МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ДВУОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© 2012 А.А. Абашкин[1]

Для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца в бесконечной полосе $0 < x < a$ поставлена задача со специальными условиями на линии $y = 0$. Данные условия устанавливают разности некоторых односторонних пределов в виде известных функций, кроме того, на правой части границы, а также в бесконечности искомая функция полагается равной нулю, на левой границе задается нулевое условие, но при некоторых значениях параметра μ, входящего в уравнение, это условие с весом.

При одних ограничениях на параметры уравнения установлено существование решения поставленной задачи, при других — единственность.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, задача о скачке, функции Бесселя, ряд Фурье — Бесселя, принцип максимума.

1. Постановка задачи

Для обобщенного двуосесимметрического уравнения Гельмгольца

$$u_{xx} + u_{yy} + \frac{2\mu}{x}u_x + \frac{2p}{y}u_y + \lambda u = 0 \tag{1.1}$$

рассмотрим задачу в полосе $D = \{(x, y) \mid 0 < x \leqslant a,\ -\infty < y < +\infty\}$.

Задача P. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C((0, a] \times ((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)) \cap C^2(D_3 \backslash \{y = 0\}), \tag{1.2}$$

$$H^{\lambda}_{\mu,p}[u(x, y)] = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad \lim_{y\to\pm\infty} u(x, y) = 0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{2\mu-1}u(x, y) = 0, \quad \mu > \frac{1}{2}, \tag{1.4}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{u(x, y)}{\ln x} = 0, \quad \mu = \frac{1}{2}, \tag{1.5}$$

[1]Абашкин Антон Александрович (samcocaa@rambler.ru), кафедра высшей математики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

$$u(0,y)=0, \quad \mu<\frac{1}{2}, \tag{1.6}$$

$$\lim_{y\to 0+}[y^{2p-1}u(x,y)]-\lim_{y\to 0-}[(-y)^{2p-1}u(x,y)]=r(x), \quad p>\frac{1}{2}, \tag{1.7}$$

$$\lim_{y\to 0+}[\frac{u(x,y)}{\ln y}]-\lim_{y\to 0-}[\frac{u(x,y)}{\ln(-y)}]=r(x), \quad p=\frac{1}{2}, \tag{1.8}$$

$$\lim_{y\to 0+}u(x,y)-\lim_{y\to 0-}u(x,y)=r(x), \quad p<\frac{1}{2}, \tag{1.9}$$

$$\lim_{y\to 0+}[y^{2p}u_y(x,y)]-\lim_{y\to 0-}[(-y)^{2p}u_y(x,y)]=q(x), \quad p>-\frac{1}{2}, \tag{1.10}$$

$$\lim_{y\to 0+}[y^{-1}\frac{u_y(x,y)}{\ln y}]-\lim_{y\to 0-}[(-y)^{-1}\frac{u_y(x,y)}{\ln(-y)}]=q(x), \quad p=-\frac{1}{2}, \tag{1.11}$$

$$\lim_{y\to 0+}[y^{-1}u_y(x,y)]-\lim_{y\to 0-}[(-y)^{-1}u_y(x,y)]=q(x), \quad p<-\frac{1}{2}, \tag{1.12}$$

где $r(x)$, $q(x)$ — известные непрерывные функции, заданные на отрезке $[0,a]$, такие, что:

$$r(0)=0, \quad \text{при} \quad \mu<\frac{1}{2}, \quad r(a)=0, \quad q(a)=0.$$

Отметим, что задача, подобная задаче P, но для всего пространства при $p,\mu=0$, $\lambda>0$ была исследована в работе [1], к такой задаче приводится скалярная задача о падении на плоскую границу раздела сред $||$-поляризованных волн. Также отметим, что различные задачи в полуполосе для частных случаев уравнения (1.1) изучались в работах [2–4] и др.

