УДК 519.999

О НОРМАХ И НЕКОТОРЫХ АППРОКСИМАТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ БАСКАКОВА

© 2012 О.С. Лямина[1]

Статья относится к одному из актуальных вопросов теории приближений: исследованию аппроксимативных возможностей конкретных аппроксимирующих конструкций. В статье рассмотрен один из активно исследуемых в последнее время видов аппроксимирующих операторов – тригонометрические операторы Баскакова. Изучаются некоторые характеристики этих операторов: нормы и аппроксимационные константы, оценочные и улучшенные. Получена, в частности, оценка их разности.

Ключевые слова: тригонометрические операторы Баскакова, аппроксимационные оценки.

1. Вводные замечания

Тригонометрическими операторами Баскакова называют [3] аппроксимирующие последовательности вида

$$M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x) = \frac{2^{m-1}\prod\limits_{j=1}^{m}\sin^2\frac{\pi k_j}{n}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t+x)\sin^2\frac{nt}{2}dt}{\sin^2\frac{t}{2}\prod\limits_{j=1}^{m}\left(\cos t-\cos\frac{2\pi k_j}{n}\right)}, \qquad (1)$$

где целые параметры m, k_j не зависят от n и удовлетворяют неравенствам $m > 0, 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_m$. Если $m = 1$, то вместо k_1 пишут k. Известно [3; 7], что если $f(t) \in Lip_M\alpha$, то

$$\left\|M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x) - f(x)\right\| \leqslant MA_{O,\alpha}^{[m](k_1,\ldots,k_m)}n^{-\alpha} + o\left(n^{-\alpha}\right), \qquad (2)$$

где

$$A_{O,\alpha}^{[m](k_1,\ldots,k_m)} = 2^{1+\alpha}\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^{\infty}\frac{t^\alpha\sin^2 tdt}{t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}.$$

Говорят, что $f(t)$ принадлежит классу $Lip_M\alpha$, $M>0$, $\alpha\in(0,\,1]$, если $\forall t_1,\ t_2$ выполняется $|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant M\,|t_1-t_2|^\alpha$.

[1]Лямина Ольга Сергеевна (lyamina-os@mail.ru), кафедра прикладной информатики и математики Забайкальского государственного университета, 672039, Российская Федерация, г. Чита, ул. Александро-Заводская, 30.

Константа $A_O^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$ в неравенстве (2) точной не является и может быть (в некоторых случаях, как установлено) улучшена. Так, известно, что если для данных фиксированных значений параметров существуют константы $\lambda_1^o,\ \lambda_2^o,\ldots,\lambda_m^o$, такие, что $0<\lambda_1^o<k_1\pi<\lambda_2^o<k_2\pi<\ldots<k_{m-1}\pi<\lambda_m^o<k_m\pi$ и для $j=1,2,\ldots,m$ выполняется $\int\limits_{\lambda_j^o}^{\lambda_{j+1}^o}\frac{sin^2tdt}{t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left(k_j^2\pi^2-t^2\right)}=0$, при этом полагаем $\lambda_{m+1}^o=$ $=\infty$, то для операторов (1), если $f(t)\in Lip_M\alpha$, выполняется оценка [7]

$$\left\|M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}(f,x)-f\left(x\right)\right\|\leqslant MA_{y,\alpha}^{[m](k_1,\ldots,k_m)}n^{-\alpha}+o\left(n^{-\alpha}\right),$$

где

$$A_{y,\alpha}^{[m](k_1,\ldots,k_m)}=2^{1+\alpha}\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\left(\int\limits_0^{\lambda_1^o}\frac{t^\alpha\sin^2tdt}{t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left(k_j^2\pi^2-t^2\right)}+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\lambda_j^o}^{\lambda_{j+1}^o}\frac{|t-k_j\pi|^\alpha\sin^2tdt}{t^2\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}\right).$$

В [7] приведена другая форма записи этой константы, эквивалентная приведенной. Существование множеств констант $\Lambda_{[m](k_1,\ldots,k_m)}^O=\left\{\lambda_j^o\right\}_{j=1}^m$, удовлетворяющих приведенным выше условиям, доказано в следующих частных случаях: 1) при $m=1,\ 2,\ 3$ и любых допустимых значениях параметров k_j (см. [4,7]), 2) при $m=4$ и некоторых конкретных наборах параметров k_j (см. [2,5]), 3) при $m=5$ и $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5)=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ (см. [1]).

