

УДК 534.535

ПРОСТРАНСТВЕННО МОДУЛИРОВАННЫЕ  
СТРУКТУРЫ В НЕМАТИЧЕСКОМ ЖИДКОМ  
КРИСТАЛЛЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ  
ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА  
НА СВЕРХНИЗКИХ ЧАСТОТАХ

© 2012 Е.Н. Кожевников<sup>1</sup> Я.В. Самойлова<sup>2</sup>

Теоретически описано искажение гомеотропной структуры нематического жидкого кристалла при воздействии периодического сдвига на сверхнизких частотах. Показано, что воздействие периодического сдвига приводит к появлению в НЖК слое пространственно модулированной структуры. Пороговая амплитуда и пространственный период новой ориентационной молекулярной структуры определяются методом Галеркина на основе нелинейных уравнений гидродинамики нематического жидкого кристалла. Теоретический анализ показывает, что пороговая амплитуда сдвига не зависит от частоты, а пространственный период — порядка толщины НЖК-слоя. Теоретические результаты сравниваются с данными эксперимента.

**Ключевые слова:** нематический жидкий кристалл, периодический сдвиг, пространственно модулированная структура, пороговая амплитуда.

## Введение

Воздействие периодического сдвигового течения на структуру нематического жидкого кристалла исследовано экспериментально в широком диапазоне частот, начиная с низких  $\nu \sim 10^{-1}$  Гц и кончая высокими  $\nu \sim 10^5$  Гц [1–8]. Результаты исследования демонстрируют чрезвычайную чувствительность ориентационной структуры нематического кристалла к воздействию периодического сдвига. При малых амплитудах сдвига молекулы нематика в слое с гомеотропной ориентацией осциллируют вблизи равновесного положения с амплитудой отклонения от нормали, определяемой градиентом сдвига. Структура кристалла при этом в любой момент времени остается однородной вдоль слоя. При увеличении амплитуды скорости сдвигового течения до некоторой пороговой величины однородность структуры разрушается, в слое формируются вихревые потоки и стационарное периодическое вдоль слоя искажение структуры, наблюдаемое визуально как систе-

<sup>1</sup>Кожевников Евгений Николаевич (kozhev@samsu.samara.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

<sup>2</sup>Самойлова Яна Викторовна (yana20002@yandex.ru), кафедра математики и бизнес-информатики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

ма вытянутых вдоль слоя полос (доменов). Воздействие периодического сдвига на слой нематика с планарной исходной ориентацией также приводит к образованию пространственно модулированной ориентационной структуры, геометрия которой значительно меняется с частотой сдвига [8–14].

Результаты теоретического анализа пороговых структурных искажений гомеотропного нематического кристалла приводятся во многих работах (например [5; 6; 11–14]). Во всех этих работах порог образования доменной структуры определяется методом Галеркина на основе уравнений гидродинамики нематического кристалла, линеаризованных по возмущениям. Показано, что на высоких частотах образование доменов обусловлено инерционным запаздыванием вихревых потоков от сдвигового воздействия [12]. С понижением частоты становится существенным запаздывание, обусловленное пограничными эффектами в ориентационных волнах [13]. И тот и другой механизмы формирования доменов приводят к пороговой амплитуде сдвига, нарастающей при уменьшении частоты. На частотах  $\nu \leq 10$  Гц пороговый градиент сдвига начинает превышать единицу, и анализ появления структурных искажений на основе уравнений гидродинамики нематического кристалла, линеаризованных по углу поворота молекул, становится недопустимым. Теория доменной структуры в этом случае должна строиться на уравнениях, нелинейных по углу поворота молекул в осциллирующих потоках. Такой анализ в настоящее время в литературе отсутствует и проводится в данной работе впервые. Результатом расчета, проведенного в данной работе, служат значения пороговой амплитуды и ширины доменов, результаты расчета сравнимы с данными эксперимента.

Качественно картина образования доменной структуры выглядит следующим образом. Случайные периодические вдоль слоя отклонения молекул от начального равновесного положения сопровождаются появлением осциллирующих вихревых потоков движения жидкости. Нелинейные эффекты, обусловленные взаимодействием вихревых потоков с исходным сдвиговым полем, приводят к появлению стационарных течений. Вязкие моменты в таких течениях стремятся увеличить исходное искажение структуры. Упругие моменты Франка стабилизируют структуру нематической жидкости; на пороге эффекта действие этих моментов уравновешивается. За порогом эффекта возникают пространственно модулированные искажения структуры нематического кристалла.