2. Получение формального решения

Будем искать решение задачи P при $\mu\geqslant\frac{1}{2}$ в виде:

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & y>0,\\ u_2(x,y), & y<0,\end{cases} \tag{2.1}$$

тогда функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$H^{\lambda}_{\mu,p}(u_i(x,y))\equiv 0, \quad u_i(a,y)=0, \quad i=1,2, \tag{2.2}$$

$$\lim_{y\to\infty}u_1(x,y)=0, \quad \lim_{y\to-\infty}u_2(x,y)=0, \tag{2.3}$$

$$\lim_{x\to 0+}x^{2\mu-1}u_i(x,y)=0, \quad \mu>\frac{1}{2}, \quad i=1,2, \tag{2.4}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{u_i(x,y)}{\ln y}=0, \quad \mu=\frac{1}{2}, \quad i=1,2, \tag{2.5}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{2p-1}u_1(x,y)=\varphi(x)+r(x), \quad p>\frac{1}{2}, \tag{2.6}$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{u_1(x,y)}{\ln y}=\varphi(x)+r(x), \quad p=\frac{1}{2}, \tag{2.7}$$

$$u_1(x,0+)=\varphi(x)+r(x),\quad p<\frac{1}{2}, \tag{2.8}$$

$$\lim_{y\to 0-}(-y)^{2p-1}u_2(x,y)=\varphi(x),\quad p>\frac{1}{2}, \tag{2.9}$$

$$\lim_{y\to 0-}\frac{u_2(x,y)}{\ln(-y)}=\varphi(x),\quad p=\frac{1}{2}, \tag{2.10}$$

$$u_2(x,0-)=\varphi(x),\quad p<\frac{1}{2}, \tag{2.11}$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

Пусть $\lambda<\left(\frac{r_1}{a}\right)^2$, где r_1 — наименьший положительный корень уравнения $J_{\mu_1}(z)=0$, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода [5, с. 132], $\mu_1=\mu-\frac{1}{2}$, тогда методом разделения переменных получаем

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n x^{-\mu_1}y^{-p_1}J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)K_{p_1}(\xi_n y), \tag{2.12}$$

здесь $K_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя [5, с. 139], $p_1=p-\frac{1}{2}$, r_n — положительные нули функции $J_{\mu_1}(z)$, пронумерованные в порядке возрастания, $\xi_n=\sqrt{\left(\frac{r_n}{a}\right)^2-\lambda}$, а коэффициенты B_n определяются равенствами

$$B_n=(c_n^\varphi+c_n^r)\frac{\xi_n^{|p_1|}}{\Gamma(|p_1|)2^{|p_1|-1}},\quad p\neq\frac{1}{2}, \tag{2.13}$$

$$B_n=-(c_n^\varphi+c_n^r),\quad p=\frac{1}{2}, \tag{2.14}$$

где c_n^φ, c_n^r — коэффициенты разложения в ряд Фурье — Бесселя со значком μ_1 [5, с. 164] функций $x^{\mu_1}\varphi(x)$ и $x^{\mu_1}r(x)$ соответственно.

Если функция $u(x,y)$ является решением уравнения (1.1), то функция $u(x,-y)$ также является решением данного уравнения. Поэтому функцию $u_2(x,y)$ можем записать в виде

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}B_n x^{-\mu_1}(-y)^{-p_1}K_{p_1}(-\xi_n y)J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x),\quad y<0, \tag{2.15}$$

где

$$B_n=c_n^\varphi\frac{\xi_n^{|p_1|}}{\Gamma(|p_1|)2^{|p_1|-1}},\quad p\neq\frac{1}{2}, \tag{2.16}$$

$$B_n=-c_n^\varphi,\quad p=\frac{1}{2}. \tag{2.17}$$

Подставим функцию $u(x,y)$, определяемую формулой (2.1), в которой функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ задаются равенствами (2.12) и (2.15) соответственно, в условие (1.10), при $p>\frac{1}{2}$ получим

$$\sum_{n=1}^{+\infty}2(2c_n^\varphi+c_n^r)(p_1+1)J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)=x^{\mu_1}q(x).$$

Разложив правую часть последнего равенства в ряд Фурье — Бесселя и приравняв коэффициенты с одинаковым индексом и выразив c_n^φ, будем иметь

$$c_n^\varphi = -\frac{c_n^r}{2} - \frac{c_n^q}{4(p_1+1)}, \quad p > \frac{1}{2}. \tag{2.18}$$

