

ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТОЙ КРУГЛОЙ ЖЕСТКО ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

© 2012 Д.А. Шляхин¹

Построено новое замкнутое решение осесимметричной нестационарной задачи теории электроупругости жестко закрепленной сплошной круглой пьезокерамической пластины. Расчетные соотношения получены методом разложения по собственным вектор-функциям в форме структурного алгоритма конечных преобразований. Численные результаты позволяют проанализировать влияние толщины пластины на частотный спектр собственных колебаний, определить напряженно-деформированное состояние исследуемого элемента, а также потенциал и напряженность индуцируемого электрического поля.

Ключевые слова: вынужденные осесимметричные колебания, толстая пьезокерамическая пластина, задача электроупругости.

Введение

Широкое использование в современном приборостроении в качестве основных рабочих элементов толстых круглых пьезокерамических пластин предъявляет дополнительные требования к точности их расчета. Задача существенно усложняется при исследовании напряженно-деформированного состояния конструкций в случае динамического воздействия, а также при учете связанности механических и электрических полей напряжений. В связи с этим можно отметить достаточно ограниченный круг работ, выполненных для тел конечных размеров в рамках трехмерной теории электроупругости. Причем большинство этих исследований посвящено определению собственных колебаний [1–4]. Результаты, справедливые для пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра конечной длины, для установившегося режима вынужденных колебаний получены в [2]. Использование базисных функций позволило понизить размерность и свести задачу к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая в дальнейшем решается численным методом.

В исследованиях [5; 6] методом конечных интегральных преобразований построены замкнутые решения нестационарных осесимметричных задач для короткого анизотропного пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией материала при смешанных краевых условиях на его торцах. Существенным пред-

¹Шляхин Дмитрий Аверкиевич (d-612-mit2009@yandex.ru), кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Российская Федерация, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

ставляется то, что построенные алгоритмы справедливы для произвольного динамического воздействия.

В настоящей работе исследуется нестационарная осесимметричная задача теории электроупругости для круглой толстой пластины с аксиальной поляризацией материала и жестким закреплением ее цилиндрической поверхности. В отличие от традиционно используемых краевых условий в заделке, записываемых в перемещениях, рассматриваются смешанные краевые условия, что позволяет получить достаточно простые расчетные соотношения.

1. Постановка задачи

Пусть круглая сплошная пьезокерамическая пластина, занимающая в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область $\Omega: \{0 \leq r_* \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z_* \leq h\}$, представляет линейно-упругое анизотропное тело. Рассматривается случай, когда цилиндрические неэлектродированные ($r_* = b$) поверхности элемента жестко закреплены, а на его торцевую плоскость ($z_* = h$) действует осесимметричная динамическая нагрузка (нормальные напряжения) $q^*(r_*, t)$.

Краевая задача моделирует работу пьезоэлементов в приборах прямого пьезоэффекта, когда механическое воздействие трансформируется в электрический сигнал, который фиксируется путем подключения эквипотенциальных электродированных торцевых плоскостей к измерительному прибору.

В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения и электростатики однородной упругой анизотропной среды в цилиндрической системе координат записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 U^*}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r_*} + \frac{D_r}{r_*} + \frac{\partial D_z}{\partial z_*} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения состояния анизотропного пьезокерамического тела с аксиальной поляризацией материала определяются следующими равенствами [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{12} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{31} E_z, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{31} E_z, \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + C_{33} \frac{\partial W^*}{\partial z_*} - e_{33} E_z, \quad \sigma_{rz} = C_{55} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right) - e_{15} E_r, \\ D_z &= \varepsilon_{33} E_z + e_{31} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + e_{33} \frac{\partial W^*}{\partial z_*}, \\ D_r &= \varepsilon_{11} E_r + e_{15} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right), \quad E_z = -\frac{\partial \phi^*}{\partial z_*}, \quad E_r = -\frac{\partial \phi^*}{\partial r_*}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В соотношениях (1.1), (1.2) t — время; $\sigma_{j,k}(r_*, z_*, t)$, $U^*(r_*, z_*, t)$, $W^*(r_*, z_*, t)$ — соответственно компоненты тензора механических напряжений и вектора перемещений ($j, k = r, \theta, z$); $D_r(r_*, z_*, t)$, $D_z(r_*, z_*, t)$,

$E_r(r_*, z_*, t), E_z(r_*, z_*, t), \phi^*(r_*, z_*, t)$ — компоненты векторов индукции, напряженности и потенциал электрического поля; ρ, C_{ms}, e_{ms} — объемная плотность, модули упругости, а также пьезомодули анизотропного электроупругого материала ($m, s = \overline{1, 5}$); $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ — диэлектрические проницаемости материала.

