2+4\lambda^2 f'^2,\\
&C_1 = 4\lambda\left[(\lambda-1)n+1\right],\\
&C_2 = (\lambda-1)n\left[(\lambda-1)n+2\right].
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Вместе с граничными условиями отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f(\theta=\pm\pi)=0, \quad f'(\theta=\pm\pi)=0 \tag{2.9}$$

уравнение (2.7) постулирует краевую задачу на собственные значения: необходимо подобрать собственное число λ, соответствующее нетривиальному решению уравнения (2.7), удовлетворяющему сформулированным граничным условиям.

3. Нелинейная задача на собственные значения

Одним из эффективных методов решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения, является метод возмущений [15; 16]. По всей видимости, впервые данный подход для получения аналитической зависимости собственного значения нелинейной задачи от собственного значения, соответствующего линейной невозмущенной задаче, и от показателя нелинейности материала, был применен М. Анхеузером и Д. Гроссом [17] для задачи антиплоского сдвига плоскости с разрезом. Впоследствии данный подход был развит для решения нелинейной задачи на собственные значения, следующей из задачи определения напряженно-деформированного состояния у вершины усталостной трещины в среде с поврежденностью [18]. В [17] показано, что метод возмущений позволяет получить аналитическое решение задачи в замкнутой форме. Поэтому данный метод используется далее. Можно отметить возрастающий интерес математического сообщества к аналитическим решениям нелинейных задач математической физики [19–21; 23; 24].

Аналитическое выражение для собственного значения λ как функции от показателя нелинейности материала n и от λ_0 – собственного числа, отвечающего невозмущенной линейной задаче ($n=1$), может быть найдено с помощью представления

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \tag{3.1}$$

где ε — отклонение собственного числа λ от собственного числа λ_0 при изменении n.

Представим показатель нелинейности материала и искомую функцию в виде

$$n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \ldots, \tag{3.2}$$

$$f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \ldots, \tag{3.3}$$

где $f_0(\theta)$ – решение линейной задачи ($n = 1$).

Для функции $f_0(\theta)$ легко получить линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f_0^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_0'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_0 = 0, \tag{3.4}$$

решение которого, подчиняющееся граничным условиям отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$f_0(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_0'(\theta = \pm\pi) = 0, \tag{3.5}$$

в линейной механике разрушения обычно связывают с именем Уильямса [9; 10].

Общее решение уравнения (3.4) имеет вид:

$$\begin{aligned} f_0(\theta) = B_1\cos[(\lambda_0 - 1)\theta] + B_2\sin[(\lambda_0 - 1)\theta] + \\ + B_3\cos[(\lambda_0 + 1)\theta] + B_4\sin[(\lambda_0 + 1)\theta]. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Характеристическое уравнение для собственного значения λ_0 легко получается из граничных условий на берегах трещины

$$\sin 2\pi\lambda_0 = 0. \tag{3.7}$$

Здесь $\lambda_0 = m/2$, где m – целое число.

Используя найденное выражение для собственного значения, можно отыскать соотношения между постоянными интегрирования B_j :

$$\begin{aligned} &B_{3m} = -\frac{m-2}{m+2}B_{1m}, \quad B_{4m} = -B_{2m}, \quad m = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots; \\ &B_{3m} = -B_{1m}, \quad B_{4m} = -\frac{m-2}{m+2}B_{2m}, \quad m = 0, 2, \pm4, \pm6, \ldots. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Для случая нечетных m решение дифференциального уравнения относительно функции $f_0(\theta)$ имеет вид (с точностью до неопределенного множителя):

$$f_0(\theta) = \beta\cos(\alpha\theta) - \alpha\cos(\beta\theta), \tag{3.9}$$

где $\alpha = \lambda_0 - 1$, $\beta = \lambda_0 + 1$.

Неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $f_1(\theta)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} f_1^{IV} + 2(\lambda_0^2 + 1)f_1'' + (\lambda_0^2 - 1)^2 f_1 = -n_1\frac{x_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right)}{g_0} + \\ + 2\lambda_0 f_0'' - C_1^1 f_0'' + C_2^1 x_0 + 2\lambda_0 a_0 f_0, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где для краткости приняты обозначения:

$$a_0 = 1 - \lambda_0^2, \qquad x_0 = a_0 f_0 + f_0'', \qquad g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2(f_0')^2$$

$$\omega_0 = (x_0')^2 + a_0 x_0 f_0'' + 4\lambda_0^2(f_0'')^2 + 4\lambda_0^2 f_0' f_0''',$$

$$C_1^1 = 4\lambda_0\left[2 + n_1(\lambda_0 - 1)\right], \qquad C_2^1 = 2\lambda_0\left[1 + n_1(\lambda_0 - 1)\right].$$

