УДК 512.7

МОДЕЛЬ НЕРОНА ДВУМЕРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОРОВ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ ПОЛЯМИ[1]

 М.В. Грехов[2]

Для изучения арифметических свойств алгебраических торов необходимо построение их целых моделей. Среди различных возможных целых моделей торов над локальными полями особый интерес представляет обладающая уникальными свойствами модель Нерона, определение которой, однако, является неконструктивным. Поэтому важной задачей является ее построение. В данной работе решается задача построения в явном виде модели Нерона для всех двумерных анизотропных торов над локальными полями.

Ключевые слова: алгебраические торы, модель Воскресенского, модель Нерона.

Пусть k – некоторое основное поле, T – алгебраический тор, определенный над k (k-тор), L – (минимальное) поле разложения T, $G = Gal(L/k)$, $n = [L : k]$, $\hat{T}$ – группа характеров T, $d = rk\,\hat{T} = dim\,T$ (основные сведения об алгебраических торах читатель может найти в книгах [1; 2]). Далее будем рассматривать алгебраические торы, у которых поля k локальные, то есть являются полями частных колец, имеющих единственный простой идеал $\mathfrak{p}$ (подробно о локальных полях рассказывается в [3; 4]). Базовым примером локальных полей являются поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и их конечные расширения.

Изучение арифметических свойств алгебраических торов требует построения их целых моделей, то есть таких $\mathcal{O}_k$-схем X (где $\mathcal{O}_k \subset k$ – кольцо целых элементов k), что $X \otimes_{\mathcal{O}_k} k \cong T$. Среди всех целых моделей можно выделить две классические, обладающие замечательными свойствами: модели Воскресенского и Нерона.

Модель Воскресенского определяется следующим образом. Напомним, что для T координатное кольцо $k[T]$ есть кольцо инвариантов $L[\hat{T}]^G$, где $L[\hat{T}]$ – групповое кольцо $\hat{T}$, а G действует на нем диагональным образом. Рассмотрим известный изоморфизм $L[\hat{T}] \cong L[\hat{T}]^G \otimes L$. Так как k локально, для L над k можно выбрать целый базис $\{\omega_i\}$. Тогда $L[\hat{T}] \cong \oplus L[\hat{T}]^G \omega_i$. В частности, для базисных характеров χ_j группы $\hat{T}$ и обратных им ${\chi_j}^{-1}$ имеют место выражения $\chi_j = \Sigma\, x_{ij}\,\omega_i$, ${\chi_j}^{-1} = \Sigma\, y_{ij}\,\omega_i$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., d$. Тогда $\mathcal{O}_k$-схема $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_k[x_{ij}, y_{ij}]$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., d$ является целой моделью T, причем не зависящей ни от выбора базиса расширения L/k $\{\omega_i\}$, ни от выбора базиса $\hat{T}$ $\{\chi_j\}$. Эта схема и называется

[1]Статья подготовлена в рамках Программы развития деятельности студенческих объединений "Интеграция студентов классического университета в науку, социально-проектную деятельность и гражданское общество — гарантия стабильного развития государства".

[2]Грехов Михаил Владимирович (`m.grekhov@yandex.ru`), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

целой моделью Воскресенского. Подробное изучение модели Воскресенского можно найти в [5; 6].

Основным недостатком модели Воскресенского является то, что она, вообще говоря, может не быть гладкой (для целых моделей гладкость означает, что редукция модели по простому идеалу является приведенной схемой). В отличие от нее модель Нерона, если существует, по определению является гладкой. Она определяется аксиоматически: гладкая целая модель X тора T называется моделью Нерона, если для любой гладкой схемы Y, определенной над $\mathcal{O}_k$, любой k-морфизм $u_k : Y \otimes_{\mathcal{O}_k} k \to X \otimes_{\mathcal{O}_k} k$ единственным образом продолжается до морфизма $u_{\mathcal{O}_k} : Y \to X$. Модели Нерона посвящена монография [7]. В частности, там доказано, что любой алгебраический тор над локальным полем обладает моделью Нерона. Эта модель может не иметь конечный тип над $\mathcal{O}_k$. Критерием того, что модель Нерона имеет конечный тип, является анизотропность T. Напомним, что алгебраический тор называется анизотропным, если он не имеет характеров, определенных над основным полем k, кроме тривиального, то есть $\hat{T}^G = 1$. Поэтому в данной статье сконцентрируем внимание именно на анизотропных торах.

Однако даже в случае конечного типа модель Нерона, в отличие от модели Воскресенского, не является конструктивной, то есть алгоритм ее построения в явном виде не описан. В данной работе мы решаем задачу построения в явном виде модели Нерона с использованием модели Воскресенского. Идея такого метода была предложена в работе [8].