В результате подстановки (1.2) в (1.1) получаем систему дифференциальных уравнений и граничные условия рассматриваемой задачи теории электроупругости для установившегося режима вынужденных колебаний в безразмерной форме:

$$\nabla_1^2 U + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial z} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \lambda^2 U = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 W + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \nabla \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \lambda^2 W = 0,$$

$$\frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 W + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \nabla \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 \phi - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\text{при } r = 0, 1 \quad W(0, z) < \infty, \quad U(0, z) < \infty, \quad \phi(0, z) < \infty, \quad (1.4)$$

$$D_{r|r=1} = -\frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{e_{15}}{e_{33}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0,$$

$$U(1, z) = 0, \quad W(1, z) = 0;$$

$$\text{при } z = 0, L \quad \sigma_{zz|z=L} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = q(r), \quad (1.5)$$

$$\sigma_{zz|z=0} = \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla U + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_{rz} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0.$$

В равенствах (1.3)–(1.5) общий для всех функций временной множитель $\exp(-i\theta t)$ опускается, θ — частота вынужденных колебаний, $\lambda^2 = \frac{\theta^2 b^2 \rho}{C_{11}}$, $\{U, W, r, z, L\} = \{U^*, W^*, r_*, z_*, h\}/b$, $\phi = \phi^* e_{33}/(bC_{11})$, $q(r) = \frac{q^*(r)}{C_{11}}$, $\nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$, $\nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$.

Соотношения (1.3)–(1.5) представляют математическую формулировку рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

2. Построение общего решения

Решение осуществляется методом конечных интегральных преобразований Ханкеля по координате r . Для этого равенства (1.3)–(1.5) приводятся к стандартной форме, позволяющей провести данную процедуру разделения переменных. Принимая во внимание линейность данных соотношений и теорему о суперпозиции решений, функции U, W, ϕ представляются в виде следующих разложений:

$$U(r, z) = f_1(r) q(r) + u(r, z), \quad W(r, z) = f_2(r) K(z) + w(r, z), \quad (2.1)$$

$$\phi(r, z) = f_3(r) K(z) + \chi(r, z).$$

Кроме того, последнее условие (1.4) заменяется на равенство

$$\sigma_{rz|r=1} = \frac{C_{55}}{C_{11}} \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \frac{\partial \phi}{\partial r} = K(z). \quad (2.2)$$

Здесь $K(z) = K^*(z)/C_{11}$, $K^*(z)$ – касательные напряжения, приложенные к цилиндрической поверхности пластины и определяемые в процессе решения задачи из условия отсутствия вертикальных перемещений при $r = 1$.

При этом функция $K(z)$ должна удовлетворять зависимости

$$\int_0^L K(z) dz = - \int_0^1 q(r) r dr, \quad (2.3)$$

которая является условием уравновешенности пластины при действии осесимметричной нагрузки.

В результате подстановки (2.1) в (1.3)–(1.5), (2.2), при учете соотношений

$$\begin{aligned} f_1(1) = f_1(0) = 0, \quad \frac{df_2(r)}{dr} \Big|_{r=0} = \frac{df_3(r)}{dr} \Big|_{r=0} = 0, \quad (2.4) \\ \frac{df_2(r)}{dr} \Big|_{r=1} = \frac{C_{11}\varepsilon_{11}}{C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2}, \quad \frac{df_3(r)}{dr} \Big|_{r=1} = \frac{e_{15}e_{33}}{C_{55}\varepsilon_{11} + e_{15}^2}, \end{aligned}$$

получаем новую краевую задачу относительно функций $u(r, z)$, $w(r, z)$, $\chi(r, z)$. Дифференциальные уравнения (1.3) и граничные условия (1.5) становятся неоднородными с правыми частями $F_1 \div F_3$, $N_1 \div N_6$, а (1.4), с учетом (2.2), при $r = 1$ принимают вид