Граничные условия для функции $f_1(\theta)$ формулируются как

$$f_1(\theta = \pm\pi) = 0, \quad f_1'(\theta = \pm\pi) = 0. \tag{3.11}$$

Таким образом, для определения функции $f_1(\theta)$ получена краевая задача для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. Нетривиальное решение данной краевой задачи будет существовать, если выполнено некоторое условие разрешимости, для формулировки которого обычно обращаются к сопряженной краевой задаче.

4. Условие разрешимости

Краевая задача для неоднородного линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами имеет вид:

$$p_4(x)\varphi^{IV} + p_3(x)\varphi''' + p_2(x)\varphi'' + p_1(x)\varphi' + p_0(x)\varphi = g(x), \tag{4.1}$$

$$\varphi(a) = \beta_1, \qquad \varphi'(a) = \beta_2, \qquad \varphi(b) = \beta_3, \qquad \varphi'(b) = \beta_4. \tag{4.2}$$

Умножение обеих частей дифференциального уравнения на $u(x)$, где $u(x)$ – решение сопряженной краевой задачи, подлежащее определению в дальнейшем, приводит к равенству

$$\begin{gathered}\int_a^b p_4 u\varphi^{IV} dx + \int_a^b p_3 u\varphi''' dx + \int_a^b p_2 u\varphi'' dx + \int_a^b p_1 u\varphi' dx + \int_a^b p_0 u\varphi dx = \\ = \int_a^b g u dx,\end{gathered} \tag{4.3}$$

которое после ряда преобразований можно представить в виде

$$\begin{gathered}\int_a^b \varphi\left[(p_4u)^{IV} + (p_3u)''' + (p_2u)'' - (p_1u)' + p_0u\right] dx + \\ + \left\{p_4u\varphi''' - \left[(p_4u)' - p_3u\right]\varphi'' + \left[(p_4u)'' - (p_3u)' + p_2u\right]\varphi' - \right. \\ \left. - \left[(p_4u)''' - (p_3u)'' + (p_2u)' - p_1u\right]\varphi \right\}\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b g u dx.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Сопряженное уравнение получается путем приравнивания к нулю коэффициента при φ в подынтегральном выражении в левой части последнего выражения:

$$(p_4u)^{IV} + (p_3u)''' + (p_2u)'' - (p_1u)' + p_0u = 0 \tag{4.5}$$

или

$$\begin{gathered}p_4u^{IV} + (4p_4' - p_3)\,u''' + (6p_4'' - 3p_3 + p_2)\,u'' + \\ + (4p_4''' - 3p_3'' + 2p_2' - p_1)\,u' + \left(p_4^{IV} - p_3''' + p_2'' - p_1' + p_0\right)u = 0.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Требование совпадения (4.1) и (4.6) дает

$$p_3 = 2p_4', \qquad p_3' = 2p_4'', \qquad p_1 = 2p_4''' - \frac{3}{2}p_3'' + p_2' = -p_4''' + p_2'.$$

При этом уравнение (4.1) принимает вид

$$p_4\varphi^{IV} + 2p_4'\varphi''' + p_2\varphi'' + \left(p_2' - p_4'''\right)\varphi' + p_0\varphi = 0 \tag{4.7}$$

или

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p_4\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left[\left(p_2 - p_4''\right)\frac{d\varphi}{dx}\right] + p_0\varphi = 0. \tag{4.8}$$

Произвольное самосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка без правой части может быть представлено в форме

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(A_2\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left[A_1\frac{d\varphi}{dx}\right] + A_0\varphi = 0. \tag{4.9}$$

Для отыскания сопряженных граничных условий рассматривают соотношение (4.4) для однородной задачи:

$$\begin{gathered}\{p_4u\varphi''' - \left[(p_4u)' - p_3u\right]\varphi'' + \left[(p_4u)'' - (p_3u)' + p_2u\right]\varphi' - \\ - \left[(p_4u)''' - (p_3u)'' + (p_2u)' - p_1u\right]\varphi\ \}\big|_{x=a}^{x=b} = 0.\end{gathered}$$