## 1. Теоретический анализ

Итак, рассмотрим гомеотропный слой нематического жидкого кристалла (НЖК-слой) толщины  $h$ , помещенный между двумя параллельными пластинами (рис. 1). Считаем, что длина НЖК-слоя много больше его толщины,  $L \gg h$ , и пренебрегаем граничными эффектами вблизи концов образца. Направим ось  $Z$  по нормали к слою, выбирая начало координат  $Z = 0$  в центре слоя; ось  $X$  определим направлением сдвига. Следуя наблюдаемой экспериментально геометрии доменов, рассмотрим двухмерную картину эффекта, считая, что вращение молекул и движение жидкости происходит в плоскости  $XZ$  и все переменные не зависят от координаты  $Y$ .

Зададим воздействие на НЖК-слой смещением верхней пластины в своей плоскости частотой  $\omega = 2\pi\nu$ , считая нижнюю пластину неподвижной

$$V_X|_{Z=h/2} = V_0 \cos \omega T, \quad V_Z|_{Z=\pm h/2} = V_X|_{Z=-h/2} = 0. \quad (1.1)$$

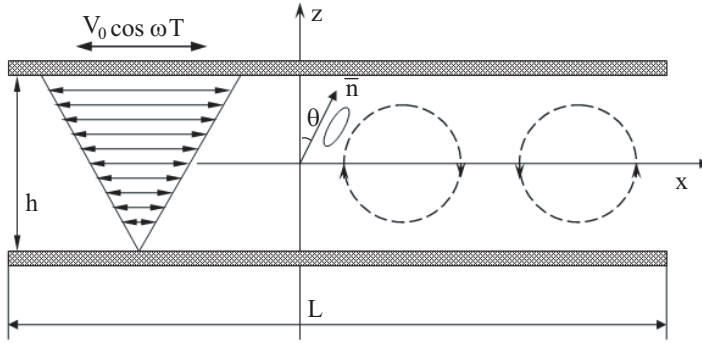


Рис. 1. Геометрия течения Кузнетта НЖК

Здесь  $T$  — размерное время. Условия воздействия (1.1) определяют в дальнейшем анализе граничные условия для скоростей.

Рассмотрим жесткую ориентацию молекул на границах НЖК-слоя, при которой

$$\theta|_{z=\pm h/2} = 0.$$

Проведем анализ эффекта в рамках гидродинамики НЖК, используя уравнения [15; 16]

$$\begin{aligned} \rho \dot{\vec{V}} &= -\nabla P + \nabla \cdot \hat{\sigma}, \\ \gamma_1 \vec{N} + \gamma_2 [\hat{V} \vec{n} - (\vec{n} \cdot \hat{V} \cdot \vec{n}) \vec{n}] - \vec{h}^e &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{V}) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $P$  — давление,  $\hat{\sigma}$  — тензор вязких напряжений Лесли с компонентами

$$\sigma_{ij} = \alpha_1 V_{pq} n_p n_q + \alpha_2 N_i n_j + \alpha_3 N_j n_i + \alpha_4 V_{ij} + \alpha_5 V_{ik} n_k n_j + \alpha_6 V_{jk} n_k n_i,$$

$\vec{N} = \dot{\vec{n}} - \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \times \vec{n}$ ,  $\hat{V} \cdot \vec{n}$  — свертка тензора скорости деформации  $\hat{V}$  (по второму индексу) и вектора  $\vec{n}$ ;  $\alpha_k$  ( $k = 1..6$ ) — коэффициенты вязкости Лесли. Вектор  $\vec{h}^e$  в уравнении вращения представляет полевую силу, определяемую градиентами упругой энергии Франка  $g$

$$g = \frac{1}{2} [K_{11} (\text{div} \vec{n})^2 + K_{22} (\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{n})^2 + K_{33} (\vec{n} \times \text{rot} \vec{n})^2],$$

и равен

$$\vec{h}^e = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial x_i} \right)} - \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}.$$

Здесь  $K_{rr}$  — упругие постоянные Франка.