$$u(1, z) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (2.5)$$

В преобразованных равенствах

$$\begin{aligned} F_1 &= -(\nabla_1^2 + \lambda^2) [f_1(r) q(r)] - \left[\frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} \frac{df_2(r)}{dr} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} \frac{df_3(r)}{dr} \right] \frac{dK(z)}{dz}, \\ F_2 &= - \left[\frac{C_{55}}{C_{11}} \nabla_2^2 f_2(r) + \frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 f_3(r) + \lambda^2 f_2(r) \right] K(z) - \left[\frac{C_{33}}{C_{11}} f_2(r) + f_3(r) \right] \frac{d^2 K(z)}{dz^2}, \\ F_3 &= - \left[\frac{e_{15}}{e_{33}} \nabla_2^2 f_2(r) - \frac{C_{11}\varepsilon_{11}}{e_{33}^2} \nabla_2^2 f_3(r) \right] K(z) - \left[f_2(r) - \frac{C_{11}\varepsilon_{33}}{e_{33}^2} f_3(r) \right] \frac{d^2 K(z)}{dz^2}, \\ N_1(r, L) &= q(r) - \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla [f_1(r) q(r)] - \left[\frac{C_{33}}{C_{11}} f_2(r) + f_3(r) \right] \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=L}, \\ N_2(r, 0) &= - \frac{C_{13}}{C_{11}} \nabla [f_1(r) q(r)] - \left[\frac{C_{33}}{C_{11}} f_2(r) + f_3(r) \right] \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=0}, \\ \{N_3(r, L), N_4(r, 0)\} &= - \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{df_2(r)}{dr} \{K(L), K(0)\}, \\ \{N_5(r, L), N_6(r, 0)\} &= - \frac{df_3(r)}{dr} \{K(L), K(0)\}. \end{aligned}$$

К краевой задаче относительно $u(r, z)$, $w(r, z)$, $\chi(r, z)$ применяем преобразование Ханкеля с конечными пределами по переменной r , используя следующие трансформанты

$$u_H(j_n, z) = \int_0^1 u(r, z) r J_1(j_n r) dr, \quad (2.6)$$

$$\{w_H(j_n, z), \phi_H(j_n, z)\} = \int_0^1 \{w(r, z), \chi(r, z)\} r J_0(j_n r) dr$$

и формулы обращения

$$u(r, z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (2.7)$$

$$w(r, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r), \quad \chi(r, z) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r).$$

В равенствах (2.6), (2.7) j_n корни такого трансцендентного уравнения

$$J_1(j_n) = 0 \quad (n = \overline{0, \infty}; j_0 = 0). \quad (2.8)$$

В пространстве изображений получаем следующую краевую задачу:

$$-j_n^2 u_H + \frac{C_{55}}{C_{11}} \frac{d^2 u_H}{dz^2} - \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{dw_H}{dz} - \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{d\phi_H}{dz} + \lambda^2 u_H = F_{1H}, \quad (2.9)$$

$$-\frac{C_{55}}{C_{11}} j_n^2 w_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{(C_{13} + C_{55})}{C_{11}} j_n \frac{du_H}{dz} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 \phi_H + \frac{d^2 \phi_H}{dz^2} + \lambda^2 w_H = F_{2H},$$

$$-\frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 w_H + \frac{d^2 w_H}{dz^2} + \frac{(e_{31} + e_{15})}{e_{33}} j_n \frac{du_H}{dz} + \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{e_{33}^2} j_n^2 \phi_H - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{d^2 \phi_H}{dz^2} = F_{3H};$$

$$z = 0, L \quad \frac{C_{13}}{C_{11}} j_n u_H + \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dw_H}{dz} + \frac{d\phi_H}{dz} = \{N_{1H}(j_n, L), N_{2H}(j_n, 0)\}, \quad (2.10)$$

$$\frac{C_{55}}{C_{11}} \left(\frac{du_H}{dz} - j_n w_H \right) = \{N_{3H}(j_n, L), N_{4H}(j_n, 0)\},$$

$$-j_n \phi_H = \{N_{5H}(j_n, L), N_{6H}(j_n, 0)\},$$

где $\{F_{1H}, N_{3H}, N_{4H}, N_{5H}, N_{6H}\} = \int_0^1 \{F_1, N_3, N_4, N_5, N_6\} r J_1(j_n r) dr$,

$$\{F_{2H}, F_{3H}, N_{1H}, N_{2H}\} = \int_0^1 \{F_2, F_3, N_1, N_2\} r J_0(j_n r) dr.$$

При исследовании (2.9), (2.10) необходимо рассмотреть два случая: $n = 0$ и $n \neq 0$.

Когда $n = 0$, формируется следующая задача относительно $w_H(j_0, z)$, $\phi_H(j_0, z)$:

$$\frac{d^2 w_H}{dz^2} + p^2 w_H = F_H^*, \quad (2.11)$$

$$\phi_H = \frac{e_{33}^2}{C_{11} \varepsilon_{33}} \left\{ w_H + K(z) \int_0^1 \left[f_2(r) - \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} f_3(r) \right] r dr \right\}; \quad (2.12)$$

$$\text{при } z = 0, L \quad \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dw_H}{dz} + \frac{d\phi_H}{dz} = N_{1H}^*(L), \quad \frac{C_{33}}{C_{11}} \frac{dw_H}{dz} + \frac{d\phi_H}{dz} = N_{2H}^*(0) \quad (2.13)$$