Известно (подробнее см. в [6; 9]), что модель Нерона алгебраического тора совпадает с моделью Воскресенского, если последняя является гладкой, в противном случае может быть получена из нее с помощью процесса сглаживания ([8]). Причем гладкость нарушается только в случае, когда расширение L/k дико разветвлено, то есть $char\, r_k \mid e$, где e – индекс ветвления L над k, $r_k = \mathcal{O}_k/\mathfrak{p}$ – поле вычетов. Таким образом, понятна общая логика построения модели Нерона.

При реализации алгоритма построения можно ограничиться рассмотрением чисто разветвленных расширений, так как при любом ветвлении L над k существует промежуточное поле F, $k \subset F \subset L$ такое, что расширение F/k неразветвленное, а L/F чисто разветвленное (см. [4]), и модель Воскресенского над k (как доказано в [6]) будет однозначно восстанавливаться по модели над F. Поэтому в дальнейшем будем считать, что L/k чисто разветвленное, то есть $e = [L : k]$. Рассмотрение чисто разветвленного расширения L/k также позволяет воспользоваться тем известным фактом, что униформизующий элемент a поля L над k является корнем многочлена Эйзенштейна с коэффициентами из k (подробнее см. в [4]). Напомним, что многочлен $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ называется многочленом Эйзенштейна, если $\nu_p(a_0) = 1$, $\nu_p(a_i) \geqslant 1$, $i = \overline{1, n-1}$, где ν_p – дискретное нормирование в поле k (например, для $\mathbb{Q}_p$ дискретное нормирование совпадает с p-адическим порядком).

В рамках данной работы мы приводим полное решение задачи построения в явном виде модели Нерона для торов T размерности 2. В качестве k будем рассматривать поля p-адических чисел или их конечные расширения. Это означает, что в дальнейшем $char\, r_k = p$.

Вначале необходимо задать интересующие нас торы. Воспользуемся известной классификацией двумерных алгебраических торов (см. [5]). Из определения алгебраического тора следует, что тор однозначно задается следующими данными: расширение L/k и целочисленное представление группы $G = Gal(L/k)$, при этом образ этого представления называют группой разложения тора T. Хорошо известно, что группы разложения для двумерных торов – это подгруппы в группах целочисленных автоморфизмов квадратичных форм $x^2 + y^2$ и $x^2 + xy + y^2$ соответственно. Напомним, что группа целочисленных автоморфизмов квадратичной формы x^2+y^2 – это группа D_4, порождаемая элементами σ_1, τ_1, связанными соотношениями ${\sigma_1}^4 = {\tau_1}^2 = e$ и ${\sigma_1}^3\tau_1 = \tau_1\sigma_1$. Соответственно группа целочисленных автоморфизмов x^2+xy+y^2 – это D_6, порождаемая элементами σ_2, τ_2, связанными соотношениями ${\sigma_2}^6 = {\tau_2}^2 = e$ и ${\sigma_2}^5\tau_2 = \tau_2\sigma_2$. Из соображений объема здесь приводится общий вид групп Галуа описываемых торов, соответствующие группы разложения читатель легко может найти самостоятельно.

Классификация имеет следующий вид:

1) $T = {G_m}^2,\ [L:k] = 1$
$Gal(L/k) = \{e\}$

2) $T = G_m \times R^1_{L/k}(G_m),\ [L:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_1}^2\tau_1\}$

3) $T = R^1_{L/k}(G_m) \times R^1_{L/k}(G_m),\ [L:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_1}^2\}$

4) $T = R_{L/k}(G_m),\ [L:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_1}^3\tau_1\}$

5) $T = R^1_{L/k}(G_m),\ [L:k] = 3$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_2}^2;\, {\sigma_2}^4\}$

6) $T = R_{L_1/k}(R^1_{L/L_1}(G_m)),\ [L:k] = 4$
$k \subset L_1 \subset L,\ [L_1:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_1}^2;\, \sigma_1\tau_1;\, {\sigma_1}^3\tau_1\}$

7) $T = R^1_{L_1/k}(G_m) \times R^1_{L_2/k}(G_m),\ [L:k] = 4$
$k \subset L_1 \subset L,\ k \subset L_2 \subset L,\ L_1 \neq L_2,\ [L_1:k] = 2,\ [L_2:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_1}^2;\, \tau_1;\, {\sigma_1}^2\tau_1\}$

8) $T = R_{L_1/k}(R^1_{L/L_1}(G_m)),\ [L:k] = 4$
$k \subset L_1 \subset L,\ [L_1:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, \sigma_1;\, {\sigma_1}^2;\, {\sigma_1}^3\}$
Отличие от типа торов 6) в том, что здесь группа $Gal(L/k)$ циклическая.