Коэффициенты вращательной вязкости  $\gamma_1, \gamma_2$  выражаются через коэффициенты вязкости Лесли

$$\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3 + \alpha_2 = \alpha_6 - \alpha_5.$$

При описании сдвигового воздействия и вихревых потоков считаем нематическую жидкость несжимаемой. Последнее из уравнений в системе (1.2) в этом случае сводится к условию

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

Малые коэффициенты вязкости  $\alpha_1, \alpha_3$  ( $|\alpha_1|/|\alpha_4| \sim |\alpha_3|/|\alpha_2| \sim 10^{-2}$ ) полагаем равными нулю:  $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ . В этом случае получим соотношения  $\gamma_1 = -\gamma_2 = \alpha_5 - \alpha_6 = \gamma$ , а тензор вязких напряжений  $\hat{\sigma}$  преобразуется к виду

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 v_{ij} + \alpha_2 N_i n_j + \alpha_5 v_{ik} n_k n_j + \alpha_6 v_{jk} n_k n_i. \quad (1.3)$$

Ограничиваясь в расчете упругой энергии одноконстантным приближением  $K_{11} = K_{22} = K_{33}$  и переходя к угловому представлению компонент директора  $n_X = \sin \theta, n_Z = \cos \theta$ , представим плотность упругой энергии Франка в виде

$$g = \frac{1}{2} K_{33} [(\nabla n_x)^2 + (\nabla n_z)^2] = \frac{1}{2} K_{33} (\nabla \theta)^2.$$

Выделяя из второго уравнения в системе (1.2) уравнение для компоненты  $n_X$ , получим после преобразований следующее уравнение вращения директора:

$$\gamma \left[ \dot{\theta} + V_{Z,X} \sin^2 \theta - V_{X,Z} \cos^2 \theta - V_{X,X} \sin 2\theta \right] = K_{33} \Delta \theta. \quad (1.4)$$

Применим дважды операцию "ротатор" к уравнению движения молекул системы (1.2) и, используя условие несжимаемости, исключим компоненту скорости  $V_z$  в линейных слагаемых. Для компоненты скорости  $V_X$  получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \rho \Delta \frac{\partial V_X}{\partial T} - \rho (V_X \Delta V_Z - V_Z \Delta V_X)_{,Z} = \\ & = \partial_Z \left[ (\sigma_{XX} - \sigma_{ZZ})_{,XZ} + \sigma_{XZ,ZZ} - \sigma_{ZX,XX} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Преобразуем выражение для тензора вязких напряжений  $\sigma_{ij}$ . Выразим компоненты вектора  $N_i$  из второго уравнения системы (1.2) и подставим их в выражение (1.3) для  $\sigma_{ij}$ . Учитывая соотношение  $\alpha_5 - \alpha_6 = -\gamma_2 = \gamma$ , приведем выражение для  $\sigma_{ij}$  к виду

$$\sigma_{ij} = \alpha_4 v_{ij} + \alpha_6 (v_{i\alpha} n_\alpha n_j + v_{j\alpha} n_\alpha n_i) + \gamma v_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta n_i n_j + h_\alpha n_\alpha n_i n_j - h_i n_j. \quad (1.6)$$

Подставив напряжения (1.6) в уравнение (1.5) и проведя соответствующие преобразования, получим уравнение для скорости потоков

$$\begin{aligned} & \rho \Delta V_{X,T} - \rho (V_X \Delta V_Z - V_Z \Delta V_X)_{,Z} - \\ & - K_{33} \partial_Z \left[ \partial_{XZ}^2 (2\Delta \theta \sin \theta \cos \theta) + \partial_Z^2 (\Delta \theta \cos^2 \theta) + \partial_X^2 (\Delta \theta \sin^2 \theta) \right] = \\ & = \partial_Z \left\{ \partial_{XZ}^2 \left[ 2(\alpha_4 + \alpha_6) V_{XX} + \gamma V_{XX} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\gamma V_{XX} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] - (\partial_X^2 - \partial_Z^2) [(\alpha_4 + \alpha_6) V_{XZ} - \right. \\ & \left. - \gamma V_{XX} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2\gamma V_{XZ} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Перейдем в уравнениях (1.4), (1.7) и при условии несжимаемости жидкости к безразмерным переменным: координатам  $x = X/h, z = Z/h$ , времени  $t = \omega T$

