УДК 517.956.6

О ЗАДАЧЕ С ОБОБЩЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© 2012 О.А. Репин[1], С.К. Кумыкова[2]

Для вырождающегося гиперболического уравнения исследована задача с операторами дробного дифференцирования Сайго в краевом условии на характеристической части границы области. Доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: интеграл и производная Римана — Лиувилля дробного порядка, интегральные уравнения Фредгольма, гипергеометрическая функция Гаусса, резольвента ядра.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$|y|^l u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{1.1}$$

где $l = m$ при $y > 0$ и $l = n$ при $y < 0$, m, n — положительные постоянные в конечной области Ω, ограниченой характеристиками

$$AC: \; x - \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: \; x + \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

$$AD: \; x - \frac{2}{n+2} (-y)^{\frac{n+2}{2}} = 0, \quad BD: \; x + \frac{2}{n+2} (-y)^{\frac{n+2}{2}} = 1,$$

уравнения (1.1).

Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (y < 0)$, I — интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$.

Задача. Найти решение

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in \Omega_1, \\ u_2(x,y), & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

уравнения (1.1) из класса

$$C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_1 \cup I) \cap C^1(\Omega_2 \cup I) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

[1]Репин Олег Александрович (matstat@mail.ru), кафедра математической статистики и эконометрики Самарского государственного экономического университета, 443090, Российская Федерация, г. Самара, ул. Советской Армии, 141.

[2]Кумыкова Светлана Каншубиевна (bsk@rect.kbsu.ru), кафедра теории функций и функционального анализа Кабардино-Балкарского государственного университета, 360004, Российская Федерация, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{gathered} a_i(x)\left(I_{0+}^{-\beta_i,0,2\beta_i-1}u[\Theta_0^{(i)}(t)]\right)(x)+ \\ +b_i(x)\left(I_{1-}^{-\beta_i,0,2\beta_i-1}u[\Theta_1^{(i)}(t)]\right)(x)=\gamma_i(x) \quad \forall x\in I,\ i=1,\,2, \end{gathered} \tag{1.2}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to 0+}u_y(x,y)=\alpha(x)\lim_{y\to 0-}u_y(x,y)+\beta(x), \tag{1.3}$$

где $\beta_1=\frac{m}{2m+4}$, $\beta_2=\frac{n}{2n+4}$; $\Theta_0^{(i)}(x)$, $\Theta_1^{(i)}(x)$ – точки пересечения характеристик уравнения (1.1), выходящих из точки $(x,0)\in I$, с характеристиками AC, AD, BC, BD соответственно; $a_i(x)$, $b_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – заданные непрерывные функции, причем

$$a_i^2(x)+b_i^2(x)\neq 0 \quad \forall x\in \overline{I} \quad (i=1,\,2), \tag{1.4}$$

$$a_i(x),\, b_i(x),\, \gamma_i(x),\, \alpha(x),\, \beta(x)\in C^1(\overline{I})\cap C^2(I),$$

$I_{0+}^{-\beta_i,0,2\beta_i-1}f$, $I_{1-}^{-\beta_i,0,2\beta_i-1}f$ $(i=1,\,2)$ – обобщенные операторы дробного дифференцирования [1; 2, с. 326–327; 3, с. 14].

Отметим, что в случае, когда в краевом условии (1.2) вместо обобщенных операторов присутствуют операторы Римана — Лиувилля, эта задача исследована в [4], а когда $\Omega_1\equiv I$ – в [5].

Настоящая работа обобщает результаты работ [4; 5].

2. Единственность решения задачи

Теорема. В области Ω не может существовать более одного решения сформулированной задачи, если $\alpha(x)\equiv 1$ и выполнены условия

$$a_i(1)[a_i(1)+b_i(1)]>0 \quad \text{и} \quad b_i(0)[a_i(0)+b_i(0)]<0, \quad i=1,2, \tag{2.1}$$

$$a_i(x)\neq 0,\quad \left[\frac{b_i(x)}{a_i(x)}\right]'\geqslant 0,\quad \text{либо}\quad b_i(x)\neq 0,\quad \left[\frac{a_i(x)}{b_i(x)}\right]'\leqslant 0 \quad \forall x\in\overline{I} \tag{2.2}$$