где $F_H^* = (C_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2)^{-1} (C_{11} \varepsilon_{33} F_{2H}^* + e_{33}^2 F_{3H}^*)$, $p^2 = \lambda^2 f_4$,

$$f_4 = \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{C_{33} \varepsilon_{33} + e_{33}^2}, \quad \{N_{1H}^*, N_{2H}^*, F_{2H}^*, F_{3H}^*\} = \left[\int_0^1 \{N_1, N_2, F_2, F_3\} r dr \right].$$

Общий интеграл равенства (2.11), с учетом (2.4), (2.13), имеет вид

$$w_H(j_0, z) = D_{10} \cos(pz) + D_{20} \sin(pz) + p^{-1} \int_0^z F_H^*(\xi) \sin p(z - \xi) d\xi, \quad (2.14)$$

где $D_{10} = [p \sin(pL)]^{-1} [D_{20} p \cos(pL) - f_4 \int_0^1 q(r) r dr + \int_0^L F_H^*(\xi) \cos p(L - \xi) d\xi +$

$$+ \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=L} \int_0^1 f_2(r) r dr], \quad D_{20} = p^{-1} \frac{dK(z)}{dz} \Big|_{z=0} \int_0^1 f_2(r) r dr.$$

При $n \neq 0$ система уравнений (2.9) приводится к следующему разрешающему уравнению относительно w_H :

$$\frac{d^6 w_H}{dz^6} + k_{1n} \frac{d^4 w_H}{dz^4} + k_{2n} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + k_{3n} w_H = F_H, \quad (2.15)$$

где $k_{1n} = \frac{a_{8n} a_{10n} + a_{8n} (a_{2n} a_{8n} - a_{3n} a_{9n}) + a_{9n} (a_{2n} a_{7n} - a_{4n} a_{9n})}{a_{11n}}$,

$$k_{2n} = \frac{a_{7n} a_{10n} + a_{8n} (a_{2n} a_{7n} - a_{4n} a_{9n}) + a_{2n} a_{6n} a_{9n}}{a_{11n}}, \quad k_{3n} = \frac{a_{6n} a_{10n} + a_{2n} a_{6n} a_{8n}}{a_{11n}},$$

$$a_{1n} = \lambda^2 - j_n^2, \quad a_{2n} = \frac{C_{55}}{C_{11}} - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{3n}, \quad a_{3n} = -\frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{1n},$$

$$a_{4n} = -\frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n - \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{2n}, \quad a_{5n} = -j_n^2 \left(\frac{C_{55}}{C_{11}} + \frac{e_{15}}{e_{33}} s_{2n} \right) + \lambda^2,$$

$$a_{6n} = \frac{C_{33}}{C_{11}} - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 s_{1n} + s_{2n}, \quad a_{7n} = s_{1n}, \quad a_{8n} = \frac{C_{13} + C_{55}}{C_{11}} j_n - \frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 s_{3n},$$

$$a_{9n} = s_{3n}, \quad a_{10n} = a_{1n} a_{9n} - a_{2n} a_{8n}, \quad a_{11n} = a_{9n} (a_{2n} a_{8n} - a_{3n} a_{9n}),$$

$$s_{1n} = -s_{4n} (e_{33}^{-2} C_{33} \varepsilon_{33} + 1), \quad s_{2n} = s_{4n} e_{33}^{-2} [j_n^2 (e_{15} e_{33} + C_{55} \varepsilon_{33}) - \lambda^2 C_{11} \varepsilon_{33}],$$

$$s_{3n} = -s_{4n} j_n e_{33}^{-2} [\varepsilon_{33} (C_{13} + C_{55}) + e_{33} (e_{31} + e_{15})], \quad s_{4n} = \frac{e_{33}^3}{j_n^2 C_{11} (\varepsilon_{11} e_{33} - \varepsilon_{33} e_{15})},$$

$$F_H = \frac{a_{9n}}{a_{10n} a_{11n}} \left(a_{9n} \frac{d^2}{dz^2} + a_{8n} \right) \left(\frac{a_{2n}}{a_{9n}} \tilde{F}_{2H} - \frac{d\tilde{F}_{1H}}{dz} \right) + a_{11n}^{-1} \tilde{F}_{2H},$$

$$\tilde{F}_{1H} = F_{1H} + \frac{e_{31} + e_{15}}{e_{33}} j_n s_{4n} \left(\frac{dF_{3H}}{dz} + \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} \frac{dF_{2H}}{dz} \right),$$

$$\tilde{F}_{2H} = s_{4n} \left(\frac{e_{15}}{e_{33}} j_n^2 - \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(F_{3H} + \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} F_{2H} \right) + F_{2H}.$$

Левая часть дифференциального уравнения (2.15) допускает факторизацию на коммутативные дифференциальные сомножители