и скоростям  $v_k = V_k/(\omega h)$ . Уравнения вращения молекул, движение жидкости и условие несжимаемости в безразмерных переменных принимают вид

$$\begin{aligned} & \partial_t \theta + \theta_{,x} v_x + \theta_{,z} v_z - \varepsilon \Delta \theta - v_{x,z} \cos^2 \theta + v_{z,x} \sin^2 \theta - 2v_{xx} \sin \theta \cos \theta = 0, \\ & (\eta \sigma^2 \Delta \partial_t - \hat{D}) v_x + \\ & + \varepsilon \partial_z [\partial_z^2 (\Delta \theta \cos^2 \theta) + \partial_{xz}^2 (2\Delta \theta \sin \theta \cos \theta) + \partial_x^2 (\Delta \theta \sin^2 \theta)] = \\ & = \partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) (2v_{xz} \sin^2 \theta \cos^2 \theta) - \partial_x \partial_z^2 (2v_{xz} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) - \\ & - \partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) (v_{xx} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) - \partial_x \partial_z^2 (4v_{xx} \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + \\ & + \eta \sigma^2 (v_x \Delta v_z - v_z \Delta v_x), \\ & \operatorname{div} \vec{v} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь  $\hat{D} = \eta \Delta^2 + \partial_z^2 \partial_x^2$  — дифференцирующий оператор,  $\varepsilon$  и  $\sigma$  — безразмерные параметры, определяющие зависимость эффекта от толщины НЖК-слоя  $h$  и частоты сдвига  $\omega$  через скейлинговый параметр  $\omega h^2$

$$\varepsilon = \frac{K_{33}}{\gamma \omega h^2} = \frac{1}{\omega \tau}, \quad \sigma^2 = \frac{\rho \omega h^2}{\gamma \eta} = \lambda \omega \tau, \quad \lambda = \frac{\rho K_{33}}{\gamma^2 \eta} \sim 10^{-6},$$

$\eta = \frac{\alpha_4 + \alpha_6}{\gamma}$  — безразмерная вязкость в вязкой волне, распространяющейся вдоль оси кристалла,  $\tau = \gamma h^2 / K_{33}$  — характерное время восстановления гомеотропной ориентации кристалла при снятии внешнего воздействия.

В безразмерных переменных граничные условия для скоростей и угла поворота молекул принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} v_x|_{z=1/2} &= u_0 \cos t, & v_x|_{z=-1/2} &= 0, \\ v_z|_{z=\pm 1/2} &= 0, & \theta|_{z=\pm 1/2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заметим, что частота и толщина нематического слоя входят в уравнения (1.8) через скейлинговый параметр  $\omega \tau = \gamma \omega h^2 / K_{33}$  и, при жесткой ориентации молекул на граничных пластинах, не входят в граничные условия (1.9). Следовательно, любое решение рассматриваемых уравнений зависит от частоты и толщины слоя лишь через  $\omega \tau$ . В частности, такая скейлинговая зависимость должна иметь место для пороговой амплитуды, геометрии доменов и степени деформации кристалла за порогом эффекта. Отсутствие подобной зависимости при экспериментальном исследовании показывает, что либо ориентация молекул на границе не являлась жесткой, либо в эксперименте присутствуют побочные факторы воздействия (например непараллельность в движении граничных пластин [17; 19]).

Как показывает анализ эффекта на высоких частотах, появление стационарных потоков и дестабилизация структуры кристалла обусловлены действием стационарных напряжений и моментов. Эти моменты и напряжения содержат слабые вида  $\langle v'_{x,z} \theta_1 \rangle = \langle v'_{x,z} u_{1x,z} \rangle$  и отличны от нуля, если скорость жидкости в осциллирующих потоках  $v'_x$  запаздывает по фазе от скорости в потоке Куэтта  $v_{1x}$ . Это запаздывание обусловлено инерцией среды на более высоких частотах и пограничными эффектами — на низких частотах; в первом случае на пороге эффекта —  $u_0^2 \sim 1/\sigma^2 = \eta/\rho \omega h^2$ , во втором —  $u_0^2 \sim 1/q \sim \sqrt{K_{33}/\gamma \omega h^2}$  [20].