2. Некоторые свойства норм операторов Баскакова

2.1. Отсутствие конечной верхней грани по m

Известно (например, [3]), что норма оператора Баскакова определяется равенством

$$\left\|M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}\right\|=2\,\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^\infty\frac{\sin^2t\,dt}{t^2}\left(\prod_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|\right)^{-1}+\gamma_n,\qquad(3)$$

при этом $\gamma_n\to0$ при $n\to\infty$.

Так как интеграл в правой части (3) сходится, нормы операторов $M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}$ при любых фиксированных $m,\ k_j$ равномерно по n ограничены. Обозначим $\eta(m,\ k_1,\ldots,k_m)$ — главное слагаемое правой части равенства (3). То есть

$$\eta(m,\ k_1,\ldots,k_m)=2\,\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^\infty\frac{\sin^2t\,dt}{t^2}\left(\prod_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|\right)^{-1}.$$

Теорема 1. Множество величин $\eta(m,\ k_1,\ldots,k_m)$ не имеет конечной верхней грани.

Доказательство (идея доказательства заимствована из доказательства одной теоремы Е.Ю. Карымовой [3, с. 31, 32]).

Для сокращения записи обозначим $\eta(m)=\eta(m,\ 1,\ 2,\ldots,\ m)$. Обозначим далее $\Phi(m,\ r)=2\,\pi^{2m-1}(m!)^2\int\limits_0^r\frac{\sin^2t\,dt}{t^2}\left(\prod\limits_{j=1}^{m}\left|j^2\pi^2-t^2\right|\right)^{-1}$. Тогда $\eta(m)=\lim\limits_{r\to\infty}\Phi(m,\ r)$.

При фиксированном $r > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(m,\ r) = 2\,\pi^{-1} \int\limits_0^r \frac{\sin^2 t\ dt}{t^2 \prod\limits_{j=1}^{\infty} \left|1 - \frac{t^2}{j^2\pi^2}\right|}. \tag{4}$$

Равенство (4) получается следующим образом: для фиксированного m коэффициент перед интегралом и знаменатель под интегралом делим на $\pi^{2m}(m!)^2$, затем переходим к пределу при $m \to \infty$.

Учитывая, что $\sin t = t \prod\limits_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{j^2\pi^2}\right)$, а следовательно, при $t > 0$

$$t \prod_{j=1}^{\infty} \left|1 - \frac{t^2}{j^2\pi^2}\right| = \left|t \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{j^2\pi^2}\right)\right| = |\sin t|\,,$$

получим

$$\lim_{m\to\infty} \Phi(m,\ r) = 2\,\pi^{-1} \int\limits_0^r \frac{|\sin t|\ dt}{t}. \tag{5}$$

Интеграл в правой части (5) при $r \to \infty$ стремится к бесконечности со скоростью $O(\ln r)$. Таким образом, величины $\eta(m)$ не имеют конечной верхней грани.

Теорема доказана.

2.2. Случай m=1

В случае $m = 1$ будем писать k вместо k_1.

В этом случае $\left\|M_n^{[1](k)}\right\| = A_{o,\,0} + \gamma_{k,\,n}$, где $A_{o,\,0} = A_{o,\,0}(k) = 2\,\pi\,k^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 tdt}{t^2|k^2\pi^2 - t^2|}$, при любом фиксированном k имеет место $\gamma_{k,\,n} = o(1)$ (см. [3]).

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 2. При $k \to \infty$ имеет место асимптотическое равенство $A_{o,\,0}(k) = 1 + O\left(\frac{ln\,k}{k}\right)$.

Доказательство.

Заметим, из равенства $M_n^{[1](k)}(1, x) = 1$ следует $2\,\pi\,k^2 \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 tdt}{t^2(k^2\pi^2 - t^2)} = 1$ (см. [1]).