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k_{4n} \right) \left(\frac{d^4}{dz^4} + k_{5n} \frac{d^2}{dz^2} + k_{6n} \right) w_H = F_H, \quad (2.16)$$

где $k_{5n} = k_{1n} - k_{4n}$, $k_{6n} = k_{3n} k_{4n}^{-1}$, k_{4n} — действительный корень алгебраического уравнения 3-й степени:

$$k_{4n}^3 - k_{1n} k_{4n}^2 + k_{2n} k_{4n} - k_{3n} = 0.$$

Для установившегося режима вынужденных колебаний, как правило, выполняется следующее соотношение коэффициентов $k_{4n} < 0$ и $k_{5n}^2 < 4k_{6n}$. В этом случае общий интеграл дифференциального уравнения (2.16) имеет вид:

$$w_H = D_{1n} \exp\left(\sqrt{-k_{4n}}z\right) + D_{2n} \exp\left(-\sqrt{-k_{4n}}z\right) + \exp(\chi_n z) [D_{3n} \cos(\beta_n z) + (2.17) \\ + D_{4n} \sin(\beta_n z)] + \exp(-\chi_n z) [D_{5n} \cos(\beta_n z) + D_{6n} \sin(\beta_n z)] + \\ + \int_0^z \frac{F_H(\xi)}{\det \|B_{ms}(\xi)\|} \sum_{m=1}^6 \det \|G_{m,s}(z, \xi)\| d\xi.$$

Здесь $\det \|B_{ms}\|$ — определитель Вронского, составленный для частных решений однородного уравнения (2.16) ($m = \overline{1, 6}$, $s = \overline{1, 6}$), $\det \|G_{m,s}(z, \xi)\|$ — определитель, полученный из $\det \|B_{ms}\|$ путем замены каждый раз s -го столбца на столбец элементов $\|0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\|^T$ и умноженный на соответствующее частное решение (2.17), $\chi_n = \frac{1}{2} \left[2(k_{6n})^{1/2} - k_{5n} \right]^{1/2}$, $\beta_n = \left[\frac{k_{5n}}{2} + \chi_n^2 \right]^{1/2}$.

Выражения для u_H, ϕ_H , полученные в результате приведения (2.9) к (2.15), имеют вид:

$$\phi_H(j_n, z) = s_{1n} \frac{d^2 w_H}{dz^2} + s_{2n} w_H + s_{3n} \frac{du_H}{dz} + s_{4n} \left(F_{3H} + \frac{C_{11} \varepsilon_{33}}{e_{33}^2} F_{2H} \right), \quad (2.18)$$

$$u_H(j_n, z) = a_{1n}^{-1} \left(s_{5n} \frac{d^5 w_H}{dz^5} + s_{6n} \frac{d^3 w_H}{dz^3} + s_{7n} w_H + F_{4H} \right),$$

где $F_{4H} = \tilde{F}_{1H} - a_{2n} a_{10n}^{-1} \left(\frac{d^2 \tilde{F}_{1H}}{dz^2} - a_{2n} \frac{d \tilde{F}_{2H}}{dz} \right)$, $s_{7n} = -a_2^2 a_{5n} a_{10n}^{-1} - a_{4n}$, $s_{5n} = a_{2n} a_{10n}^{-1} (a_{3n} a_{9n} - a_{2n} a_{7n})$, $s_{6n} = a_{2n} a_{10n}^{-1} (a_{4n} a_{9n} - a_{2n} a_{6n}) - a_{3n}$.

Подстановка (2.17), (2.18) в краевые условия (2.10) позволяет определить постоянные интегрирования $D_{1n} \div D_{6n}$.

3. Расчетные соотношения

Для определения функции $f_1(r) \div f_3(r)$, входящих в представления (2.1), воспользуемся следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d^3 f_m(r)}{dr^3} = 0 \quad (m = \overline{1, 3}). \quad (3.1)$$

В результате решения (3.1), при учете (2.4), имеем

$$f_1(r) = r^2 - r, \quad f_2(r) = \frac{C_{11} \varepsilon_{11}}{2(C_{55} \varepsilon_{11} + e_{15}^2)} r^2, \quad f_3(r) = \frac{e_{15} e_{33}}{2(C_{55} \varepsilon_{11} + e_{15}^2)} r^2.$$

Применяя к трансформантам (2.6) формулы обращения (2.7), получаем с учетом (2.1) следующие разложения для $U(r, z)$, $W(r, z)$, $\phi(r, z)$:

$$U(r, z) = f_1(r) q(r) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_1(j_n r), \quad (3.2)$$

$$W(r, z) = f_2(r) K(z) + 2w_H(j_0, z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r),$$

$$\phi(r, z) = f_3(r) K(z) + 2\phi_H(j_0, z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_H(j_n, z)}{J_0(j_n)^2} J_0(j_n r).$$

Заключительным этапом данного исследования является определение функции $K(z)$, которую для упрощения расчета можно представить в виде следующего многочлена

$$K(z) = \sum_{k=1}^m A_k z^{m-k}. \quad (3.3)$$

В результате подстановки (3.3) во второе равенство (3.2) и приравнивания нулю вертикальные перемещения $W(1, z)$ в $m-1$ точках по высоте цилиндра, с учетом (2.3), формируется система неоднородных алгебраических уравнений относительно постоянных $A_1 \div A_m$. Ее решение позволяет определить функцию $K(z)$.