Доказательство. Переходя к доказательству единсвенности решения задачи, положим

$$\tau(x)=u(x,0),\quad \nu_1(x)=\lim_{y\to 0+}u_y(x,y),\quad \nu_2(x)=\lim_{y\to 0-}u_y(x,y).$$

Выписывая решение задачи Коши в области Ω_1 [6, с. 265], найдем $u[\Theta_0^{(1)}(x)]$ и $u[\Theta_1^{(1)}(x)]$:

$$u[\Theta_0^{(1)}(x)]=\gamma_1 I_{0+}^{\beta_1,0,\beta_1-1}\tau(x)+\gamma_2 I_{0+}^{1-\beta_1,2\beta_1-1,\beta_1-1}\nu_1(x), \tag{2.3}$$

$$u[\Theta_1^{(1)}(x)]=\gamma_1 I_{1-}^{\beta_1,0,\beta_1-1}\tau(x)+\gamma_2 I_{1-}^{1-\beta_1,2\beta_1-1,\beta_1-1}\nu_1(x), \tag{2.4}$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta_1)}{\Gamma(\beta_1)},\quad \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta_1}\frac{\Gamma(1-2\beta_1)}{\Gamma(1-\beta_1)}.$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (1.2) и используя соотношения [2, с. 327]

$$\begin{gathered} \left(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\left(I_{0+}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}\varphi\right)(t)\right)(x)=\left(I_{0+}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}\varphi\right)(x) \quad (\gamma>0), \\ \left(I_{1-}^{\alpha,\beta,\eta}\left(I_{1-}^{\gamma,\delta,\alpha+\eta}\varphi\right)(t)\right)(x)=\left(I_{1-}^{\alpha+\gamma,\beta+\delta,\eta}\varphi\right)(x) \quad (\gamma>0) \end{gathered} \tag{2.5}$$

после некоторых преобразований, получим

$$\tau(x) = -A_1(x) I_{0+}^{1-2\beta_1} \nu_1(x) - B_1(x) I_{1-}^{1-2\beta_1} \nu_1(x) + \frac{\gamma_1(x)}{A_0(x)}, \tag{2.6}$$

где I_{0+}^{α}, I_{1-}^{α} – операторы дробного интегрирования Римана — Лиувилля [2, с. 42].

$$A_0(x) = \gamma_1 [a_1(x) + b_1(x)] \neq 0,$$

$$A_1(x) = \frac{\gamma_2 a_1(x)}{A_0(x)}, \quad B_1(x) = \frac{\gamma_2 b_1(x)}{A_0(x)}. \tag{2.7}$$

Аналогично в области Ω_2 получаем соотношение

$$\tau(x) = A_2(x) I_{0+}^{1-2\beta_2} \nu_2(x) + B_2(x) I_{1-}^{1-2\beta_2} \nu_2(x) + \frac{\gamma_2(x)}{B_0(x)}, \tag{2.8}$$

где

$$B_0(x) = \gamma_3 [a_2(x) + b_2(x)] \neq 0,$$

$$A_2(x) = \frac{\gamma_4 a_2(x)}{B_0(x)}, \quad B_2(x) = \frac{\gamma_4 b_2(x)}{B_0(x)},$$

$$\gamma_3 = \frac{\Gamma(2\beta_2)}{\Gamma(\beta_2)}, \quad \gamma_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{n+2} \right)^{2\beta_2} \frac{\Gamma(1-2\beta_2)}{\Gamma(1-\beta_2)}.$$

Покажем, что интеграл

$$I^* = \int_0^1 \tau(x) \nu_2(x)\, dx \geqslant 0.$$

При $\gamma_2(x) \equiv 0$ (2.8) примет вид:

$$\tau(x) = A_2(x) I_{0+}^{1-2\beta_2} \nu_2(x) + B_2(x) I_{1-}^{1-2\beta_2} \nu_2(x).$$