Оба рассматриваемых механизма образования ПМС приводят к увеличению амплитуды  $u_0$  при уменьшении частоты  $\omega \tau$ . При достаточно низких частотах

пороговая амплитуда возрастает настолько, что условие ее малости становится неприменимым. Для определения порога устойчивости структуры нематического кристалла на низких частотах приходится рассматривать амплитуды смещения, сравнимые с толщиной НЖК-слоя, а, следовательно, линеаризовать уравнения по углу  $\theta$  нельзя. Проведем полный анализ эффекта на основе нелинейных уравнений гидродинамики НЖК (1.8).

При переходе к низким частотам по-прежнему полагаем, что неустойчивость ориентационной структуры кристалла обусловлена запаздыванием скорости осциллирующих потоков в вихрях от скорости смещения граничной пластины, и рассмотрим запаздывание, обусловленное действием упругих моментов Франка в уравнениях для осциллирующих углов. Слагаемые, содержащие инерционные члены порядка  $\sigma^2 \ll 1$ , отбрасываем ввиду их малости, пренебрегая тем самым инерционными эффектами. Отбрасываем также пограничные эффекты, обусловленные ориентационными волнами вблизи границ слоя.

Проведем анализ эффекта методом возмущений, представив скорость  $v$  и угол  $\theta$  в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}' \quad \theta = \theta_1 + \theta'.$$

Здесь индекс 1 указывает на внешнее воздействие, задаваемое сдвигом граничной пластины и определяемое решением линейной системы гидродинамических уравнений, штрих — на возмущения углов поворота молекул и скорости частиц среды.

Выделим из системы (1.8), (1.9) уравнения и граничные условия для определения внешнего воздействия в виде

$$\begin{aligned} \partial_z^2 v_x &= 0, & \theta_{1,t} &= v_{1x,z}, \\ v_{1x}|_{z=0} &= 0, & v_{1x}|_{z=1/2} &= u_0 \cos t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

и линеаризованные по возмущениям уравнения для  $\vec{v}', \theta'$

$$\begin{aligned} &\partial_t \theta' + \theta'_{,x} v_{1x} - \varepsilon \Delta \theta' + 2v_{1x,z} \theta' \cos \theta_1 \sin \theta_1 - v'_{x,z} \cos^2 \theta_1 + \\ &+ v'_{z,x} \sin^2 \theta_1 - 2v'_{x,x} \sin \theta_1 \cos \theta_1 = 0; \\ &-\hat{D}v'_x + \\ &+ \varepsilon \partial_z [\partial_z^2 (\Delta \theta' \cos^2 \theta_1) + \partial_x \partial_z (2\Delta \theta' \sin \theta_1 \cos \theta_1) + \partial_x^2 (\Delta \theta' \sin^2 \theta_1)] = \\ &= v_{1x,z} [2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) - \\ &- (\cos^2 \theta_1 - 6 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 + \sin^4 \theta_1) \partial_x \partial_z^2] \theta' + \\ &+ [\sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 (\partial_z^4 - 6\partial_x^2 \partial_z^2 + \partial_x^4) - \\ &- 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \partial_x \partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2)] v'_x, \\ &div \vec{v} = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

с граничными условиями

$$v'_x = v'_z|_{z=\pm 1/2} = 0, \quad \theta'|_{z=\pm 1/2} = 0.$$

При построении уравнений для  $\vec{v}'$  и  $\theta'$  углы поворота молекул  $\theta_1$  не предполагаются малыми.