Разложения (3.2) удовлетворяют исходным дифференциальным уравнениям (1.3), граничным условиям (1.4), (1.5) (последнее условие (1.5) с заданной точностью) и являются замкнутым решением рассматриваемой краевой задачи электроупругости.

Для определения спектра частот собственных колебаний пластины ω_{nk} ($n = \overline{1, \infty}; k = \overline{1, \infty}$) необходимо исследовать однородные дифференциальные уравнения и условия (2.9), (2.10) с учетом замены λ на $\tilde{\lambda}_{nk}$. Причем для определения высокочастотной части спектра, когда $k_{4n} > 0$, $k_{5n}^2 > 4k_{6n}$, следует рассмотреть дополнительно к (2.17), следующий случай:

$$w_H = D_{1n} \cos(\sqrt{k_{4n}z}) + D_{2n} \sin(\sqrt{k_{4n}z}) + \exp(\chi_n z) [D_{3n} \cos(\beta_n z) + D_{4n} \sin(\beta_n z)] + \exp(-\chi_n z) [D_{5n} \cos(\beta_n z) + D_{6n} \sin(\beta_n z)].$$

Частота собственных колебаний ω_{nk} определяется равенством

$$\omega_{nk} = \frac{\tilde{\lambda}_{nk}}{b} \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}.$$

Амплитудное значение разности потенциалов между эквипотенциальными электродированными поверхностями пластины определяется по формуле

$$V^* = \phi(r_*, 0) - \phi(r_*, h). \tag{3.4}$$

4. Численный анализ результатов

В качестве примера рассматривается пластина, выполненная из пьезокерамики состава ЦТС-19 [7].

Для учета влияния связанности электрических и механических полей напряжения на динамическую реакцию упругой системы было также построено аналогичное решение задачи теории упругости [8].

В таблице приведены собственные значения $\tilde{\lambda}_{1k}$ свободных осесимметричных колебаний элемента, изготовленного из пьезокерамики и обычного керамического материала, имеющего аналогичные упругие характеристики. Расчеты выполнялись для различных значений относительной толщины L . Анализ результатов подтверждает известный факт [2], что связанность механических и электрических полей напряжения приводит к "ужесточению" системы и, следовательно, более высокому спектру собственных значений $\tilde{\lambda}_{nk}$. Однако данное свойство оказывает влияние в основном на первые частоты колебаний. Высокочастотная часть спектра при этом изменяется незначительно (см. таблицу).

Таблица

$\tilde{\lambda}_{1k}$	Теория электроупругости				Теория упругости			
	$L=0,1$	$L=0,2$	$L=0,4$	$L=1$	$L=0,1$	$L=0,2$	$L=0,4$	$L=1$
$k = 1$	0,389	0,726	1,199	1,764	0,349	0,648	1,057	1,500
$k = 2$	3,229	3,206	3,109	2,381	3,228	3,206	3,104	2,237
$k = 3$	15,147	8,131	4,945	3,283	15,140	8,119	4,928	3,203

На рис. 1, 2 приведены графики изменения касательных напряжений σ_{rz} ($m = 4$) по высоте пластины ($L = 0,4$), справедливые соответственно для задач

теорий электроупругости и упругости. Расчеты выполнялись при действии равномерно распределенной гармонической нагрузки интенсивностью q_0 с частотой вынужденных колебаний $\theta = 0,5\tilde{\lambda}_{11}$. Цифрами 1–4 обозначены результаты для $r = 1; 0,75; 0,5; 0,25$.