Учитывая граничные условия $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi(b) = \varphi'(b) = 0$, можно найти

$$\begin{gathered}p_4u|_{x=b}\varphi'''(b) - \left[(p_4u)' - p_3u\right]|_{x=b}\varphi''(b) - \\ -p_4u|_{x=a}\varphi'''(a) + \left[(p_4u)' - p_3u\right]|_{x=a}\varphi''(a) = 0.\end{gathered} \tag{4.10}$$

Сопряженные граничные условия выбираются таким образом, чтобы последнее соотношение выполнялось при произвольных значениях $\varphi''(a)$, $\varphi''(b)$, $\varphi'''(a)$ и $\varphi'''(b)$:

$$u(a) = 0, \qquad u(b) = 0, \qquad u'(a) = 0, \qquad u'(b) = 0. \tag{4.11}$$

Таким образом, сопряженная краевая задача – задача для дифференциального уравнения (4.5) с граничными условиями (4.11).

Для формулировки условия разрешимости неоднородной задачи необходимо вновь обратиться к соотношению (4.4). Используя дифференциальное уравнение и граничные условия, которым подчинена функция u, легко установить, что

$$\left[p_4u''\varphi' - \left(p_4u''' + 3p_4u'' - p_3u''\right)\varphi\right]_{x=a}^{x=b} = \int\limits_a^b ugdx \tag{4.12}$$

или

$$\begin{gathered}\left(p_4u''\beta_4 - p_4u'''\beta_3 - 3p_4'u''\beta_3 + p_3u''\beta_3\right)|_{x=b} - \\ - \left(p_4u''\beta_2 - p_4u'''\beta_1 - 3p_4'u''\beta_2 + p_3u''\beta_1\right)|_{x=b} = \int\limits_a^b ugdx.\end{gathered} \tag{4.13}$$

Условие (4.13) представляет собой искомое условие разрешимости, где функция u – любое нетривиальное решение однородной сопряженной задачи. Выбирая в качестве функции $u(x)$ любое нетривиальное решение однородной сопряженной задачи, из выражения (4.13) можно получить условие разрешимости исходной краевой задачи (4.1), (4.2).

5. Условие разрешимости в задаче о трещине нормального отрыва

В предыдущей части было выведено условие разрешимости краевой задачи для неоднородного линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Метод разложения по собственным функциям в задаче определения полей напряжений и перемещений вблизи кончика трещины приводит к бесконечной последовательности краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Применяя развитую процедуру к полученной последовательности краевых задач, можно вывести условие разрешимости краевой задачи относительно функции $f_1(\theta)$:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} ug d\theta = 0, \qquad u = f_0(\theta) = \beta\cos(\alpha\theta) - \alpha\cos(\beta\theta). \tag{5.1}$$

Правая часть неоднородного дифференциального уравнения относительно функции $f_1(\theta)$ определяется выражением

$$g(\theta) = -n_1 \frac{x_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right)}{g_0} + 2\lambda_0 f_0'' - C_1^1 f_0'' + C_2^1 x_0 + 2\lambda_0 a_0 f_0. \tag{5.2}$$

Проводя необходимые преобразования, можно установить, что условие разрешимости краевой задачи для функции $f_1(\theta)$ выполняется, если

$$n_1 = -\frac{2}{\lambda_0 - 1}, \tag{5.3}$$

и, следовательно, двучленное асимптотическое разложение показателя нелинейности имеет вид:

$$n = 1 - \frac{2\varepsilon}{\lambda_0 - 1} + O(\varepsilon^2). \tag{5.4}$$

Для функции $f_2(\theta)$ неоднородное линейное дифференциальное уравнение имеет существенно более громоздкий вид:

$$\begin{aligned}
& g_0^2\left[f_2^{IV} + 2(\lambda_0^2+1)f_2'' + (\lambda_0^2-1)^2 f_2\right] + \\
& + g_0^2\left(-x_0 + C_1^2 f_0'' - C_2^2 x_0 + 2\lambda_0 C_2^1 f_0\right) + \\
& + n_1\left\{-x_0\left(f_0^{IV}x_0+\omega_0\right)\left[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2\right] + \right. \\
& + g_0 x_0\left[-4\lambda x_0' f_0' - 2\lambda_0 a_0 f_0 f_0'' - 2\lambda_0 x_0 f_0'' + 8\lambda_0 (f_0'')^2 + 8\lambda_0 f_0' f_0'''\right] + \\
& + 2h_0 x_0'\left[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2\right] - 2h_0 x_0\left[-2\lambda_0 x_0 f_0' - 2\lambda_0 f_0 x_0' + 8\lambda_0 f_0' f_0''\right] + \\
& + 4\lambda_0^2 h_0 f_0'\left[-4\lambda_0 f_0 x_0 + 8\lambda_0 (f_0')^2\right] - 2\lambda_0 g_0 f_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right) - \\
& - 2\lambda_0 g_0 f_0 f_0^{IV} x_0 + n_1 h_0^2 x_0 + 4\lambda_0 h_0^2 f_0 - 4\lambda_0 g_0 h_0 f_0' - \\
& - x_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right)\left[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'\right] + g_0 x_0^2 f_1^{IV} + \\
& + g_0 x_0\left[2x_0' x_1' + a_0 f_0'' x_1 + a_0 x_0 f_1'' + 8\lambda_0^2 f_0'' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0''' f_1' + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'''\right] + \\
& + 2h_0 x_0'\left[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'\right] - 2h_0 x_0\left[x_0 x_1' + x_0' x_1 + 4\lambda_0^2 f_0' f_1'' + 4\lambda_0^2 f_0'' f_1'\right] + \\
& + 4\lambda_0^2 h_0 f_0'\left[2x_0 x_1 + 8\lambda_0^2 f_0' f_1'\right] + g_0\left(f_0^{IV}x_0 + \omega_0\right)x_1 + 2h_0 g_0 x_1' - \\
& \left. - 2h_0^2 x_1 + 4\lambda_0^2 h_0 g_0 f_1' + f_0^{IV} g_0 x_0 x_1\right\} = 0,
\end{aligned}$$

где

$$g_0 = x_0^2 + 4\lambda_0^2 (f_0')^2, \qquad h_0 = x_0 x_0' + 4\lambda_0^2 f_0' f_0'', \qquad x_1 = f_1'' + a_0 f_1,$$
$$C_1^2 = 4\left\{\lambda_0 \left[n_2 (\lambda_0 - 1) + n_1\right] + n_1 (\lambda_0 - 1) + 1\right\}$$
$$C_2^2 = 2\lambda_0 \left[n_2 (n_2(\lambda_0 - 1) + n_2) + n_1\right] + \left[n_1 (\lambda_0 - 1) + 1\right]^2$$

$$f_1 = -n_1(\beta \cos\alpha\theta - \alpha\cos\beta\theta)\ln cos(\theta/2) +$$

$$+n_1\beta \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{(2\lambda_0-1)/2} \dfrac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 - 1 \geqslant 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{(1-2\lambda_0)/2} \dfrac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 - 1 < 0 \end{array}\right] \cos\alpha\theta +$$

$$+n_1\beta \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{(2\lambda_0-1)/2} \dfrac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 - 1 \geqslant 0 \\ -\sum\limits_{k=1}^{(1-2\lambda_0)/2} \dfrac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 - 1 < 0 \end{array}\right] \sin\alpha\theta -$$

$$-n_1\alpha \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{(2\lambda_0+1)/2} \dfrac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 + 1 \geqslant 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{-(1+2\lambda_0)/2} \dfrac{\cos(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 + 1 < 0 \end{array}\right] \cos\beta\theta -$$

$$-n_1\alpha \left[\begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{(2\lambda_0+1)/2} \dfrac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 + 1 \geqslant 0 \\ -\sum\limits_{k=1}^{-(1+2\lambda_0)/2} \dfrac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1}, & 2\lambda_0 + 1 < 0 \end{array}\right] \sin\beta\theta +$$

$$+\frac{1}{16}\frac{\lambda_0^2 - 3\lambda_0 + 1}{(\lambda_0 - 1)^2 \lambda_0^2}\cos\alpha\theta - \frac{1}{16}\frac{\lambda_0^2 + 3\lambda_0 + 1}{(\lambda_0 + 1)^2 \lambda_0^2}\cos\beta\theta.$$