Из уравнений (1.10) определим скорость жидкости в потоке Куэтта  $v_{1x}$  и угол поворота молекул  $\theta_1$

$$v_{1x} = u_0 \left( z + \frac{1}{2} \right) \cos t, \quad \theta_1 = u_0 \sin t. \quad (1.12)$$

Представим возмущения суммой стационарных  $\theta_2$ ,  $\vec{v}_2$  и осциллирующих слагаемых:

$$\theta' = \theta_2 + \theta_c \cos t + \theta_s \sin t, \quad \vec{v}' = \vec{v}_2 + \vec{v}_c \cos t + \vec{v}_s \sin t.$$

Используя решение (1.12), выделим из системы (1.11) уравнения для стационарных возмущений

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \Delta \theta_2 &= u_0 \left( z + \frac{1}{2} \right) \theta_{c,x} - 2\mu_1 v_{2x,z} + 2(1 - \mu_1) v_{2z,x} - 2u_0 \mu_3 v_{sx,x}; \\ -Dv_{2x} + \varepsilon \partial_z [\mu_1 \partial_z^2 \Delta \theta_2 + u_0 \mu_3 \partial_z \partial_x \Delta \theta_s + (1 - \mu_1) \partial_x^2 \Delta \theta_2] &= \\ &= -\frac{1}{2} u_0 (1 - 8\mu_5 u_0^2) \partial_z^2 \partial_x \theta_c + u_0^2 \mu_2 (\partial_z^4 - 6\partial_z^2 \partial_x^2 + \partial_x^4) v_{2x} - \\ &\quad - u_0 \mu_4 \partial_z \partial_x (\partial_z^2 - \partial_x^2) v_{sx} \end{aligned} \quad (1.13)$$

с граничными условиями

$$\vec{v}_2|_{z=\pm 1/2} = 0, \quad \theta_2|_{z=\pm 1/2} = 0$$

и для осциллирующих возмущений

$$\begin{aligned} \theta_s - \varepsilon \Delta \theta_c &= -u_0 \left( z + \frac{1}{2} \theta_{2,x} \right) - u_0^2 \mu_8 \theta_s + \mu_7 v_{cx,z} - (1 - \mu_7) v_{cz,x}; \\ \theta_c + \varepsilon \Delta \theta_s &= u_0^2 \mu_8 \theta_c - (2\mu_1 - \mu_7) v_{sx,z} + (1 + \mu_7 - 2\mu_1) v_{sz,x} - 2u_0 \mu_3 v_{2x,x}; \\ \eta \sigma^2 \Delta v_{sx} - Dv_{cx} + \varepsilon \partial_z [\mu_7 \partial_z^2 \Delta \theta_c + (1 - \mu_7) \partial_x^2] &= \\ &= u_0^2 \mu_6 \partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) \theta_s - u_0 (1 - 8u_0 \mu_5) \partial_x \partial_z^2 \theta_2 + \\ &\quad + u_0^2 \mu_5 (\partial_z^4 - 6\partial_z^2 \partial_x^2 + \partial_x^4) v_{cx}; \\ -\eta \sigma^2 \Delta v_{cx} - Dv_{sx} + \varepsilon \partial_z [(2\mu_1 - \mu_7) \partial_z^2 \Delta \theta_s + 2u_0 \mu_3 \partial_x \partial_z \Delta \theta_2 + \\ &\quad + (1 + \mu_7 - 2\mu_1) \partial_x^2 \Delta \theta_s] &= u_0^2 \mu_6 \partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) \theta_c + \\ + u_0^2 (2\mu_2 - \mu_5) (\partial_z^4 - 6\partial_z^2 \partial_x^2 + \partial_x^4) v_{sx} - 2u_0 \mu_4 \partial_z \partial_x (\partial_z^2 - \partial_x^2) v_{2x} \end{aligned} \quad (1.14)$$

с граничными условиями

$$\vec{v}_c|_{z=\pm 1/2} = \vec{v}_s|_{z=\pm 1/2} = 0, \quad \theta_c|_{z=\pm 1/2} = \theta_s|_{z=\pm 1/2} = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \langle \cos^2 \theta_1 \rangle, \quad \mu_2 = \frac{1}{u_0^2} \langle \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \rangle, \\ \mu_3 &= \frac{1}{u_0} \langle 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \sin t \rangle, \\ \mu_4 &= \frac{1}{u_0} \langle 2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \sin t \rangle, \\ \mu_5 &= \frac{1}{u_0^2} \langle 2 \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \cos^2 t \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_6 &= \frac{1}{u_0} \langle 4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 (\cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1) \cos^2 t \sin t \rangle, \\ \mu_7 &= \langle 2 \cos^2 \theta_1 \cos^2 t \rangle, \\ \mu_8 &= \frac{1}{u_0} \langle 4 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \cos^2 t \sin t \rangle,\end{aligned}$$

угловые скобки означают усреднение по периоду колебаний.