9) $T = R_{L_1/k}(R^1_{L/L_1}(G_m)) \cap R_{L_2/k}(R^1_{L/L_2}(G_m)),\ [L:k] = 6$
$k \subset L_1 \subset L,\ [L_1:k] = 3,\ k \subset L_2 \subset L,\ [L_2:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_2}^2;\, {\sigma_2}^4;\, \sigma_2\tau_2;\, {\sigma_2}^3\tau_2;\, {\sigma_2}^5\tau_2\}$

10) $T = R_{L_1/k}(R^1_{L/L_1}(G_m)) \cap R_{L_2/k}(R^1_{L/L_2}(G_m)),\ [L:k] = 6$
$k \subset L_1 \subset L,\ [L_1:k] = 3,\ k \subset L_2 \subset L,\ [L_2:k] = 2$
$Gal(L/k) = \{e;\, \sigma_2;\, {\sigma_2}^2;\, {\sigma_2}^3;\, {\sigma_2}^4;\, {\sigma_2}^5\}$
Отличие от 9) в том, что группа $Gal(L/k)$ циклическая.

11) $T = R^1_{L_1/k}(G_m),\ [L:k] = 6$
$k \subset L_1 \subset L,\ [L_1:k] = 3$
$Gal(L/k) = \{e;\, {\sigma_2}^2;\, {\sigma_2}^4;\, \tau_2;\, {\sigma_2}^2\tau_2;\, {\sigma_2}^4\tau_2\}$
Отличие от 5) в том, что модель определена над L_1, а поле разложения тора $L,\ [L:L_1] = 2$.

12) $T = R_{L_2/k}(R^1_{L_1/L_2}(G_m)),\ [L:k]=8$
$k \subset L_2 \subset L_1 \subset L,\ [L_2:k]=2,\ [L_1:L_2]=2$
$Gal(L/k)=\{e;\ \sigma_1;\ {\sigma_1}^2;\ {\sigma_1}^3;\ \tau_1;\ \sigma_1\tau_1;\ {\sigma_1}^2\tau_1;\ {\sigma_1}^3\tau_1\}$
Отличие от 6) в том, что модель определена над L_1, а поле разложения тора $L,\ [L:L_1]=2$.

13) $T = R_{L_2/k}(R^1_{L_1/L_2}(G_m)) \cap R_{L_3/k}(R^1_{L_1/L_3}(G_m)),\ [L:k]=12$
$k \subset L_2 \subset L_1 \subset L,\ k \subset L_3 \subset L_1 \subset L,\ [L_2:k]=3,\ [L_1:L_2]=2,\ [L_3:k]=2,$
$[L_1:L_3]=3$
$Gal(L/k)=\{e;\ \sigma_2;\ {\sigma_2}^2;\ {\sigma_2}^3;\ {\sigma_2}^4;\ {\sigma_2}^5;\ \tau_2;\ \sigma_2\tau_2;\ {\sigma_2}^2\tau_2;\ {\sigma_2}^3\tau_2;\ {\sigma_2}^4\tau_2;\ {\sigma_2}^5\tau_2\}$
Отличие от 9) в том, что модель определена над L_1, а поле разложения тора $L,\ [L:L_1]=2$.

Проверка на анизотропность (элементарна, проводится по определению) приводит к выводу о том, что торы типов 1), 2), 4) не анизотропны, торы остальных типов анизотропны. Продолжим исследование оставшихся анизотропных торов.

Первый шаг при построении модели Нерона – построение модели Воскресенского. Необходимо рассмотреть накрытие модуля характеров исследуемого тора T модулем характеров некоторого квазиразложимого тора S подходящей размерности с помощью некоторого морфизма φ (вложение T в S существует, см. [1; 2]). Канонический изоморфизм $\hat{S}/Ker\,\varphi \cong \hat{T}$ и является искомым заданием структуры модуля $\hat{T}$, по которой при известных полях k и L мы восстанавливаем структуру T. Полученное соотношение, в частности, указывает на тип тора (таким образом можно получить приведенную ранее классификацию двумерных торов).

На втором этапе из соотношений, задающих $Ker\ \varphi$, получают уравнения относительно координатных функций, задающие алгебраический тор как аффинное многообразие. Здесь используется упоминавшийся ранее изоморфизм $L[\hat{T}] \cong \oplus L[\hat{T}]^G\omega_i$. С его помощью можно в соотношениях $\Pi\varphi(f_i)^{a_i}=1$ выразить базисные характеры χ_i, через степени которых выражаются $\varphi(f_i)$, в линейную комбинацию элементов $L[\hat{T}]^G$ с коэффициентами из L. А так как известно, что $L[\hat{T}]^G = k[T]$, получаются соотношения относительно некоторых функций в пространстве $\mathbb{A}^d$ и в итоге относительно координатных функций, то есть уравнения геометрического места точек, которые и задают модель Воскресенского T как аффинное многообразие.