Отсюда получаем $2\ \pi\ k^2 \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{\sin^2 tdt}{t^2(k^2\pi^2 - t^2)} > 1$. Это значит, что найдется $\lambda_0 < k\ \pi$ (λ_0 зависит от k), такое, что

$$2\,\pi\,k^2 \int\limits_0^{\lambda_0} \frac{\sin^2 tdt}{t^2\,(k^2\pi^2 - t^2)} = 1. \tag{6}$$

Из (6) следует, в свою очередь, что

$$2\,\pi\,k^2 \int\limits_{\lambda_0}^{k\,\pi} \frac{\sin^2 tdt}{t^2\,(k^2\pi^2 - t^2)} = 2\,\pi\,k^2 \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 tdt}{t^2\,|k^2\pi^2 - t^2|}. \tag{7}$$

На основании (6) и (7) приходим к выводу, что для доказательства теоремы достаточно исследовать поведение величины $J(k) = 2\,\pi\,k^2 \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{\sin^2 tdt}{t^2(k^2\pi^2 - t^2)}$.

Используя равенство $\frac{1}{t^2(k^2\pi^2-t^2)} = (\pi\, k)^{-2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{k^2\pi^2-t^2}\right)$, получим

$$J(k) = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{t^2} + \int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{k^2\pi^2-t^2}\right). \tag{8}$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (8).

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{t^2} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 tdt}{t^2} + O(k^{-1}) = 1 + O(k^{-1}). \tag{9}$$

Используется $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 tdt}{t^2} = \frac{\pi}{2}$ (см. [6, форм. 859.002]).

Покажем теперь, что второе слагаемое в правой части (8) имеет порядок $k^{-1}ln\, k$. Раскладывая в сумму дробь $(k^2\pi^2-t^2)^{-1}$, имеем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{k^2\pi^2-t^2} = \frac{1}{k\pi^2}\left(\int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{k\,\pi+t} + \int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{k\,\pi-t}\right). \tag{10}$$

Относительно первого интеграла в скобках правой части (9) имеем

$$\int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{k\,\pi+t} < (k\pi)^{-1}\int\limits_0^{k\,\pi}\sin^2 tdt = O(1). \tag{11}$$

Во втором интеграле делаем замену $\tau = k\,\pi - t$:

$$\int\limits_0^{k\,\pi}\frac{\sin^2 tdt}{k\,\pi-t} = \int\limits_0^{k\,\pi}\frac{sin^2\tau d t}{\tau} = O(ln\, k).$$

Имея в виду (7), делаем вывод, что теорема доказана.

2.3. Случай m=2

Теорема 3. Величина $\eta(2,\ k_1,\ k_2)$ равномерно ограничена по всем возможным наборам $(k_1,\ k_2)$.

Доказательство.

Представим $\eta(2,\ k_1,\ k_2)$ в виде суммы трех слагаемых

$$\eta(2,\ k_1,\ k_2) = 2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\ dt}{t^2(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)} +$$

$$+2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int\limits_{k_1\,\pi}^{k_2\,\pi}\frac{\sin^2 t\ dt}{t^2(t^2-k_1^2\pi^2)(k_2^2\pi^2-t^2)} + 2\pi^3 k_1^2 k_2^2 \int\limits_{\infty}^{k_2\,\pi}\frac{\sin^2 t\ dt}{t^2(t^2-k_1^2\pi^2)(t^2-k_2^2\pi^2)} = T_1+T_2+T_3.$$

Рассмотрим по очереди слагаемые $T_1,\ T_2,\ T_3$.

$$T_1 = 2\frac{\pi k_1^2 k_2^2}{k_2^2-k_1^2}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\left(\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2} - \frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}\right)dt =$$

$$= 2\,\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\ dt}{t^2} + 2\,\pi\frac{k_1^2 k_2^2}{k_2^2-k_1^2}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\sin^2 t\left(\frac{1}{\pi^2 k_1^2}\cdot\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2} - \frac{1}{\pi^2 k_2^2}\cdot\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}\right)dt =$$

$$= T_{1,1} + T_{1,2}.$$

$T_{1,1}$ равномерно по k_1 ограничен, так как он от k_2 не зависит.
Для исследования $T_{1,2}$ воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{k_1^2}\cdot\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2}-\frac{1}{k_2^2}\cdot\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}\right)=\pi^{-2}\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2\,k_2^2}\cdot\frac{\pi^2(k_1^2+k_2^2)-t^2}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}=$$
$$=\pi^{-2}\frac{k_2^2-k_1^2}{k_1^2\,k_2^2}\left(\frac{1}{k_1^2\pi^2-t^2}+\frac{1}{k_2^2\pi^2-t^2}+\frac{t^2}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}\right).$$