Аналогичным образом находим значения коэффициентов c_n^φ при других значениях параметра p

$$c_n^\varphi = \frac{c_n^r + c_n^q}{2}, \quad p = \frac{1}{2}, \tag{2.19}$$

$$c_n^\varphi = -\frac{\Gamma(-p_1)\xi_n^{2p_1}}{\Gamma(p_1+1)2^{2p_1+2}} c_n^q - \frac{c_n^r}{2}, \quad -\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}, \tag{2.20}$$

$$c_n^\varphi = -\frac{p_1}{\xi_n^2} c_n^q - \frac{c_n^r}{2}, \quad p \leqslant -\frac{1}{2}. \tag{2.21}$$

Для оператора $H_{\mu,p}^\lambda$ справедливы принципы соответствия [6, с. 163]

$$H_{\mu,p}^\lambda(x^{1-2\mu}u(x,y)) = H_{1-\mu,p}^\lambda(u(x,y)), \quad H_{\mu,p}^\lambda(y^{1-2p}u(x,y)) = H_{\mu,1-p}^\lambda(u(x,y)). \tag{2.22}$$

Из первого принципа следует, что для того чтобы получить формулы для решения задачи P при $\mu < \frac{1}{2}$, необходимо в формулах (2.12)–(2.17) заменить μ_1 на $-\mu_1$ и домножить на $x^{-2\mu_1}$ правые части формул (2.12) и (2.15).

В общем случае функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ можно записать в виде

$$u_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n x^{-\mu_1} y^{-p_1} J_{|\mu_1|}(\frac{r_n}{a}x) K_{p_1}(\xi_n y), \tag{2.23}$$

где коэффициенты B_n определяются по формулам (2.13) и (2.14), r_n — нули функции $J_{|\mu_1|}(z)$,

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n x^{-\mu_1} (-y)^{-p_1} K_{p_1}(-\xi_n y) J_{|\mu_1|}(\frac{r_n}{a}x), \tag{2.24}$$

где коэффициенты B_n задаются равенствами (2.16) и (2.17).

3. Существование решения задачи

Теорема 1. Пусть $\lambda < \left(\frac{r_1}{\lambda}\right)^2$, функции $r(x)$ и $q(x)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[0,a]$ и для них верны соотношения: $r(x) = o(x^{-\mu_1-1+\delta})$, $q(x) = o(x^{-\mu_1-1+\delta})$ при $x \to 0+$ для некоторого числа $\delta > 0$, тогда решение задачи P существует и выражается с помощью формул (2.13), (2.14), (2.16)–(2.21), (2.23), (2.24).

Доказательство.

Достаточно доказать следующее:

1) что существует функция $\varphi(x)$ такая, что числа c_n^φ, выражаемые формулами (2.18)–(2.21), являются коэффициентами ее разложения в ряд Фурье — Бесселя, и сумма ряда совпадает с $\varphi(x)$;

2) что правомерно использовать вместо функций $q(x)$ и $r(x)$ их разложения Фурье — Бесселя;

3) равномерную сходимость рядов (2.12), (2.15) и рядов, получающихся от них одно- и двукратным почленным дифференцированием по x и по y.

1. Докажем, что ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} c_n^{\varphi} J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)$ с коэффициентами c_n^{φ}, определяемыми формулами (2.18)–(2.21), сходится и является рядом Фурье — Бесселя для своей суммы.

В случаях формул (2.18) и (2.19) это так, потому что ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} c_n^{\varphi} J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)$ — линейная комбинация равномерно сходящихся рядов.

Ряд $\sum\limits_{n}^{\infty} c_n^{\varphi} J_{\mu_1}(\frac{r_n}{a}x)$ с коэффициентами, определяемыми формулами (2.20) и (2.21), сходится равномерно как сумма двух рядов, один из которых сходится равномерно, а членами второго являются произведения членов равномерно сходящегося ряда и убывающей последовательности.

2. Для равномерной сходимости ряда Фурье — Бесселя достаточно непрерывности и конечной вариации функций $x^{\mu_1} r(x)$ и $x^{\mu_1} q(x)$ на интервале $(0, a)$, а также конечности интегралов $\int\limits_0^a |x^{\mu} r(x)| dx$ и $\int\limits_0^a |x^{\mu} q(x)| dx$ [5,с.136-137]. Все эти условия в данном случае выполнены.