После того как модель Воскресенского построена, нужно для случаев, когда она не является гладкой, провести процесс сглаживания. Как уже говорилось выше, гладкость может нарушаться, когда $char\,r_k\,|\,e$, то есть $p\,|\,[L:k]$. Это имеет место в следующих случаях:

$p=2,\ [L:k]\in\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 12\}$;
$p=3,\ [L:k]\in\{3;\ 6;\ 12\}$.

Теперь подробно рассмотрим процесс построения и сглаживания моделей Воскресенского для исследуемых торов (номера типов торов в описании те же, что в классификации):

3) $Ker\,\varphi$:

$$\begin{cases} f_1{f_1}^\sigma = 1, \\ f_2{f_2}^\sigma = 1. \end{cases}$$

Возьмем $L=k(a)$, где $a \notin k$ – корень многочлена $x^2-b,\ b=a^2\in k,\ \nu(b)=1$ (это означает, что b является униформизующим элементом k). Отсюда

$$\begin{cases} f_1 = x_1 + ax_2, \\ f_2 = x_3 + ax_4. \end{cases}$$

Окончательно модель Воскресенского имеет вид:

$$\begin{cases} {x_1}^2 - b{x_2}^2 = 1, \\ {x_3}^2 - b{x_4}^2 = 1. \end{cases}$$

Полученная аффинная схема, если $p = 2$, при редукции имеет нильпотенты $(x_1 + 1)^2 = 0$ и $(x_3 + 1)^2 = 0$.

Сглаживание в данном случае представляет собой следующую замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = b^s y_1 + 1, \\ x_2 = b^t y_2, \\ x_3 = b^s y_3 + 1, \\ x_4 = b^t y_4. \end{cases}$$

Здесь $s, t \in \mathbb{N}$ – параметры. Так как b униформизующий, то 2 кратно b. Пусть b-адический порядок числа 2 равен m, то есть $2 = b^m r_2$, где $b \not| r_2$. После замены, раскрытия скобок и приведения подобных уравнение примет вид

$$\begin{cases} b^{2s}{y_1}^2 + r_2 b^{m+s} y_1 - b^{2t+1}{y_2}^2 = 0, \\ b^{2s}{y_3}^2 + r_2 b^{m+s} y_3 - b^{2t+1}{y_4}^2 = 0. \end{cases}$$

Положим $s = m$, $t = m$. Тогда уравнение можно будет разделить на b^{2m}, получим

$$\begin{cases} {y_1}^2 + r_2 y_1 - b{y_2}^2 = 0, \\ {y_3}^2 + r_2 y_3 - b{y_4}^2 = 0. \end{cases}$$

При редукции этой схемы нильпотенты возникать не будут. Таким образом, получена модель Нерона для данного тора.

5) $Ker\,\varphi$:

$ff^\sigma f^{\sigma^2} = 1$

В качестве L возьмем $k(a)$, где a – корень многочлена Эйзенштейна $t^3 + bt + c$, дискриминант которого является квадратом элемента основного поля (такие многочлены существуют, например, для $p = 3$ это $x^3 - 39x + 78 \in \mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}_p[x]$),

$f = x_1 + ax_2 + a^2x_3$.

Подставив такое выражение в запись относительно характеров, получаем уравнение

${x_1}^3 - 2b{x_1}^2x_3 + bx_1{x_2}^2 + 3cx_1x_2x_3 + b^2x_1{x_3}^2 - c{x_2}^3 - bcx_2{x_3}^2 + c^2{x_3}^3 = 1.$

Это уравнение задает модель Воскресенского исследуемого тора.

Нильпотенты, как уже говорилось, у этого тора могут возникнуть только при $p = 3$. Так как b, c – коэффициенты многочлена Эйзенштейна, то $\nu(b) \geqslant 1$, $\nu(c) = 1$, то есть c – униформизующий элемент k. Отсюда при редукции получаем нильпотент $(x - 1)^3 = 0$. Пусть $\nu(b) = m$, то есть $b = c^m \cdot b_1$, $c \not| b_1$, $\nu(3) = q$, то есть $3 = c^q \cdot r_3$, $c \not| r_3$.