Таким образом,

$$T_{1,2}=2\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{k_1^2\pi^2-t^2}+2\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{k_2^2\pi^2-t^2}+$$
$$+2\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{t^2\sin^2 t\,dt}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}=T_{1,2,1}+T_{1,2,2}+T_{1,2,3}.$$

Интегралы $T_{1,2,1}$ и $T_{1,2,2}$ равномерно ограничены (см. п. 2.2)

$$T_{1,2,3}=2\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{t^2\sin^2 t\,dt}{(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}=2\pi^{-1}\frac{\xi^2}{(k_1\pi+\xi)(k_2\pi+\xi)}\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{(k_1\pi-t)(k_2\pi-t)},$$

где $\xi\in(0,\ k_1\pi)$.
Множитель перед интегралом ограничен. Действительно,

$$\frac{\xi^2}{(k_1\pi+\xi)(k_2\pi+\xi)}<\frac{(k_1\pi)^2}{k_1\pi\cdot k_2\pi}=\frac{k_1}{k_2}<1.$$

Относительно интеграла имеем

$$\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{(k_1\pi-t)(k_2\pi-t)}<\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{(k_1\pi-t)^2}=\int\limits_0^{k_1\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2}<\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2}.$$

Последний интеграл имеет конечное значение.
Исследуем поведение T_2.

$$T_2=2\pi^3k_1^2k_2^2\int\limits_{k_1\,\pi}^{k_2\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2(t^2-k_1^2\pi^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}=-2\pi^2k_1^2k_2^2\int\limits_{k_1\,\pi}^{k_2\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}.$$

Под интегралом, таким образом, получилось то же выражение, что и в T_1. Следовательно, можно произвести те же преобразования.

Получаем:

$$T_2=-2\pi^{-1}\int\limits_{k_1\,\pi}^{k_2\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2}+2\pi^{-1}\int\limits_{k_1\,\pi}^{k_2\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2-k_1^2\pi^2}-2\pi^{-1}\int\limits_{k_1\,\pi}^{k_2\,\pi}\frac{\sin^2 t\,dt}{k_2^2\pi^2-t^2}+$$
$$+2\pi^{-1}\int\limits_{k_1\,\pi}^{k_2\,\pi}\frac{t^2\ \sin^2 t\,dt}{(t^2-k_1^2\pi^2)(k_2^2\pi^2-t^2)}.$$

Все слагаемые равномерно по k_1, k_2 ограничены.
Таким образом, равномерная ограниченность T_2 доказана.

$$T_3=2\pi^3k_1^2k_2^2\int\limits_{k_2\,\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2(t^2-k_1^2\pi^2)(t^2-k_2^2\pi^2)}<2\pi k_1^2\int\limits_{k_2\,\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 t\,dt}{(t^2-k_1^2\pi^2)(t^2-k_2^2\pi^2)}=$$
$$=2\pi^{-1}\int\limits_{k_2\,\pi}^{\infty}\frac{\pi^2k_1^2}{(t+k_1\pi)(t+k_2\pi)}\cdot\frac{\sin^2 t\,dt}{(t-k_1\pi)(t-k_2\pi)}<2\pi^{-1}\int\limits_{k_2\,\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 t\,dt}{(t-k_1\pi)(t-k_2\pi)}.$$

Последнее неравенство выполняется в силу того, что

$$\frac{\pi^2 k_1^2}{(t+k_1\pi)(t+k_2\pi)} < 1$$

при $t > k_2\pi$.

Далее

$$2\pi^{-1}\int\limits_{k_2\,\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 t\,dt}{(t-k_1\pi)(t-k_2\pi)} = 2\pi^{-1}\int\limits_{k_2\,\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 t\,dt}{(t-k_2\pi)^2} = 2\pi^{-1}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 t\,dt}{t^2}.$$

Теорема доказана.