3. Достаточно доказать равномерную сходимость ряда (2.23) с коэффициентами (2.13), (2.14) на множестве

$$D_{\varepsilon}^{+} = \{(x, y) \mid \varepsilon_1 \leqslant x \leqslant a,\ \varepsilon_2 \leqslant y < +\infty\},$$

где ε_1, ε_2 — произвольно малые положительные постоянные, и ряда (2.24) с коэффициентами (2.16), (2.17) на множестве

$$D_{\varepsilon}^{-} = \{(x, y) \mid \varepsilon_1 \leqslant x \leqslant a,\ -\infty < y \leqslant -\varepsilon_2\},$$

а также рядов, полученных из них почленным однократным и двукратным дифференцированием по x и по y.

Доказываемые утверждения являются следствием экспоненциального убывания на бесконечноси функции $K_{\nu}(z)$ [5, с. 173].

4. Единственность решения задачи

Вначале докажем единственность двух вспомогательных задач.

Задача D. В полуполосе $D^{+} = \{(x, y) \mid 0 < x < a,\ y > 0\}$ нужно найти функцию $u_1(x, y)$, удовлетворяющую условиям (2.2), (2.4), (2.5), первому равенству условия (2.3), а также

$$u_1(0, y) = 0, \quad \mu < \frac{1}{2}, \tag{4.1}$$

$$\lim_{y \to 0+} y^{2p-1} u_1(x, y) = a(x), \quad p > \frac{1}{2}, \tag{4.2}$$

$$\lim_{y \to 0+} \frac{u_1(x, y)}{\ln y} = a(x), \quad p = \frac{1}{2}, \tag{4.3}$$

$$u_1(x, 0) = a(x), \quad p < \frac{1}{2}, \tag{4.4}$$

где $a(x)$ известная функция достаточной степени гладкости.

Лемма 1. При $\lambda < 0$, если существует решение задачи D, то оно единственно.

Доказательство. Представим решение задачи D в виде

$$u_1(x,y) = A(x,y)B(x,y). \tag{4.5}$$

Подставив функцию $u_1(x,y)$ в виде (4.5) в уравнение (1.1), получим:

$$L^{\lambda}_{\mu,p}(A(x,y)) = A_{xx} + A_{yy} + \left(\frac{2\mu}{x} + \frac{2B_x}{B}\right)A_x +$$
$$+\left(\frac{2p}{y} + \frac{2B_y}{B}\right)A_y + \frac{H^{\lambda}_{\mu,p}(B)}{B}A = 0. \tag{4.6}$$

При $\lambda < 0$ обозначим $\lambda = -k^2$.

Следуя методу, изложенному в работе [5], найдем функцию $B(x,y)$ такую, что $B(x,y) = O(y^{1-2p})$, $p > \frac{1}{2}$, $B(x,y) = O(\ln y)$, $p = \frac{1}{2}$ при $y \to 0$, $B(x,y) = O(x^{1-2\mu}$, $\mu > \frac{1}{2}$, $B(x,y) = O(\ln x)$, $\mu = \frac{1}{2}$ при $x \to 0$, $B(x,y) > 0$ и $H^{\lambda}_{\mu,p}(B(x,y)) < 0$ в D_1.

Поставленным условиям будет удовлетворять функция

$$B(x,y) = x^{-p_1}y^{-\mu_1}[K_{\mu_1}(\sigma x) + I_{\mu_1}(\sigma x)]\times$$
$$\times[K_{p_1}(\sqrt{k^2-\sigma^2}y) + I_{p_1}(\sqrt{k^2-\sigma^2}y)] + C, \tag{4.7}$$

где $0 < \sigma < k$, $C > 0$.