Для сглаживания рассмотрим замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = c^s y_1 + 1, \\ x_2 = c^t y_2, \\ x_3 = c^u y_3. \end{cases}$$

Здесь $s,\ t,\ u \in \mathbb{N}$ – параметры. После такой замены и приведения подобных уравнение примет вид

$$c^{3s}{y_1}^3 + r_3c^{2s+q}{y_1}^2 + r_3c^{s+q}y_1 - 2b_1c^{m+2s+u}{y_1}^2y_3 - 4b_1c^{m+s+u}y_1y_3 - 2b_1c^{m+u}y_3 + b_1c^{m+s+2t}y_1{y_2}^2 + b_1c^{m+2t}{y_2}^2 + r_3c^{q+1+s+t+u}y_1y_2y_3 + r_3c^{q+1+t+u}y_2y_3 + {b_1}^2c^{2m+s+2u}y_1{y_3}^2 + {b_1}^2c^{2m+2u}{y_3}^2 - c^{1+3t}{y_2}^3 - b_1c^{m+1+t+2u}y_2{y_3}^2 + c^{2+3u}{y_3}^3 = 0.$$

Тогда показатели степени c коэффициентов в слагаемых левой части будут следующими (приводятся в том же порядке, что и слагаемые): $3s,\ 2s+q,\ s+q,\ m+2s+u,\ m+s+u,\ m+u,\ m+s+2t,\ m+2t,\ q+1+s+t+u,\ q+1+t+u,\ 2m+s+2u,\ 2m+2u,\ 1+3t,\ m+1+t+2u,\ 2+3u$.

Так как параметрам s, t, u можно придать любые натуральные значения, положим, что они таковы, что $\min(s,t,u) > \max(m,q)$. Такая оценка позволяет сделать вывод, что показатели $s+q$ и $m+u$ соответственно третьего и шестого слагаемых меньше, чем любой из остальных показателей. Можно подобрать значения s и u, при которых $s+q = m+u$. Если $q > m$, положим $s = t = q+1$, $u = q+1+(q-m) = 2q+1-m$ и разделим уравнение на c^{2q+1}. Оно будет иметь вид

$$c^{q+2}{y_1}^3 + r_3c^{q+1}{y_1}^2 + r_3y_1 - 2b_1c^{2q+2}{y_1}^2y_3 - 4b_1c^{q+1}y_1y_3 - 2b_1y_3 + b_1c^{q+2+m}y_1{y_2}^2 + b_1c^{1+m}{y_2}^2 + r_3c^{3q+3-m}y_1y_2y_3 + r_3c^{2q+2-m}y_2y_3 + {b_1}^2c^{3q+2}y_1{y_3}^2 + {b_1}^2c^{2q+1}{y_3}^2 - c^{q+3}{y_2}^3 - b_1c^{3q+3-m}y_2{y_3}^2 + c^{4q+4-3m}{y_3}^3 = 0.$$

Если $q \leqslant m$, положим $t = u = m+1$, $s = m+1+(m-q) = 2m+1-q$ и разделим уравнение на c^{2m+1}:

$$c^{4m+2-3q}{y_1}^3 + r_3c^{2m+1-q}{y_1}^2 + r_3y_1 - 2b_1c^{4m+2-2q}{y_1}^2y_3 - 4b_1c^{2m+1-q}y_1y_3 - 2b_1y_3 + b_1c^{3m+2-q}y_1{y_2}^2 + b_1c^{m+1}{y_2}^2 + r_3c^{2m+3}y_1y_2y_3 + r_3c^{2+q}y_2y_3 + {b_1}^2c^{4m+2-q}y_1{y_3}^2 + {b_1}^2c^{2m+1}{y_3}^2 - c^{m+3}{y_2}^3 - b_1c^{2m+3}y_2{y_3}^2 + c^{m+4}{y_3}^3 = 0.$$

Редукция в обоих случаях будет задаваться уравнением

$$r_3y_1 - \overline{2b_1}y_3 = 0.$$

Как можно видеть, редукция не содержит нильпотентов. Следовательно, модель Нерона построена.