3. Поведение величины $A_{O,\alpha}$ как функции от α при $\alpha \in [0,\ 1]$

В данном пункте константу из неравенства (4) для сокращения будем обозначать $A_{O,\alpha}$, опуская верхние индексы.

При $\alpha = 0$ константа $A_{O,0}$ обращается в главный член нормы $\left\|M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}\right\|$, то есть $\left\|M_n^{[m](k_1,\ldots,k_m)}\right\| = A_{O,0} + (1)$.

При $\alpha = 1$ константа $A_{O,1}$ становится оценочной константой (см. [7]) в оценке приближения функций класса $Lip_M 1$.

Теорема 2. На отрезке [0, 1] величина $A_{O,\alpha}$ как функция от α возрастает и становится выпуклой вниз.

Доказательство.

Докажем сначала выпуклость вниз.

$$\frac{d^2\,A_{O,\,\alpha}}{d\,\alpha^2} = 2\,\pi^{2m-1}\prod_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^{\infty}\frac{(2t)^{\alpha}(ln\,2t)^2\sin^2 tdt}{t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}. \tag{12}$$

Заметим, при $\alpha \in [0,\ 1]$ интеграл в правой части (12) сходится и, очевидно, $\frac{d^2\,A_{O,\,\alpha}}{d\,\alpha^2} > 0$.

Далее $\frac{d\,A_{O,\,\alpha}}{d\,\alpha}|_{\alpha=0} = \lim\limits_{\alpha\to 0^+} 2\,\pi^{2m-1}\prod\limits_{j=1}^{m}k_j^2\int\limits_0^{\infty}\frac{((2t)^{\alpha}-1)\sin^2 tdt}{\alpha\,t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}$.

Если мы докажем, что $\frac{d\,A_{O,\,\alpha}}{d\,\alpha}|_{\alpha=0} > 0$, то теорема будет доказана.

Будем использовать тот факт, что

$$\lim_{\alpha\to 0^+}\int\limits_0^2\frac{((2t)^{\alpha}-1)\sin^2 tdt}{\alpha\,t^2} \approx 0,111154 > 0. \tag{13}$$

Вычисления выполнены на MathCad.

Так как подынтегральное выражение в (13) отрицательно при $t \in (0,\ \frac{1}{2})$, положительно при $t > \frac{1}{2}$, из (13) получаем

$$\left|\lim_{\alpha\to 0^+}\int\limits_0^{0,5}\frac{((2t)^{\alpha}-1)\sin^2 tdt}{\alpha\,t^2}\right| < \lim_{\alpha\to 0^+}\int\limits_{0,5}^{2}\frac{((2t)^{\alpha}-1)\sin^2 tdt}{\alpha\,t^2}.$$

Заметим, что любое значение функции $\left(\prod\limits_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|\right)^{-1}$ при $t\in(0,\ \frac{1}{2})$ меньше любого значения этой функции при $t\in(\frac{1}{2},\ 2)$. Отсюда получим $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\int\limits_0^2\frac{((2t)^\alpha-1)\sin^2 tdt}{\alpha\, t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}>0$. Тем более, $\lim\limits_{\alpha\to0^+}\int\limits_0^\infty\frac{((2t)^\alpha-1)\sin^2 tdt}{\alpha\, t^2\prod\limits_{j=1}^{m}\left|k_j^2\pi^2-t^2\right|}>0$.

Это значит, что $\frac{d\,A_{O,\,\alpha}}{d\,\alpha}|_{\alpha=0}>0$.

Теорема доказана.

4. Характер зависимости λ_0 от k

В предыдущем пункте мы определили $\lambda_0=\lambda_0(k)$ как величину, удовлетворяющую уравнению (7). В дальнейшем в этом пункте мы используем равенство

$$\int\limits_{\lambda_0}^{\infty}\frac{\sin^2 tdt}{t^2\,(k^2\pi^2-t^2)}=0 \tag{14}$$

Теорема 3 (см., например [8]). Существуют постоянные a_0, b_0, такие, что $0<a_0<b_0<1$ и для $\lambda_0=\lambda_0(k)$, удовлетворяющего (14), выполняется $a_0<\frac{\lambda_0}{k\,\pi}<b_0$.