Рассмотрим интеграл

$$I^* = \int_0^1 A_2(x) \nu_2(x) I_{0+}^{1-2\beta_2} \nu_2(x) dx + \int_0^1 B_2(x) \nu_2(x) I_{1-}^{1-2\beta_2} \nu_2(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-2\beta_2)} \int_0^1 A_2(x) \nu_2(x) dx \int_0^x \frac{\nu_2(t) dt}{(x-t)^{2\beta_2}} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(1-2\beta_2)} \int_0^1 B_2(x) \nu_2(x) dx \int_x^1 \frac{\nu_2(t) dt}{(t-x)^{2\beta_2}}.$$

Далее применим методику, восходящую к Ф. Трикоми [7, с. 385–386]. Воспользуемся формулой [7, с. 385] для функции $\Gamma(\mu)$:

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \cos(kt)\, dt = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (k > 0,\ 0 < \mu < 1).$$

Полагая в ней $k = |x-\xi|$, $\mu = 2\beta_2$, получим

$$\frac{1}{|x-\xi|^{2\beta_2}} = \frac{1}{\Gamma(2\beta_2) \cos(\pi\beta_2)} \int_0^\infty t^{2\beta_2 - 1} \cos(t|x-\xi|)\, dt.$$

Откуда находим

$$\Gamma(2\beta_2)\Gamma(1-2\beta_2)\cos(\pi\beta_2)I^* =$$
$$= \int\limits_0^1 A_2(x)\nu_2(x)dx \int\limits_0^x \nu_2(\xi)d\xi \int\limits_0^\infty t^{2\beta_2-1}\cos[t(x-\xi)]\,dt +$$
$$+ \int\limits_0^1 B_2(x)\nu_2(x)dx \int\limits_x^1 \nu_2(\xi)d\xi \int\limits_0^\infty t^{2\beta_2-1}\cos[t(\xi-x)]\,dt.$$

Пользуясь тем, что $\Gamma(2\beta_2)\Gamma(1-2\beta_2) = \frac{\pi}{\sin(2\pi\beta_2)}$, поменяв порядок интегрирования, интегрируя по частям, после преобразований имеем

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\beta_2)}I^* = \int\limits_0^\infty t^{2\beta_2-1}\cdot\left(A_2(1)\left[\left(\int\limits_0^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2 + \left(\int\limits_0^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right] -\right.$$
$$\left. - \int\limits_0^1 A_2'(x)\left[\left(\int\limits_0^x \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2 + \left(\int\limits_0^x \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]dx\right)dt -$$
$$- \int\limits_0^\infty t^{2\beta_2-1}\cdot\left(B_2(0)\left[\left(\int\limits_0^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2 + \left(\int\limits_0^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right] -\right.$$
$$\left. - \int\limits_0^1 B_2'(x)\left[\left(\int\limits_x^1 \nu_2(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2 + \left(\int\limits_x^1 \nu_2(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2\right]dx\right)dt. \tag{2.9}$$

В силу условий (2.1), (2.2) и того, что $\sin(\pi\beta_2) > 0$, заключаем, что интеграл $I^* \geqslant 0$.

Аналогичными вычислениями получаем, что $\int\limits_0^1 \tau(x)\nu_1(x)dx \leqslant 0$. А так как $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ при $\alpha(x) \equiv 1$, $\beta(x) \equiv 0$, то $\int\limits_0^1 \tau(x)\nu_i(x)dx = 0\,(i=1,2)$.

Таким образом, левая часть (2.9) равна нулю. Поскольку слагаемые справа неотрицательны, то они также равны нулю. В частности,

$$\int\limits_0^\infty t^{2\beta_i-1}dt\left(\int\limits_0^1 \nu_i(\xi)\cos(t\xi)d\xi\right)^2 = 0,$$
$$\int\limits_0^\infty t^{2\beta_i-1}dt\left(\int\limits_0^1 \nu_i(\xi)\sin(t\xi)d\xi\right)^2 = 0,\ (i=1,2).$$

Так как $t^{2\beta_i-1} \geqslant 0$, то

$$\int\limits_0^1 \nu_i(\xi)\cos(t\xi)d\xi = 0, \quad \int\limits_0^1 \nu_i(\xi)\sin(t\xi)d\xi = 0,\ (i=1,2),$$

для всех $t \in [0,\infty)$, в частности, при $t = 2\pi k$, $k = 0,\,1,\,2,\,\ldots$. При этих значениях t функции $\sin(t\xi)$ и $\cos(t\xi)$ образуют полную ортогональную систему функций в L^2.