Подставим функцию $u(x,y)$ в виде (4.5), где функция $B(x,y)$ определяется равенством (4.7), в краевые условия задачи D, получим

$$L^{\lambda}_{\mu,p}(A(x,y)) \equiv 0, \quad A(a,y) = 0, \quad A(x,0) = 0, \tag{4.8}$$

$$A(0,y) = \psi_1(y) = \frac{2^{1-\mu_1}\sigma^{\mu_1}y^{p_1}}{\Gamma(\mu_1)[K_{p_1}(\sqrt{k^2-\sigma^2}y) + I_{p_1}(\sqrt{k^2-\sigma^2}y)]}\psi(y), \quad \mu > \frac{1}{2}, \tag{4.9}$$

$$A(0,y) = \psi_1(y) = -\frac{y^{p_1}}{K_{p_1}(\sqrt{k^2-\sigma^2}y) + I_{p_1}(\sqrt{k^2-\sigma^2}y)}\psi(y), \quad \mu = \frac{1}{2}, \tag{4.10}$$

$$A(x,0) = \varphi_1(x) = \frac{\sqrt{k^2-\sigma^2}^{\,p_1}x^{\mu_1}}{2^{p_1-1}\Gamma(p_1)[K_{\mu_1}(\sigma x) + I_{\mu_1}(\sigma x)]}\varphi(x), \quad p > \frac{1}{2}, \tag{4.11}$$

$$A(x,0) = \varphi_1(x) = -x^{\mu_1}[K_{\mu_1}(\sigma x) + I_{\mu_1}(\sigma x)]^{-1}\varphi(x), \quad p = \frac{1}{2}, \tag{4.12}$$

Таким образом, если $u_1(x,y)$ — решение задачи D при $p,\mu \geqslant \frac{1}{2}$, то $A(x,y)$ удовлетворяет условиям (4.8)–(4.12), то есть является решением задачи Дирихле и наоборот. Из принципа максимума для эллиптических уравнений следует, что задача с условиями (4.8)–(4.12) имеет единственное решение, а значит, функция $u_1(x,y)$ тоже находится единственным образом.

Утверждение леммы при других значениях параметра p и μ является следствием принципов соответствия (2.22).

Задача N. Найти функцию $u_1(x,y)$, которая в области D^+ удовлетворяет условиям (2.2), (2.4), (2.5), (4.1), первому равенству условия (2.3), а также следующим условиям:

$$\lim_{y\to 0+} y^{2p}\frac{\partial u_1}{\partial y} = b(x), \quad p > -\frac{1}{2}, \tag{4.13}$$

$$\lim_{y\to 0+}(y\ln y)^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y}=b(x),\quad p=-\frac{1}{2}, \tag{4.14}$$

$$\lim_{y\to 0+}y^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y}=b(x),\quad p<-\frac{1}{2}, \tag{4.15}$$

где $b(x)$ — известная функция достаточной степени гладкости.

Лемма 2. При $\lambda<0$, если существует решение задачи N, то оно единственно.

Как и ранее, обозначим $\lambda=-k^2$.

Пусть $u_1(x,y)$ решение задачи N с однородными краевыми условиями. Определим функцию

$$B(x,y)=x^{-\mu_1}y^{-p_1}K_{\mu_1}(\gamma x)K_{p_1}(\sqrt{k^2-\gamma}y)+C,$$

где γ и C — произвольные числа, удовлетворяющие условиям $0<\gamma<k,\ C>0$.

Вследствие асимптотического поведения функции $K_\nu(z)$ при $y\to 0$ [5, с. 173], однородные условия (4.13)–(4.15) эквивалентны условию

$$\lim_{y\to 0+}(-B_y(x,y))^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y}=0, \tag{4.16}$$

а условия (2.4), (2.5) и (4.1) эквивалентны

$$\lim_{y\to 0+}\frac{u_1(x,y)}{B(x,y)}=0. \tag{4.17}$$

Из условий (4.16) и (4.17) следует, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\eta>0$ такое, что

$$|\frac{\partial u_1}{\partial y}(x,y)|<-\varepsilon B_y(x,y), \tag{4.18}$$

$$|u_1(x,y)|<\varepsilon B(x,y),$$

для всех $0<y\leqslant\eta$.

Рассмотрим функции $W(x,y)=\varepsilon B(x,y)\pm u_1(x,y)$. Для них верно соотношение $H^\lambda_{\mu,p}$<0, откуда следует, что функция $W(x,y)$ не может иметь отрицательного минимума во внутренней точке.