6) Уравнение норменного тора второго порядка уже было построено для тора типа 4). Но в данном случае такое уравнение определено над расширением L/L_1, где в качестве основного поля выступает L_1, и определяется над k с помощью функтора ограничения Вейля $R_{L_1/k}$. Пусть $L = L_1(a)$. Возьмем такое a, чтобы $a^2 \in k$. Обозначим $a^2 = a_1$. Над L_1 уравнение имеет вид ${x_1}^2 - a_1{x_2}^2 = 1$. Пусть теперь $L_1 = k(b)$. Чтобы определить его над k, произведем замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + by_3, \\ x_2 = y_2 + by_4. \end{cases}$$

Подставив выражение для переменных в уравнение, получим

$${y_1}^2 + 2by_1y_3 + b^2{y_3}^2 - a_1{y_2}^2 - 2a_1by_2y_4 - a_1b^2{y_4}^2 = 1.$$

С учетом того, что $y_i \in k$, $i = \overline{1;\,4}$, уравнение можно представить в виде $P_1 + bP_2 = 1$, где $P_1, P_2 \in k$. Так как $b \notin k$, то уравнение можно заменить на систему $P_1 = 1,\ P_2 = 0$. То есть

$$\begin{cases} {y_1}^2 + b^2{y_3}^2 - a_1{y_2}^2 - a_1b^2{y_4}^2 = 1, \\ 2y_1y_3 - 2a_1y_2y_4 = 0. \end{cases}$$

В первом уравнении при $p = 2$ возникает нильпотент, аналогичный тому, что имел место в случае 4), то есть $(y_1 + \overline{b}y_3 + \overline{a}y_2 + \overline{ba}y_4 + 1)^2 = 1$, где выражение, возводимое в квадрат, зависит от того, обращаются ли в 0 при редукции остальные слагаемые в левой части уравнения. Устраняется нильпотент аналогично случаю 4). Обозначим $b^2 = c$. Так как c униформизующий, то a_1 и 2 кратны c. Пусть $a_1 = c^m \cdot r_a,\ c \nmid r_a,\ 2 = c^q \cdot r_2,\ c \nmid r_2$.

Произведем следующую замену переменных:

$$\begin{cases} y_1 = c^s z_1 + 1, \\ y_2 = c^t z_2, \\ y_3 = c^u z_3, \\ y_4 = c^v z_4. \end{cases}$$

Здесь $s, t, u, v \in \mathbb{N}$ – параметры. При этом второе уравнение можно сразу разделить на 2. После раскрытия скобок и приведения подобных получим

$$\begin{cases} c^{2s} {z_1}^2 + r_2 c^{s+q} z_1 + c^{2u} {z_3}^2 - {r_a}^2 c^{2m+2t} {z_2}^2 - {r_a}^2 c^{2m+2v} {z_4}^2 = 0, \\ c^{s+u} z_1 z_3 + c^u z_3 - r_a c^{m+t+v} z_2 z_4 = 0. \end{cases}$$

Если $q \leqslant m+1$, положим $s = q$, $t = v = 1$, $u = m+2$, разделим первое уравнение на $c^2 q$, а второе на c^{m+2}, получим

$$\begin{cases} {z_1}^2 + r_2 z_1 + c^{2m+4-2q} {z_3}^2 - {r_a}^2 c^{2m+2-2q} {z_2}^2 - {r_a}^2 c^{2m+2-2q} {z_4}^2 = 0, \\ c^q z_1 z_3 + z_3 - r_a z_2 z_4 = 0. \end{cases}$$

Если $q > m+1$, положим $s = q$, $t = v = q$, $u = m + 2q$, разделим первое уравнение на $c^2 q$, второе на c^{m+2q}, получим

$$\begin{cases} {z_1}^2 + r_2 z_1 + c^{2m+2q} {z_3}^2 - {r_a}^2 c^{2m} {z_2}^2 - {r_a}^2 c^{2m} {z_4}^2 = 0, \\ c^q z_1 z_3 + z_3 - r_a z_2 z_4 = 0. \end{cases}$$

С учетом всего вышесказанного нильпотенты при редукции в этих уравнениях не возникают, и модель Нерона рассматриваемого тора построена.

7) Тор этого типа представляет собой прямое произведение двух норменных торов второго порядка, заданных над разными промежуточными полями. Пусть $L_1 = k(a)$, $L_2 = k(b)$, тогда $L = k(a, b)$. Как и в случае 4), тор задается системой из двух уравнений, не зависимых друг от друга, но теперь уравнения различны:

$$\begin{cases} {x_1}^2 - a^2 {x_2}^2 = 1, \\ {x_3}^2 - b^2 {x_4}^2 = 1. \end{cases}$$

Нильпотенты возникают при $p = 2$. Обозначим $a^2 = a_1$, $b^2 = b_1$. Аналогично случаю 4) проводим замену

$$\begin{cases} x_1 = {a_1}^s y_1 + 1, \\ x_2 = {a_1}^t y_2, \\ x_3 = {b_1}^u y_3 + 1, \\ x_4 = {b_1}^v y_4. \end{cases}$$