Доказательство.

Фактически мы докажем более сильное утверждение, чем то, которое имеется в формулировке теоремы. А именно, что существует a^∞, $0<a^\infty<1$, $a^\infty=$ $=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\lambda_0(k)}{k\,\pi}$.

Обозначим $\lambda_0=(1-a_k)k\,\pi$, $F(t)=\frac{\sin^2 t}{t^2(k^2\pi^2-t^2)}$ и запишем (14) в виде $\int\limits_{(1-a_k)k\,\pi}^{\infty}F(t)dt=0$. Или

$$J_1+J_2+J_3=\int\limits_{(1-a_k)k\,\pi}^{k\,\pi}F(t)dt+\int\limits_{k\,\pi}^{(1+a_k)k\,\pi}F(t)dt+\int\limits_{(1+a_k)k\,\pi}^{\infty}F(t)dt=0.$$

Заметим, $J_1>0$, $J_2<0$, $J_3<0$. Преобразуем J_1, J_2, J_3. В J_1 и J_2, последовательно применяя подстановки $t=k\,\pi-u$, $u=k\,\pi t$ в первом случае и $t=k\,\pi+u$, $u=k\,\pi\,t$ во втором, получим

$$J_1=(k\,\pi)^{-3}\int\limits_0^{a_k}\frac{\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{(1-t)^2t(2-t)},\ J_2=-(k\,\pi)^{-3}\int\limits_0^{a_k}\frac{\sin^2 t\,dt}{(1+t)^2t(2+t)}.$$

Складывая, получим $J_1+J_2=2(k\,\pi)^{-3}\int\limits_0^{a_k}\frac{(5+t^2)\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{(1-t^2)^2(4-t^2)}$. В J_3 сделаем подстановку $t=k\,\pi u$ (для единообразия в результирующем выражении вместо u записываем t). Получаем $J_3=(k\,\pi)^{-3}\int\limits_{1+a_k}^{\infty}\frac{\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{t^2(1-t^2)}$.

Приходим к выводу, что a_k должно быть таково, что выполняется равенство

$$2\int\limits_0^{a_k}\frac{(5+t^2)\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{(1-t^2)^2(4-t^2)}=\int\limits_{1+a_k}^{\infty}\frac{\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{t^2(t^2-1)}. \tag{15}$$

Из (14) нетрудно получить, что при любом $k \geqslant 1$ выполняются неравенства $0 < a_k < 1$.

Теорема 3 будет доказана, если мы установим, что существует предел последовательности $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ и что $0 < \lim\limits_{k\to\infty} a_k < 1$. Обозначим a^{∞} число, удовлетворяющее равенству

$$2\int\limits_0^{a^{\infty}} \frac{5+t^2\,dt}{(1-t^2)^2(4-t^2)} = \int\limits_{1+a^{\infty}}^{\infty} \frac{dt}{t^2(t^2-1)}. \tag{16}$$

Непосредственными вычислениями (с использованием компьютерных средств) получаем $a^{\infty} = 0,16644\ldots$. Подставим в (15) a^{∞} вместо a_k и выпишем обе части получающегося уравнения:

$$2\int\limits_0^{a^{\infty}} \frac{(5+t^2)\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{(1-t^2)^2(4-t^2)} = 2\int\limits_0^{a^{\infty}} \frac{5+t^2\,dt}{(1-t^2)^2(4-t^2)} - \int\limits_0^{a^{\infty}} \frac{(5+t^2)\cos 2k\,\pi\,t}{(1-t^2)^2(4-t^2)}dt,$$

$$\int\limits_{1+a^{\infty}}^{\infty} \frac{\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{t^2(t^2-1)} = \frac{1}{2}\int\limits_{1+a^{\infty}}^{\infty} \frac{dt}{t^2(t^2-1)} - \frac{1}{2}\int\limits_{1+a^{\infty}}^{\infty} \frac{\cos 2k\,\pi\,t\,dt}{t^2(t^2-1)}.$$