Следовательно, $\nu_i(\xi) = 0$ почти всюду, а так как они непрерывны по условию, то $\nu_i(\xi) = 0$ всюду. Отсюда из (2.6) и (2.8) легко заметить, что $\tau(x) = 0$ и $u_i(x, y) \equiv 0$ в областях Ω_1 и Ω_2, как решения задачи Коши с нулевыми данными.

3. Существование решения задачи

Пусть $n \geqslant m$. Удовлетворяя (2.6) и (2.8) условию сопряжения (1.3), получим при $A_2(x) \neq 0$ соотношение

$$\begin{gathered} I_{0+}^{1-2\beta_2}\nu_2(x) + B_3(x)I_{1-}^{1-2\beta_2}\nu_2(x) + B_4(x)I_{1-}^{1-2\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) + \\ + B_5(x)I_{0+}^{1-2\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) = f(x), \end{gathered} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{gathered} B_3(x) = \frac{B_2(x)}{A_2(x)}, \quad B_4(x) = \frac{B_1(x)}{A_2(x)}, \quad B_5(x) = \frac{A_1(x)}{A_2(x)}, \\ f(x) = \frac{\gamma_1(x)}{A_0(x)A_2(x)} - \frac{\gamma_2(x)}{B_0(x)A_2(x)} - \\ - B_5(x)I_{0+}^{1-2\beta_1}\beta(x) - B_4(x)I_{1-}^{1-2\beta_1}\beta(x). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Действуя на обе части (3.1) оператором $D_{0+}^{1-2\beta_2}$, имеем

$$\begin{gathered} \nu_2(x) + D_{0+}^{1-2\beta_2}B_3(x)I_{1-}^{1-2\beta_2}\nu_2(x) + D_{0+}^{1-2\beta_2}B_4(x)I_{1-}^{1-2\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) + \\ + D_{0+}^{1-2\beta_2}B_5(x)I_{0+}^{1-2\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) = D_{0+}^{1-2\beta_2}f(x). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Исследуем вопрос разрешимости уравнения (3.3). Для этого преобразуем выражения, входящие в левую часть (3.3). Так же, как и в [4; 8], можно показать, что

$$\begin{gathered} D_{0+}^{1-2\beta_2}B_3(x)I_{1-}^{1-2\beta_2}\nu_2(x) = \cos(2\pi\beta_2)B_3(x)\nu_2(x) + \\ + \frac{\sin(2\pi\beta_2)}{\pi}\left[\int_0^x K_1(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + \int_x^1 K_2(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi\right], \end{gathered}$$

где

$$K_1(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_0^\xi \frac{B_3(t)dt}{(x-t)^{2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_2}},$$

$$K_2(x,\xi) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{B_3(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_2}}.$$

$$D_{0+}^{1-2\beta_2}B_4(x)I_{1-}^{1-2\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2\beta_2)\Gamma(1-2\beta_1)}\left[\displaystyle\int_0^x K_3(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + \int_x^1 K_4(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi\right] \text{при}\, n > m, \\ \dfrac{\sin(2\pi\beta_2)}{\pi}\left[\displaystyle\int_0^x K_3(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi + \int_x^1 K_4(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi\right] + \\ \quad + \cos(2\pi\beta_2)\alpha(x)B_4(x)\nu_2(x)\,\text{при}\, n = m, \end{cases}$$

где

$$K_3(x,\xi) = \alpha(\xi)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{B_4(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_1}},$$

$$K_4(x,\xi)=\alpha(\xi)\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\xi}\frac{B_4(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_1}}.$$

$$D_{0+}^{1-2\beta_2}B_5(x)I_{0+}^{1-2\beta_1}\alpha(x)\nu_2(x)=\begin{cases}\int\limits_0^x K_5(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi \text{ при } n>m,\\ \int\limits_0^x K_5(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi+\alpha(x)\nu_2(x) \text{ при } n=m,\end{cases}$$

где

$$K_5(x,\xi)=\frac{\alpha(\xi)}{\Gamma(2\beta_2)\Gamma(1-2\beta_1)}\left[\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{B_5(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(t-\xi)^{2\beta_1}}-\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\xi}\frac{B_5(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(t-\xi)^{2\beta_1}}\right].$$