$$\sigma_{rz}(r, z)/q_0$$

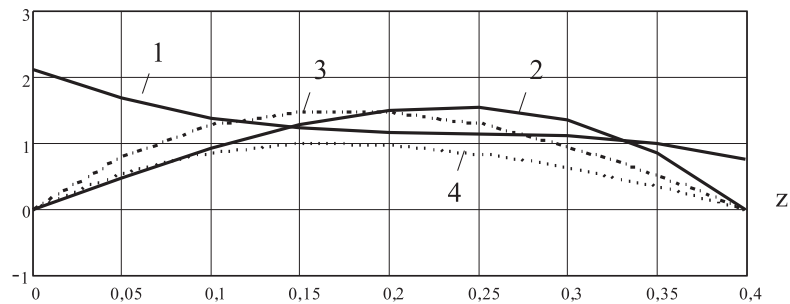


Рис. 1. Изменение касательных напряжений σ_{rz} по высоте пьезокерамической пластины при $L = 0,4$, $\theta = 0,5\tilde{\lambda}_{11}$: 1 – $r = 1$; 2 – $r = 0,75$; 3 – $r = 0,5$; 4 – $r = 0,25$

$$\sigma_{rz}(r, z)/q_0$$

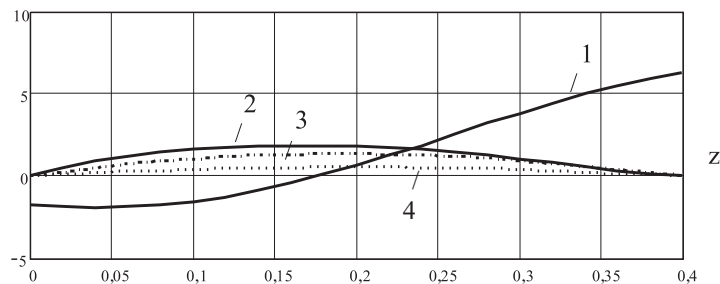


Рис. 2. Изменение касательных напряжений σ_{rz} по высоте керамической пластины при $L = 0,4$, $\theta = 0,5\tilde{\lambda}_{11}$: 1 – $r = 1$; 2 – $r = 0,75$; 3 – $r = 0,5$; 4 – $r = 0,25$

Следует обратить внимание, что в работе [9] при исследовании напряженно-деформированного состояния круглых изотропных пластин для лучшего схождения бесконечных рядов нарушалось условие парности касательных напряжений в угловых точках ($r = 1, z = 0, h$), справедливое для симметричной теории упругости. Аналогичный подход используется также при вычислении функции $K(z)$ (рис. 1, 2 – кривые 1). В результате существенного уменьшения численных значений $\frac{dK(z)}{dz}|_{z=0,L}$, входящих в краевые условия (2.10), полученное решение становится устойчивым.

Кроме того, анализ рис. 1, 2 показывает, что учет связанности полей напряжения приводит к существенному изменению характера данного усилия в жесткой заделке.

Графики изменения вертикальной компоненты вектора перемещений $W(r, z)$ по координате r пьезокерамического и керамического элементов ($L = 1, \theta = 0, 1$) отражают рис. 3, 4. Цифрами 1–3 обозначены кривые, соответствующие сечениям $z = L, \frac{L}{2}, 0$. Следует отметить, что связанность электрических и механических полей напряжения оказывает заметное влияние на деформированное состояние рассматриваемых пластин как в качественном, так и количественном отношении. В пьезокерамическом элементе наблюдается уменьшение перемещений с более равномерным сжатием по высоте сечения.

$$W(r, z)/q_0$$

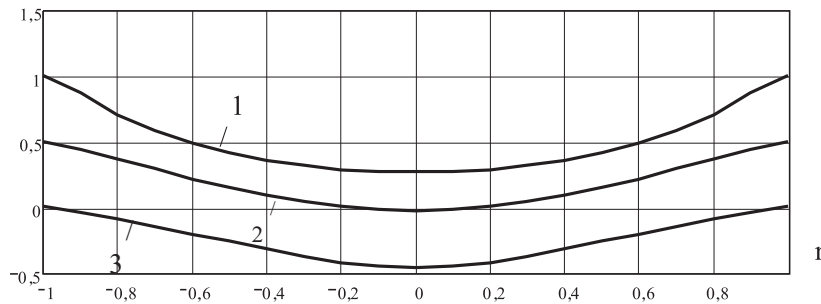


Рис. 3. Зависимость вертикальной компоненты вектора перемещений пьезокерамической пластины от радиальной координаты при $L = 1, \theta = 0, 1$:
 1 – $z = L$; 2 – $z = \frac{L}{2}$; 3 – $z = 0$

$$W(r, z)/q_0$$

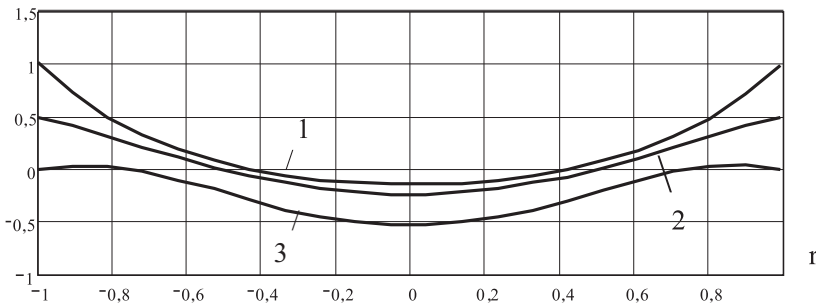


Рис. 4 Зависимость вертикальной компоненты вектора перемещений керамической пластины от радиальной координаты при $L = 1, \theta = 0, 1$: 1 – $z = L$; 2 – $z = \frac{L}{2}$; 3 – $z = 0$