Здесь $s, t, u, v \in \mathbb{N}$ – параметры. Пусть $2 = {a_1}^m \cdot r_1$, $a_1 \nmid r_1$, $2 = {b_1}^q \cdot r_2$, $b_1 \nmid r_2$. Получаем

$$\begin{cases} {a_1}^{2s} {y_1}^2 + r_1 {a_1}^{m+s} y_1 + 1 - {a_1}^{1+2t} {y_2}^2 = 1, \\ {b_1}^{2u} {y_3}^2 + r_2 {b_1}^{q+u} y_3 + 1 - {b_1}^{1+2v} {y_4}^2 = 1. \end{cases}$$

Положим $s = t = m$, $u = v = q$ и разделим первое уравнение на ${a_1}^{2m}$, а второе на ${b_1}^{2q}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} {y_1}^2 + r_1 y_1 - a_1 {y_2}^2 = 0, \\ {y_3}^2 + r_2 y_3 - b_1 {y_4}^2 = 0. \end{cases}$$

Нильпотенты при редукции в этих уравнениях не возникают, модель Нерона данного тора построена.

8) Этот случай отличается от случая 6) только строением группы Галуа и соответственно расширения L/k. Теперь группа Галуа должна быть циклической,

следовательно, $L = k(h)$, где m – корень двучленного многочлена $x^4 - h^4$, $h^4 \in k$. При этом для сохранения нормальности расширения имеет смысл в качестве основного поля взять $k = \mathbb{Q}_p(i)$ или его конечное расширение и рассматривать комплексные h. Из случая 4), если присвоить обозначения $a = h^2$, $b = h$, построение моделей Воскресенского и Нерона без изменений переносится на данный случай.

9) Тор задается как многообразие системой из уже рассматривавшихся ранее норменного уравнения 3-го порядка и норменного уравнения 2-го порядка:

$$\begin{cases} {x_1}^3 - 2b{x_1}^2x_3 + bx_1{x_2}^2 + 3cx_1x_2x_3 + b^2x_1{x_3}^2 - c{x_2}^3 - bcx_2{x_3}^2 + \\ + c^2{x_3}^3 = 1, \\ {y_1}^2 - a^2{y_2}^2 = 1. \end{cases}$$

При таком задании первое уравнение определено над L_2, второе над L_1, и переменные в них не согласованы между собой. Пусть корень многочлена, задающего норменное уравнение 3-го порядка, равен h. Для определения над k используется замена

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + az_4, \\ x_2 = z_2 + az_5, \\ x_3 = z_3 + az_6, \\ y_1 = z_1 + hz_3 + h^2z_4, \\ y_2 = z_2 + hz_5 + h^2z_6. \end{cases}$$

При этом порядок переменных при замене значения не имеет, так как любой порядок приводит к появлению аналогичных объектов. После замены первое уравнение системы можно представить в виде $P_1 + aP_2 = 1$, а второе в виде $P_3 + hP_4 + h^2P_5 = 1$, где $P_i \in k$. Аналогично случаю 6) систему можно заменить системой из уравнений над k, в данном случае из 5 уравнений:

$$\begin{cases} {z_1}^3 + 3a^2z_1{z_4}^2 - 2b{z_1}^2z_3 - 2ba^2z_3{z_4}^2 - 4ba^2z_1z_4z_6 + bz_1{z_2}^2 + \\ + 2ba^2z_2z_4z_5 + ba^2z_1{z_5}^2 + 3cz_1z_2z_3 + 3ca^2z_3z_4z_5 + 3ca^2z_2z_4z_6 + \\ + 3ca^2z_1z_5z_6 + b^2z_1{z_3}^2 + 2b^2a^2z_3z_4z_6 + b^2a^2z_1{z_6}^2 - c{z_2}^3 - 3ca^2z_2{z_5}^2 - \\ - bcz_2{z_3}^2 - 2bca^2z_3z_5z_6 - bca^2z_2{z_6}^2 + c^2{z_3}^3 + 3c^2a^2z_3{z_6}^2 = 1, \\ 3a{z_1}^2z_4 + a^3{z_4}^3 - 4baz_1z_3z_4 - 2ba{z_1}^2z_6 - 2ba^3{z_4}^2z_6 + ba{z_2}^2z_4 + \\ + 2baz_1z_2z_5 + ba^3z_4{z_5}^2 + 3caz_2z_3z_4 + 3caz_1z_3z_5 + 3caz_1z_2z_6 + \\ + 3ca^3z_4z_5z_6 + b^2a{z_3}^2z_4 + 2b^2az_1z_3z_6 + b^2a^3z_4{z_6}^2 - 3ca{z_2}^2z_5 - ca^3{z_5}^3 - \\ - bca{z_3}^2z_5 - 2bcaz_2z_3z_6 - bca^3z_5{z_6}^2 + 3c^2a{z_3}^2z_6 + c^2a^3{z_6}^3 = 0, \\ {z_1}^2 - a^2{z_2}^2 + 2h^3z_3z_4 - 2a^2h^3z_5z_6 = 1, \\ h^3{z_4}^2 + 2z_1z_3 - a^2h^3{z_6}^2 - 2a^2z_2z_5 = 0, \\ {z_3}^2 + 2z_1z_4 - a^2{z_5}^2 - 2a^2z_2z_6 = 0. \end{cases}$$