В силу сложности полученного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения относительно функции $f_2(\theta)$ к настоящему времени получены лишь следующие асимптотические разложения показателя нелинейности материала n для различных значений собственного числа λ_0, соответствующего линейной задаче. Однако, используя найденные асимптотические разложения, можно найти оценку для собственных значений λ, отвечающих произвольному n, и далее данная оценка должна быть уточнена, например, с помощью численного исследования исходного нелинейного уравнения. Численные значения коэффициентов асимптотических разложений и сами трехчленные разложения показателя нелинейности материала имеют вид:

$$\lambda_0 = -5/2, \qquad n = 1 + \frac{4}{7}\varepsilon - \frac{79}{2401}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$\lambda_0 = -3/2, \qquad n = 1 + \frac{4}{5}\varepsilon + \frac{669}{625}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$\lambda_0 = -1/2, \qquad n = 1 + \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{92}{81}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$\lambda_0 = 1/2, \qquad n = 1 + 4\varepsilon + 8\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$\lambda_0 = 3/2, \qquad n = 1 - 4\varepsilon + \frac{53}{5}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$
$$\lambda_0 = 5/2, \qquad n = 1 - \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{683}{567}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Для $\lambda_0 = 1/2$ (что соответствует классической задаче Хатчинсона – Райса – Розенгрена [12–14]) можно показать, что

$$n_k = -\frac{(-1)^k}{(\lambda_0 - 1)^{k+1}},$$
$$n = 1 - \frac{1}{\lambda_0 - 1}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{\lambda_0 - 1}\right)^k = -\frac{\lambda}{\lambda - 1}, \qquad \lambda = \frac{n}{n+1}.$$

Таким образом, получена хорошо известная формула, связывающая собственное число и показатель нелинейности материала.

Для остальных значений собственного значения, соответствующего линейной задаче, получены следующие выражения:

$$\lambda_0 \leqslant -\frac{3}{2}, \qquad n_2 = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 12\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 6}{(\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1)^4},$$
$$\lambda_0 \geqslant \frac{3}{2}, \qquad n_2 = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 10\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 4}{(\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1)^4}. \tag{5.5}$$

Обобщая выражения (5.5), можно представить их в виде единой зависимости

$$n_2 = -\frac{\lambda_0^5 - 2\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 + 11\lambda_0^2 + 4\lambda_0 - 5 - \left(\lambda_0^2 - 1\right) sgn(\lambda_0)}{\left(\lambda_0 + 1\right)\left(\lambda_0 - 1\right)^4}. \tag{5.6}$$

Для получения коэффициента n_3 асимптотического разложения показателя нелинейности материла n было выведено линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $f_3(\theta)$:

$$\begin{aligned}
&g_0^2\left(f_3^{IV} + a_0 f_3'' + C_1^0 f_3'' - C_2^0 x_3\right) + \\
&+2g_0 g_1\left(f_2^{IV} + a_0 f_2'' + C_1^0 f_2'' - C_2^0 x_2\right) + g_0^2\left(-2\lambda_0 f_2'' + C_2^2 2\lambda_0 f_2 - C_2^1 x_2\right) + \\
&+\left(g_1^2 + 2g_0 g_2\right)\left(f_1^{IV} + a_0 f_1'' + C_1^0 f_1'' - C_2^0 x_1\right) + \\
&+2(g_0 g_3 + g_1 g_2)\left(f_0^{IV} + a_0 f_0'' + C_1^0 f_0'' - C_2^0 x_0\right) + \\
&+\left(g_1^2 + 2g_0 g_2\right)\left(-2\lambda_0 f_0'' + 2\lambda_0 C_2^0 f_0 - C_2^1 x_0\right) + \\
&+g_0^2\left(-f_1'' + C_1^2 f_1'' + C_2^0 f_1 + C_2^1 2\lambda_0 f_1 - C_2^2 x_1\right) + \\
&+2g_0 g_1\left(-2\lambda_0 f_1'' + C_1^1 f_1 + C_2^0 2\lambda_0 f_1 - C_2^1 x_1\right) + \\
&+2g_0 g_1\left(-f_0'' + C_1^2 f_0'' + C_2^0 f_0 + 2\lambda_0 f_0 + 2\lambda_0 C_2^1 f_0 - C_2^2 x_0\right) + \\
&+g_0^2\left(C_1^3 f_0'' + C_2^1 f_0 + C_2^2 2\lambda_0 f_0 - C_2^3 x_0\right) + \\
&+n_3\left(f_0^{IV} x_0 + w_0\right) g_0 x_0 + n_2\left\{2h_0\left(g_1 x_0' - h_1 x_0 + C_1^0 g_1 f_0'/2\right) + \right. \\
&+g_1 x_0\left(f_0^{IV} x_0 + w_0\right) + 2h_0\left(g_0 x_1' - h_0 x_1 + C_1^0 g_0 f_1'/2\right) + \\
&+g_0 x_0\left(f_1^{IV} x_0 + w_1\right) + g_0 x_1\left(f_0^{IV} x_0 + w_0\right) + g_0 f_0^{IV} x_0 x_1 - \\
&\left.-2\lambda_0 f_0 g_0\left(f_0^{IV} x_0 + w_0\right) - 2\lambda_0 f_0^{IV} x_0 g_0 f_0 + n_1 x_0 h_0^2 + 4h_0^2 \lambda_0 f_0 - 4\lambda_0 h_0 g_0 f_0'\right\} + \\
&+n1\left\{2h_0\left(g_2 x_0' - h_2 x_0 + C_1^0 g_2 f_0'/2\right) + g_2 x_0\left(f_0^{IV} x_0 + w_0\right) + \right.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$
\begin{aligned}
&+2h_0\left(g_0x_2'-h_0x_2+C_1^0g_0f_2'/2\right)+g_0x_0\left(f_2^{IV}x_0+w_2\right)+g_0x_2\left(f_0^{IV}x_0+w_0\right)+\\
&+g_0f_0^{IV}x_0x_2+g_1x_0\left(f_1^{IV}x_0+w_1\right)+2f_0^{IV}x_0g_1x_1-4\lambda_0f_0^{IV}f_0g_1x_0+\\
&+2h_2\left(g_0x_0'-h_0x_0+C_1^0g_0f_0'/2\right)+2h_1\left(g_1x_0'-h_1x_0+C_1^0g_1f_0'/2\right)+\\
&+2h_0\left(g_1x_1'-h_1x_1+C_1^0g_1f_1'/2\right)+2h_1\left(g_0x_1'-h_0x_1+C_1^0g_0f_1'/2\right)+\\
&+f_0^{IV}g_0x_1^2-4\lambda_0f_0^{IV}g_0f_0x_1-4\lambda_0f_0^{IV}g_0f_0f_1+2f_1^{IV}g_0x_0x_1-4\lambda_0g_0x_0f-1^{IV}f_0+\\
&+n_1\left(h_0^2x_1+2h_0h_1x_0\right)+4\left(h_0^2\lambda_0f_1+2h_0h_1\lambda_0f_0\right)+g_1w_0(x_1-2\lambda_0f_0)+g_0w_1x_1-\\
&-2\lambda_0g_0w-1f_0-2\lambda_0g_0w_0f_1-4\lambda_0g_0h_0f_1'-4\lambda_0g_0h_1f_0'-4\lambda_0g_1h_0f_0'+\\
&+n_2x_0h_0^2-4\lambda_0^2f_0^{IV}g_0f_0^2-2f_0^{IV}g_0x_0f_0-2\lambda_0n_1h_0^2f_0+2h_0^2f_0-\\
&-g_0w_0f_0-2g_0h_0f_0'+C_1^2g_0h_0f_0'\big\}=0.
\end{aligned}
$$

Здесь для краткости приняты обозначения:

$$
\begin{aligned}
&x_2=f_2''+a_0f_2,\\
&g_1=2x_0\left(x_1-2\lambda_0f_0\right)+8\lambda_0f_0'\left(\lambda_0f_1'+f_0'\right),\\
&g_2=(x_1-2\lambda_0f_0)^2+2x_0(x_2-2\lambda_0f_1-f_0)+\\
&+4\left[(\lambda_0f_1'+f_0')^2+2\lambda_0f_0'(\lambda_0f_2'+f_1')\right],\\
&h_1=-2\lambda_0f_0x_0'-2\lambda_0x_0f_0'+8\lambda_0f_0'f_0''+x_0'x_1'+\\
&+4\lambda_0^2f_0'f_{14}''\lambda_0^2f_0''f_1',\\
&h_2=x_0(x_2'-2\lambda_0f_1'-f_0')+(x_1-2\lambda_0f_0)(x_1'-2\lambda_0f_0')+x_0(x_2-2\lambda_0f_1-f_0)+\\
&+4\lambda_0\left[f_0'(\lambda_0f_2''+f_1'')+(\lambda_0f_1'+f_0')(\lambda_0f_1''+f_0'')+(\lambda_0f_2'+f_1')f_0''\right],\\
&w_1=-4\lambda_0x_0'f_0'-\lambda_0a_0f_0f_0''-2\lambda_0x_0f_0''+8\lambda_0f_0''^2\\
&+8\lambda_0f_0'f_0'''+2x_0'x_1'+a_0f_0''x_1+a_0x_0f_1''+\\
&+8\lambda_0^2f_0''f_1''+4\lambda_0^2f_0'''f_1'+4\lambda_0^2f_0'f_1''',\\
&w_2=(x-1'-2\lambda_0f_0')^2+2x_0'(x_2'-2\lambda_0f_1'-f_0')+x_0(a_0f_2''-2\lambda_0f_1''-f_0'')+\\
&+(x_1-2\lambda_0f_0)(a_0f_1''-2\lambda_0f_0'')+a_0f_0''(x_2-2\lambda_0f_1-f_0)+\\
&+4(\lambda_0f_1''+f_0'')^2+8\lambda_0f_0''(\lambda_0f_2''+f_1'')+4(\lambda_0f_2'+f_1')\lambda_0f_0'''+\\
&+4(\lambda_0f_1'+f_0')(\lambda_0f_1'''+f_0''')+4\lambda_0f_0'(\lambda_0f_2'''+f_1'''),\\
&C_1^3=4\left\{n_2(\lambda_0-1)+n_1+\lambda_0[n_3(\lambda_0-1)+n_2]\right\}\\
&C_2^3=2(\lambda_0+1)+[n_3(\lambda_0-1)+n_2]+2[n_1(\lambda_0-1)+1][n_2(\lambda_0-1)+n_1].
\end{aligned}
$$