На рис. 5 показаны графики, характеризующие зависимость разности потенциалов V^* от частоты вынужденных колебаний θ для пластин различной толщины. Цифрами 1–3 соответственно обозначены результаты, справедливые для параметра $L = 1; 0,6; 0,4$. Следует отметить, что для толстых пластин увеличение частоты вынужденных колебаний приводит к уменьшению V^* . Однако при $L = 0,4$ наблюдается противоположная картина. Дальнейшее снижение L приводит к резкому уменьшению разности потенциала, что объясняется небольшой степенью сжатия тонких пластин по толщине.

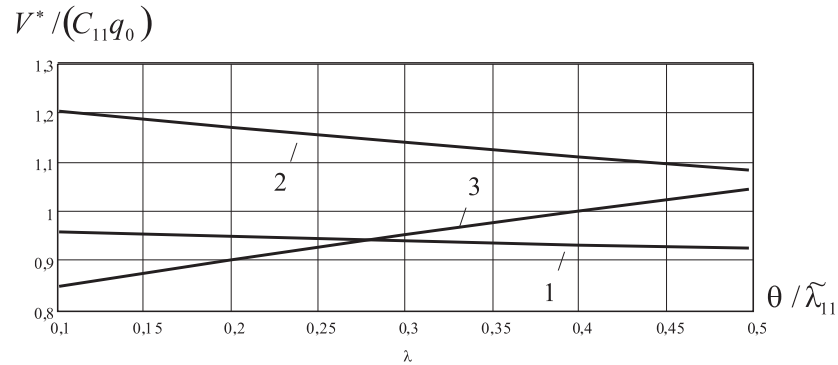


Рис. 5. Зависимость разности потенциалов между торцевыми электродированными поверхностями от частоты вынужденных колебаний: 1 – $L = 1$ ($\tilde{\lambda}_{11} = 0,9$); 2 – $L = 0,6$ ($\tilde{\lambda}_{11} = 0,75$); 3 – $L = 0,4$ ($\tilde{\lambda}_{11} = 0,6$);

Предложенная методика позволяет исследовать установившийся режим вынужденных колебаний пьезокерамических пластин при произвольных граничных условиях на их торцах.

Литература

- [1] Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Улитко Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 279 с.
- [2] Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. Киев: Наук. думка, 1990. 228 с.
- [3] Hussein M., Neyliger P.R. Discrete layer Analysis of Axisymmetric Vibrations of Laminated Piezoelectric Cylinders // J. of Sound and Vibration. 1996. № 192. Из. 5. P. 995–1013.
- [4] Григоренко А.Я., Ефимова Т.Л., Лоза И.А. Об одном подходе к исследованию колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины // Доклады НАН Украины. 2009. № 6. С. 61–66.
- [5] Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 116–122.
- [6] Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для пьезокерамического цилиндра с окружной поляризацией // ПМиТФ. 2009. Т. 50. № 1. С. 12–21.
- [7] Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 470 с.
- [8] Шляхин Д.А. Вынужденные осесимметричные изгибные колебания толстой круглой жестко закрепленной пластины // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2011. № 8(89). С. 142–152.
- [9] Пространственные задачи теории упругости и пластичности / под ред. А.Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1985. Т. 3. 280 с.

Поступила в редакцию 20/І/2012;
в окончательном варианте — 2/VII/2012.

COMPELLED AXYSIMMETRIC FLEXURAL FLUCTUATIONS OF THICK ROUND RIGID PIEZOCERAMIC PLATE

© 2012 D.A. Shlyakhin²

New closed solution of axisymmetric nonstationary problem of the theory of electroelasticity for thick round piezoceramic plate with rigid of its external radial surface is constructed. Calculated relations are obtained by method of expansion in eigen vector functions in the form of structural algorithm of finite transformations. Numerical results allow to define the natural-vibration frequency, the stress-strain state of the testing element, and also the potential and intensity of the induced electric field.

Key words: compelled axisymmetric fluctuations, thick piezoceramic plate, problem of electroelasticity.

Paper received 20/I/2012.

Paper accepted 2/VII/2012.

²Shlyakhin Dmitriy Averkievich (d-612-mit2009@yandex.ru), the Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics, Samara State University of Architecture and Civil Engineering, Samara, 443001, Russian Federation.