Это модель Воскресенского данного тора. Нильпотенты могут возникнуть при $p = 2$ или $p = 3$. Рассмотрим сначала случай $p = 3$. Как можно проверить, нильпотенты при редукции возникают только в первых двух уравнениях. Возьмем такое a, чтобы $c \not| a^2$. Воспользуемся заменой, аналогичной случаю 5):

$$\begin{cases} z_1 = c^st_1 + 1, \\ z_i = c^ut_i, i = \overline{2,\ 6}. \end{cases}$$

Здесь $s, u \in \mathbb{N}$ – параметры. Произведя те же действия, что в случае 5), получаем, что нильпотенты не возникают, модель Нерона построена.

Рассмотрим теперь случай $p = 2$. Нильпотенты при редукции возникают только в последних трех уравнениях. Пусть $a^2 = a_1$. Воспользуемся заменой, аналогичной ранее проведенным для норменных уравнений 2-го порядка:

$$\begin{cases} z_1 = {a_1}^s t_1 + 1, \\ z_i = {a_1}^u t_i, \; i = \overline{2,\, 6}. \end{cases}$$

Здесь $s, u \in \mathbb{N}$ – параметры. Произведя те же действия, что в случае 7), получаем, что нильпотенты не возникают, модель Нерона построена.

10) Так же как случай 8) отличается от случая 6), данный случай отличается от случая 9) только строением группы Галуа $Gal(L/k)$ и соответствующего расширения L/k. Если в качестве основного поля взять $k = \mathbb{Q}_p(i)$ или его конечное расширение, $L = k(w)$, где w – корень многочлена $x^6 - w^6$, $a = w^3$, $h = w^2$, результат 9) без изменений переносится на данный случай.

Оставшиеся типы торов 11), 12), 13) представляют собой торы, модель Воскресенского которых определена над меньшим расширением основного поля, чем поле разложения тора. Построение моделей Воскресенского и Нерона этих трех типов торов дословно повторяет построение для торов соответственно типов 5), 6), 9) (отличие в том, что нужно определить расширение L/L_1, но на модель это не влияет).

Литература

[1] Воскресенский В.Е. Алгебраические торы. М.: Наука, 1977. 224 с.

[2] Платонов В.П., Рапинчук А.С. Алгебраические группы и теория чисел. М: Наука, 1991. 656 с.

[3] Serre J.-P. Local Fields. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1979. 241 p.

[4] Алгебраическая теория чисел / под ред. Дж. Касселса и А. Фрелиха. М.: Мир, 1969. 484 с.

[5] Воскресенский В.Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп. М.: МЦНМО, 2009. 403 с.

[6] Popov S.Yu. Standard Integral Models of Algebraic Tori // Preprintreihe des SFB 478 - Geometrische Strukturen in der Mathematik. 2003. 31 p.

[7] Bosch S., Lütkebohmert W., Raynaud M. Néron Models. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1990. 325 p.

[8] Ching-Li Ch., Jiu-Kang Yu. Congruences of Néron models for tori and the Artin conductor. National Center for Theoretical Science, National Tsing-Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1999. 30 p.

[9] Воскресенский В.Е., Кунявский Б.Э., Мороз Б.З. Целые модели алгебраических торов // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14. Вып. 1. С. 35–52.

Поступила в редакцию 3/*XII*/2012;
в окончательном варианте — 6/*XII*/2012.

NÉRON MODEL OF TWO-DIMENSIONAL ANISOTROPIC ALGEBRAIC TORI OVER LOCAL FIELDS

© 2012 M.V. Grekhov[3]

The construction of integral models is necessary for the research on arithmetical properties of algebraic tori. Néron model, having some unique properties, is of special interest among different possible integral models of algebraic tori over local fields. Its definition is not constructive, though. That's why its construction is an important problem. In this paper the problem of explicit construction of Néron model is solved for all two-dimensional anisotropic algebraic tori over local fields.

Key words: algebraic tori, Voskresenskii model, Neron model.

Paper received $3/XII/2012$;
paper accepted — $6/XII/2012$.

[3]Grekhov Mikhail Vladimirovich (`m.grekhov@yandex.ru`), the Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.