Имея в виду (16) и то, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^{a^{\infty}} \frac{(5+t^2)\cos 2k\,\pi\,t}{(1-t^2)^2(4-t^2)}dt = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{1+a^{\infty}}^{\infty} \frac{\cos 2k\,\pi\,t\,dt}{t^2(t^2-1)} = 0$, получим

$$\lim_{k\to\infty}\left(2\int\limits_0^{a^{\infty}} \frac{(5+t^2)\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{(1-t^2)^2(4-t^2)} - \int\limits_{1+a^{\infty}}^{\infty} \frac{\sin^2 k\,\pi\,t\,dt}{t^2(t^2-1)}\right) = 0.$$

Отсюда получим $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a^{\infty}$.

Теорема доказана.

5. Равномерная ограниченность $A_{o,\,\alpha}$ при каждом $\alpha \in (0,\ 1)$ и оценка разности $A_{o,\alpha} - A_{y,\alpha}$

Теорема 4. При любом фиксированном $\alpha \in (0,\ 1)$ величина $A^{(k)}_{o,\alpha} = 2^{1+\alpha}k^2\pi \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-2}\sin^2 t\,dt}{|k^2\pi^2-t^2|}$ равномерно по k ограничена.

Доказательство.

Представим $A^{(k)}_{o,\alpha}$ в виде суммы

$$A^{(k)}_{o,\alpha} = 2^{1+\alpha}k^2\pi \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha}\sin^2 t\,dt}{t^2\left(k^2\pi^2-t^2\right)} + 2^{1+\alpha}k^2\pi \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \frac{t^{\alpha}\sin^2 t\,dt}{t^2\left(t^2-k^2\pi^2\right)} = 2^{\alpha}\left(J_1+J_2\right).$$

Преобразуем J_1:

$$J_1 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{k\,\pi} t^{\alpha}\left(\frac{\sin^2 t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{k^2\pi^2-t^2}\right)dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{k\,\pi} \frac{\sin^2 t}{t^{2-\alpha}}dt + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{k\,\pi} \frac{t^{\alpha}\sin^2 t\,dt}{k^2\pi^2-t^2} = J_{1,1}+J_{1,2}.$$

Оценивая первое слагаемое, имеем

$$J_{1,1} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{k\,\pi} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^{2-\alpha}} < \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^{2-\alpha}}.$$

Последний интеграл сходится при любом $\alpha \in (0,\ 1)$.
Для $J_{1,2}$ стандартным образом устанавливается, что $J_{1,2} = o(1)$.
Осталось оценить J_2.

$$J_2 = 2\pi\, k^2 \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \frac{t^\alpha \sin^2 t\, dt}{t^2\,(t^2 - k^2\pi^2)} < \frac{2}{\pi} \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \frac{t^\alpha \sin^2 t\, dt}{t^2 - k^2\pi^2}.$$

Сделаем замену $\tau = t - k\,\pi$, затем вновь обозначим t вместо τ

$$J_2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{(t + k\,\pi)^\alpha \sin^2 t\, dt}{t(t + 2k\,\pi)} < \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t(t + k\,\pi)^{1-\alpha}} < \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^{2-\alpha}}.$$

Последний интеграл сходится, следовательно, $J_2 = O(1)$.
Итак, теорема 4 доказана.

Заметим, что $A^{(k)}_{o,\alpha}$ равномерно ограничено при каждом фиксированном $\alpha \in \in (0, 1)$, но не по всем α в совокупности. Известно (см., например, [7]), что $A^{(k)}_{o,1} = = O(ln\, k)$.

Обозначим $A^{(k)}_{y,\alpha} = 2^{1+\alpha} k^2 \pi \left(\int\limits_0^{\lambda_0} \frac{t^\alpha \sin^2 t\, dt}{t^2(k^2\pi^2 - t^2)} + \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \frac{|t - k\,\pi|^\alpha \sin^2 t\, dt}{t^2 |k^2\pi^2 - t^2|} \right)$,
где λ_0 удовлетворяет равенству (15) (а также равенству (6)).

Теорема 5. Выполняется следующая оценка $A^{(k)}_{o,\alpha} - A^{(k)}_{y,\alpha} = O\left(\frac{ln\, k}{k^{1-\alpha}}\right)$.