Установим свойства ядер $K_i(x,\xi)$, $i=\overline{1,5}$.

$$K_1(x,\xi)=B_3(\xi)\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\xi}\frac{dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_2}}-\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\xi}\frac{[B_3(\xi)-B_3(t)]dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_2}}.$$

Очевидно, гладкость ядра $K_1(x,\xi)$ будет определяться гладкостью первого слагаемого правой части. Поэтому ограничимся изучением свойств этого интеграла.

$$I_1(x,\xi)=B_3(\xi)\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\xi}\frac{dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_2}}=$$

$$=\frac{B_3(\xi)}{1-2\beta_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta_2}F\left(1-2\beta_2,1;2-2\beta_2;\frac{\xi}{x}\right).$$

Используя формулу [9, с. 110]

$$\frac{d}{dz}z^{\alpha}F(\alpha,\beta;\gamma;z)=\alpha z^{\alpha-1}F(\alpha+1,\beta;\gamma;z),$$

получим

$$I_1(x,\xi)=-\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta_2}\frac{B_3(\xi)}{x-\xi}.$$

Аналогично исследуется ядро $K_2(x,\xi)$.

Из приведенных рассуждений видно, что ядра $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ допускают оценки $K_1(x,\xi)=0(1)(x-\xi)^{-1}$, $K_2(x,\xi)=0(1)(\xi-x)^{-1}$, где $0(1)$ означает ограниченную в $\overline{I}\times\overline{I}$ величину.

Установим свойства ядер $K_3(x,\xi)$ и $K_4(x,\xi)$.

В смысле гладкости они будут себя вести как интегралы

$$I_2(x,\xi)=\alpha(\xi)B_4(\xi)\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\frac{dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_1}},$$

$$I_3(x,\xi)=\alpha(\xi)B_4(\xi)\frac{d}{dx}\int\limits_0^{\xi}\frac{dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}(\xi-t)^{2\beta_1}}.$$

После несложных вычислений будем иметь

$$I_2(x,\xi)=\frac{1-2\beta_2}{1-2\beta_1}\frac{\alpha(\xi)B_4(\xi)}{(x-\xi)^{1-2(\beta_2-\beta_1)}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta_1}F\left(2\beta_2-2\beta_1,1-2\beta_1;2-2\beta_1;\frac{\xi}{x}\right),$$

$$I_3(x,\xi)=\frac{\beta_1}{\beta_2}\frac{\alpha(\xi)B_4(\xi)}{(\xi-x)^{1-2(\beta_2-\beta_1)}}\left(\frac{\xi}{x}\right)^{1-2\beta_2}F\left(2\beta_2-2\beta_1,2\beta_2;1+2\beta_2;\frac{x}{\xi}\right).$$

Таким образом при $n>m$ ядра $K_3(x,\xi)$ и $K_4(x,\xi)$ непрерывно дифференцируемы в квадрате $0<\xi,\ x<1$ при $\xi\neq x$ и допускают следующие оценки:

$$K_3(x,\xi)=0(1)(x-\xi)^{2(\beta_2-\beta_1)-1},$$

$$K_4(x,\xi)=0(1)(\xi-x)^{2(\beta_2-\beta_1)-1}.$$

Из представления ядра $K_5(x,\xi)$ с учетом предыдущих вычислений имеем, что поведение $K_5(x,\xi)$ аналогично поведению в смысле гладкости ядер $K_3(x,\xi)$, $K_4(x,\xi)$, т. е. ядро $K_5(x,\xi)$ при $n\geqslant m$ непрерывно дифференцируемо в квадрате $0<\xi,\ x<1$ при $\xi\neq x$ и допускает следующую оценку:

$$K_5(x,\xi)=0(1)|x-\xi|^{2(\beta_2-\beta_1)-1}.$$

Таким образом, уравнение (3.3) принимает вид

$$A(x)\nu_2(x)+\int\limits_0^1\frac{K(x,\xi)\nu_2(\xi)d\xi}{\xi-x}=F(x), \tag{3.4}$$