Для области $D_\eta=(\eta,a)\times(\eta,\infty)$, на левой и правой границе области, а также в бесконечности $W(x,y)>0$. Если наименьшее значение функции $W(x,y)$ отрицательно, то $W(x,y)$ принимает это значение на линии $y=\eta$, но этого не может быть в силу свойства (4.18). Получаем, что $W(x,y)>0$ везде в D_η, в силу того что η может быть сделано сколь угодно малой, то это свойство выполнено для всего D^+. Из произвольности ε следует, что $u_1(x,y)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. При $\lambda<0$ решение задачи P единственно.

Доказательство.

Допустим, что $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ представляют два различных решения задачи P, рассмотрим их разность $u_3(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$, тогда функция $u_3(x,y)$ тоже будет решением задачи P, в которой $r(x)\equiv q(x)\equiv 0$. Обозначим $\overline{u_3}(x,y)=$ $=u_3(x,-y)$. Эта функция также будет решением уравнения (1.1). Тогда разность $u_4(x,y)=u_3(x,y)-\overline{u_3}(x,y)$ удовлетворяет задаче D с однородными условиями. По лемме 1 $u_4(x,y)\equiv 0$.

Мы получили, что $u_3(x,y) = \overline{u_3}(x,y)$, но в таком случае

$$\lim_{y\to 0+}[y^{2p}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}] = -\lim_{y\to 0-}[(-y)^{2p}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}], \quad p > -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to 0+}[\frac{y^{-1}}{\ln y}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}] = -\lim_{y\to 0-}[\frac{(-y)^{-1}}{\ln(-y)}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}], \quad p = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to 0+}[y^{-1}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}] = -\lim_{y\to 0-}[(-y)^{-1}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}], \quad p < -\frac{1}{2},$$

а значит

$$\lim_{y\to 0+}[y^{2p}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}] = 0, \quad p > -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0+}[\frac{y^{-1}}{\ln y}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}] = 0, \quad p = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{y\to 0+}[y^{-1}\frac{\partial u_3(x,y)}{\partial y}] = 0, \quad p < -\frac{1}{2}.$$

В этом случае $u_3(x,y)$ — решение задачи N с однородными условиями. По лемме 2 $u_3(x,y) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. При $\mu \geqslant \frac{1}{2}$ решение задачи P будет ограничено в окрестности прямой $x = 0$. Поэтому, если заменить условия (2.4), (2.5) на условие ограниченности решения вблизи оси OY, то такая задача будет однозначно разрешима, единственность решения следует из теоремы 2 и того, что условие ограниченности более жесткое, чем условия (2.4), (2.5).

Литература

[1] Плещинский Н.Б. Уравнение Гельмгольца в полуплоскости и скалярные задачи дифракции электромагнитных волн на плоских металлических экранах. Казань: Изд-во КГУ, 2003. 30 с.

[2] Шимкович Е.В. О весовых краевых задачах для вырождающегося уравнения эллиптического типа в полуполосе // Литовский математический сборник. 1990. № 30. С. 185–196

[3] Лернер М.Е., Репин О.А. Нелокальные краевые задачи в вертикальной полуполосе для обобщенного осесимметрического уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. С. 1562–1564.

[4] Моисеев Е.И. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. С. 1565–1567

[5] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. СПб.: Лань, 2010. 368 с.

[6] Маричев О.И., Килбас А.А., Репин О.А. Краевые задачи для уравнений в частных производных с разрывными коэффициентами. Самара: Изд-во СГЭУ, 2008. 275 с.

Поступила в редакцию $22/V/2012$;
в окончательном варианте — $22/V/2012$.

ON ONE PROBLEM IN INFINITY STRIP FOR BIAXISYMMETRIC HELMHOLZ EQUATION

© 2012 A.A. Abashkin[2]

Boundary value problem with special conditions on line $y = 0$ in infinity strip 0<x<a for generalized biaxisymmetric Helmholz equation is set. Conditions of this problem set difference of some one-sided limits of known functions. Unknown function is zero in the right boundary and in infinity. Unknown functions with weight for one parameter μ value and without weight for other. Existence of solution is proved for some conditions. Uniqueness of solutions is proved for other some conditions.

Key words: Helmholz equation, problem about leap, Bessel function, Fourie — Bessel series, maximal principle.

Paper received 22/ V /2012.
Paper accepted 22/ V /2012.

[2]Abashkin Anton Alexandrovich (samcocaa@rambler.ru), the Dept. of Higher Mathematics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.