Доказательство.

Учитывая (6) и принимая во внимание теоремы 2 и 3, получим

$$2^{1+\alpha} k^2 \pi \int\limits_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^2\,|k^2\pi^2 - t^2|} = O\left(\frac{ln\, k}{k}\right). \tag{17}$$

Оценим разность оценочных и улучшенных констант

$$A^{(k)}_{o,\alpha} - A^{(k)}_{y,\alpha} = 2^{1+\alpha} k^2 \pi \int\limits_{\lambda_0}^{k\,\pi} \left(t^\alpha - |t - k\,\pi|^\alpha\right) \frac{\sin^2 t\, dt}{t^2(k^2\pi^2 - t^2)} +$$
$$+ 2^{1+\alpha} k^2 \pi \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \left(t^\alpha - (t - k\,\pi)^\alpha\right) \frac{\sin^2 t\, dt}{t^2 |k^2\pi^2 - t^2|} = Q_1 + Q_2.$$

Q_1 удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$2^\alpha \left(\lambda_0^\alpha - (k\,\pi - \lambda_0)^2\right) 2k^2\pi \int\limits_{\lambda_0}^{k\,\pi} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^2\,(k^2\pi^2 - t^2)} < Q_1 < 2^\alpha (k\,\pi)^\alpha 2k^2\pi \int\limits_{\lambda_0}^{k\,\pi} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^2\,(k^2\pi^2 - t^2)}.$$

Таким образом, Q_1 имеет точный порядок $O\left(\frac{ln\, k}{k^{1-\alpha}}\right)$.
Для Q_2 выполняется оценка

$$Q_2 < 2^\alpha\,(k\,\pi)^\alpha\, 2k^2\pi \int\limits_{k\,\pi}^{\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^2\,|k^2\pi^2 - t^2|} = O\left(\frac{ln\, k}{k^{1-\alpha}}\right).$$

Теорема доказана.

Литература

[1] Абакумов Ю.Г., Верхотурова М.А. О точной константе в одной аппроксимационной оценке // Моделирование. Системный анализ. Технологии: сб. науч. трудов. Чита: ЗабИЖТ, 2008. С. 51–55.

[2] Абакумов Ю.Г., Карымова Е.Ю., Коган Е.С. Об одной точной константе // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2008. С. 14–17.

[3] Абакумов Ю.Г. Приближение периодических функций тригонометрическими операторами Баскакова. Чита: ЧитГУ, 2006. 158 с.

[4] Абакумов Ю.Г. Тригонометрические операторы Баскокова – уникальный пример совокупности аппроксимирующих последовательностей // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2007. С. 8–13.

[5] Верхотурова М.А. О точной константе $A_H^{[4](1,3,4,5)}$ // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: ТвГУ, 2009. С. 3–6.

[6] Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978. 228 с.

[7] Коган Е.С. Некоторые методы получения точных и экстремальных констант в оценках приближения линейными операторами функций классов $Lip_M \alpha$: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2005. 16 с.

[8] Шерстюк Т.Ю. О приближении операторами Баскакова функций, имеющих конечное число точек разрыва производных: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2011. 16 с.

Поступила в редакцию $22/IX/2012$;
в окончательном варианте — $22/IX/2012$.

ON NORMS AND CERTAIN CHARACTERISTICS OF TRIGONOMETRIC APPROXIMATION BY BASKAKOV OPERATORS

© 2012 O.S. Lyamina[2]

The article covers actual question in the theory of approximations. It researches approximative opportunities of concrete approximating structures. In the article one of the actively studied in recent times types of approximating operators — Baskakov's trigonometric operators. Some characteristics of these operators are being investigated: norms and approximation constants, assessment and improved. In particular, the assessment of their difference is obtained.

Key words: Baskakov's trigonometric operators, approximate estimates.

Paper received 22/*IX*/2012.
Paper accepted 22/*IX*/2012.

[2]Lyamina Olga Sergeevna (lyamina-os@mail.ru), the Dept. of Applied Informatics and Mathematics, Zabaikalsky State University, Chita, 672039, Russian Federation.