Краевые условия для функции $f_3(\theta)$ следуют из условий отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$
f_3(\theta=\pm\pi)=0,\quad f_3'(\theta=\pm\pi)=0. \tag{5.8}
$$

Условие разрешимости краевой задачи для уравнения (5.7) позволило найти коэффициент n_3. Для коэффициента n_3 асимптотического разложения показателя нелинейности материала из условия разрешимости получены следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0=-7/2, \qquad n=1+\frac{4}{9}\varepsilon-\frac{12743}{32805}\varepsilon^2+\frac{218845909}{239148450}\varepsilon^3+O(\varepsilon^4),\\
&\lambda_0=-5/2, \qquad n=1+\frac{4}{7}\varepsilon-\frac{79}{2401}\varepsilon^2-\frac{75883}{1647086}\varepsilon^3+O(\varepsilon^4),\\
&\lambda_0=-3/2, \qquad n=1+\frac{4}{5}\varepsilon+\frac{669}{625}\varepsilon^2-\frac{152461}{156250}\varepsilon^3+O(\varepsilon^4),\\
&\lambda_0=-1/2, \qquad n=1+\frac{4}{3}\varepsilon+\frac{92}{81}\varepsilon^2-\frac{2576}{2187}\varepsilon^3+O(\varepsilon^4),\\
&\lambda_0=1/2, \qquad n=1+4\varepsilon+8\varepsilon^2+16\varepsilon^3+O(\varepsilon^4),
\end{aligned}
$$

$$\lambda_0 = 3/2, \qquad n = 1 - 4\varepsilon + \frac{53}{5}\varepsilon^2 + \frac{4531}{50}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$
$$\lambda_0 = 5/2, \qquad n = 1 - \frac{4}{3}\varepsilon + \frac{683}{567}\varepsilon^2 + \frac{199043}{214326}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4),$$
$$\lambda_0 = 7/2, \qquad n = 1 - \frac{4}{5}\varepsilon - \frac{613}{1875}\varepsilon^2 - \frac{817069}{1406250}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4).$$

Обобщая формулы для различных значений λ_0, можно найти

$$n_3 = \frac{-\lambda_0^{10} + 4\lambda_0^9 + 7\lambda_0^8 - 39\lambda_0^7 + \lambda_0^6 + 106\lambda_0^5 - 55\lambda_0^4 - 71\lambda_0^3 + 36\lambda_0^2 + 16\lambda_0 - 8}{(\lambda_0 - 1)^7(\lambda_0 + 1)^2},$$
$$\left(\lambda_0 \geqslant \frac{3}{2}\right);$$
$$n_3 = \frac{-\lambda_0^{10} + 4\lambda_0^9 + 7\lambda_0^8 - 43\lambda_0^7 + 9\lambda_0^6 + 124\lambda_0^5 - 89\lambda_0^4 - 99\lambda_0^3 + 76\lambda_0^2 + 30\lambda_0 - 22}{(\lambda_0 - 1)^7(\lambda_0 + 1)^2},$$
$$\left(\lambda_0 \leqslant -\frac{3}{2}\right).$$

Выводы

Приближенное решение рассматриваемой нелинейной задачи на собственные значения можно сравнить с имеющимся точным численным решением [23]. Относительная ошибка трехчленного разложения $n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2$ составляет для $n = 2$ два процента ($\lambda_0 = -1/2$).