где

$$K(x,\xi)=K_6(x,\xi)(\xi-x),$$

$$K_6(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2\pi\beta_2)}{\pi}K_1(x,\xi)+\dfrac{K_3(x,\xi)}{\Gamma(2\beta_2)\Gamma(1-2\beta_1)}+K_5(x,\xi)\,\text{при}\,\xi\leqslant x,\\ \dfrac{\sin(2\pi\beta_2)}{\pi}K_2(x,\xi)+\dfrac{K_4(x,\xi)}{\Gamma(2\beta_2)\Gamma(1-2\beta_1)}\,\text{при}\,\xi\geqslant x,\end{cases}$$

$$A(x)=\begin{cases}1+\cos(2\pi\beta_2)B_3(x)\,\text{при}\,n>m,\\ 1+\cos(2\pi\beta_2)[B_3(x)+\alpha(x)B_4(x)]+\alpha(x)\,\text{при}\,n=m,\end{cases}$$

$$F(x)=D_{0+}^{1-2\beta_2}f(x).$$

Из установленных свойств ядер $K_i(x,\xi)$, $i=\overline{1,5}$, заключаем, что ядро $K_6(x,\xi)$ непрерывно дифференцируемо в квадрате $0<x,\ \xi<1$ при $\xi\neq x$ и допускает при $n\geqslant m$ следующую оценку:

$$K_6(x,\xi)=0(1)(\xi-x)^{-1},$$

где $0(1)$ означает ограниченную в $\overline{I}\times\overline{I}$ величину.

Выясним гладкость $F(x)$ правой части уравнения (3.4).

$$F(x)=D_{0+}^{1-2\beta_2}f(x)=\frac{1}{\Gamma(2\beta_2)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\beta_2)}\left[\frac{f(0)}{x^{1-2\beta_2}}+\int\limits_0^x\frac{f'(t)dt}{(x-t)^{1-2\beta_2}}\right].$$

Из вида функции $f(x)$, свойств функций $a_i(x)$, $b_i(x)$, $\gamma_i(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $i=1,2$ и свойств дробных интегралов нетрудно заключить, что правая часть

$F(x) \in C^1(I)$, причем при $x \to 0$ она может обращаться в бесконечность порядка не выше $1 - 2\beta_2$.

Таким образом, уравнение (3.4) при $A(x) \neq 0$ есть сингулярное интегральное уравнение [10, с. 157].

Условие $A^2(x) + K^2(x, x) \neq 0$ гарантирует существование регуляризатора, приводящего уравнение (3.4) к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Отсюда и из единственности искомого решения следует существование решения сформулированной задачи.

Исследование случая $m > n$ не представляет трудности и проводится аналогично случаю $n > m$.

Литература

[1] Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11. № 2. P. 135–143.

[2] Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 161 с.

[3] Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1992. 688 с.

[4] Кумыкова С.К. Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 1. С. 93–104.

[5] Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т. 187. № 4. С. 736–739.

[6] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.

[7] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Иностр. лит., 1957. 443 с.

[8] Кумыкова С.К., Нахушева Ф.Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 1. С. 50-65

[9] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.

[10] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Поступила в редакцию $3/IX/2012$;
в окончательном варианте — $3/IX/2012$.

ON A PROBLEM WITH GENERALIZED OPERATORS OF FRACTIONAL DIFFERENTIATION FOR A DEGENERATED INSIDE A DOMAIN HYPERBOLIC EQUATION

 O.A. Repin[3], S.K. Kumykova[4]

In this paper, we consider a problem with Saigo operators of fractional differentiation in a boundary condition on a characteristic part of a boundary. The unique solvability of this problem is proved.

Key words: integral and derivative of Riemann — Liouville fractional order, integral equations of Fredholm, Gauss hypergeometric function, kernel resolvent.

Paper received 3/IX/2012.
Paper accepted 3/IX/2012.

[3]Repin Oleg Alexandrovich (matstat@mail.ru), the Dept. of Mathematical Statistics and Econometrics, Samara State University of Economics, Samara, 443090, Russian Federation.

[4]Kumykova Svetlana Kanshubievna (bsk@rect.kbsu.ru), the Dept. of Function Theory and Functional Analysis, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, 360004, Russian Federation.