Для $n = 3$ четырехчленное асимптотическое разложение показателя нелинейности материала приводит к следующему собственному значению $\lambda = 0,222404$; точное численное решение позволяет найти, что $\lambda = 0,228641$. Относительная погрешность не превышает $2,81$ %.

Для решения Хатчинсона — Райса — Розенгрена (для которого известна аналитическая зависимость собственного числа от показателя нелинейности материала $\lambda = n/(n+1)$) четырехчленное асимптотическое разложение показателя нелинейности материала $n = 1 + 4\varepsilon + 8\varepsilon^2 + 16\varepsilon^3$ вместе с представлением $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ позволяет найти собственное значение для $n = 2$ с относительной погрешностью, равной $0,68$ %, и для $n = 3$ с относительной погрешностью, равной $2,91$ %.

Таким образом, можно заключить, что полученная методом возмущений приближенная оценка собственного значения дает возможность отыскать собственное значение с хорошей точностью.

Литература

[1] Бьюи Х.Д. Механика разрушения: обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 412 с.

[2] Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. Engineering Fracture Mechanics. 2009. V. 76. P. 1771–1784.

[3] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. Самара: Изд-во "Самарский университет". 2006. 232 с.

[4] Stepanova L. Eigenspectra and orders of stress singularity at a mode I crack tip for a power-law medium // Comptes Rendus Acad. Sciences. Mecanique. 2008. V. 336. № 1–2. P. 232–237.

[5] Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: механика разрушения. М.: ЛЕНАНД, 2010. 456 с.

[6] Sih G.C. Crack tip mechanics based on progressive damage of arrow: Hierarchy of singularities and multiscale segment // TAFM. 2009. V. 51. P. 11–32.

[7] Sih G.C., Tang X.S. Simultaneity of multiscaling for macro meso micro damage model represented by strong singularities // TAFM. 2004. V. 42. P. 199–225.

[8] Sih G.C., Tang X.S. Weak and strong singularities reflecting multiscale damage: micro-boundary conditions for free-free, fixed–fixed and free-fixed constraints // J. Theoret. Appl. Fract. Mech. 2005. V. 43. № 1. P.1—58.

[9] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions. ASME. // J. Appl. Mech. 1952. V. 74. P. 526–528.

[10] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. ASME. // J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 109–114.

[11] Li J., Recho N. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture. Paris: Hermes Science Publications, 2002. 262 p.

[12] Hutchinson J.W. Singular behaviour at the end of tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 1. P. 13–31.

[13] Hutchinson J.W. Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. № 5. P. 337–347.

[14] Rice J.R., Rosengren G.F. Plane strain deformation near a crack tip ina power-law harderning material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16. P. 1–12.

[15] Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

[16] Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley and Sons, 1995. 704 p.

[17] Anheuser M., Gross D. Higher order fields at crack and notch tips in power-law materials under longitudinal shear // Archive of Applied Mechanics. 1994. V. 64. P. 509–518.

[18] Адылина Е.М., Игонин С.А., Степанова Л.В. О нелинейной задаче на собственные значения, следующей из анализа напряжений у вершины усталостной трещины // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2012. № 3/1(94). P. 83–102.

[19] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Интеллект, 2010. 368 с.

[20] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.

[21] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

[22] Liao S. Beyond Perturbation. Introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton; London; New York; Washington: Charman and Hall, 2004. 336 p.

[23] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М: Физматлит, 2009. 336 с.

[24] Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Интеллект, 2009. 216 с.

Поступила в редакцию 22/*II*/2012;
в окончательном варианте — 22/*II*/2012.

ON DEVELOPMENT OF MULTISCALE FRACTURE MODELS

© 2012 E.M. Adylina, L.V. Stepanova[3]

An approximate solution of nonlinear eigenvalue problem arising from the Mode I crack problem in a nonlinear power-law medium is obtained. The perturbation technique is used. The method allows to find the analytical formula expressing the eigenvalue as the function of parameters of constitutive law and eigenvalue corresponding to the linear undisturbed problem.

Key words: nonlinear eigenvalue problem, stress-strain state near the crack tip, stress singularity, multiscale fracture model, perturbation method, analytical solution.

Paper received 22/*II*/2012.
Paper accepted 22/*II*/2012.

[3]Adylina Ekaterina Mikhailovna (`kateadulina@mail.ru`), Stepanova Larisa Valentinovna (`lst@ssu.samara.ru`), the Dept. of Mathematical Modeling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.