Из условия существования ненулевого решения системы (1.13), (1.14) найдем амплитуду  $u_0$ . Минимизируя значения  $u_0$  по  $k$ , получим пороговую амплитуду  $u_{th}$  и одновременно волновое число доменов  $k_{th}$  на пороге эффекта. По волновому числу  $k_{th}$  определим размер доменов.

Расчет порога эффекта проведем численно, используя метод Галеркина. В силу ограниченных вычислительных ресурсов ограничимся одномоновым приближением в представлении функций углов  $\theta_2, \theta_c, \theta_s$  и скоростей  $v_{2x}, v_{cx}, v_{sx}$ . Зададим стационарные деформации структуры в виде  $\theta_2 \sim \cos kx$ . Зависимость функций  $\theta_c, \theta_s, v_{2x}, v_{cx}, v_{sx}$  от продольной координаты  $x$  в этом случае на основании уравнений (1.13), (1.14) определяется соотношениями  $\theta_c, \theta_s, v_{cx}, v_{sx} \sim \sin kx$ ;  $\theta_2, v_{2x} \sim \cos kx$ . Рассматривая стационарные искажения структуры с наименьшей упругой энергией Франка, представим угол  $\theta_2$  и скорости  $v_{2z}, v_{cx}, v_{sx}$  четной, а углы  $\theta_{c,s}, \theta_{c,s}$  и скорость  $v_{2x}$  нечетной зависимостью от координаты  $z$ :

$$\begin{aligned}\theta_2 &= a_1 u_1(z) \cos(kx), & v_{2x} &= a_2 u_2(z) \cos(kx), \\ \theta_c &= a_3 u_2(z) \sin(kx), & \theta_s &= a_4 u_2(z) \sin(kx), \\ v_{cx} &= a_5 u_3(z) \sin(kx), & v_{sx} &= a_6 u_3(z) \sin(kx).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Для базисных функций  $u_\alpha(z)$  выбрано тригонометрическое представление, отвечающее граничным условиям углов и скоростей при  $z = \pm 1/2$ :

$$u_1(z) = \cos(\pi z), \quad u_2(z) = \sin(2\pi z), \quad u_3(z) = \cos(\pi z) + 3 \cos(3\pi z).$$

Скорости  $v_{2z}, v_{cz}, v_{sz}$  определяются из условия несжимаемости нематической жидкости соотношением  $v_z = - \int_{-1/2}^z v_{x,x} dz$ .

Подставим  $\theta_2, \theta_c, \theta_s, v_{2x}, v_{cx}, v_{sx}$  из (1.15) в уравнения (1.13) и (1.14).

Выделим далее систему алгебраических уравнений для коэффициентов  $a_i$ , умножая первое уравнение в (1.13), третье и четвертое уравнения в (1.14) на  $\cos(\pi z)$ , оставшиеся уравнения – на  $\sin(2\pi z)$ , и интегрируя его по толщине слоя. Приравнявая нулю определитель системы, найдем значения пороговой амплитуды  $u_0$  как функции волнового числа  $k$ . Минимизируя  $u_0$  по  $k$ , определим пороговые параметры эффекта. Численный расчет проведем для нематического жидкого кристалла с параметрами МБА:  $\rho = 1.088 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ ,  $\gamma = 0.78 \text{ пуаз}$ ,  $\alpha_4 = 0.84 \text{ пуаз}$ ,  $\alpha_5 = 0.46 \text{ пуаз}$ ,  $K_{33} = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ дин}$ .

## 2. Результаты и их обсуждение

Результаты расчета демонстрируют образование в слое нематического кристалла пространственно модулированной структуры с шириной полос  $d \approx 0.8h$ , не зависящей от частоты воздействия. Безразмерная пороговая амплитуды сдвига  $u_{th}$  также не зависит от частоты внешнего воздействия и от толщины слоя и равна  $u_{th} \approx 0.68$ .



В отличие от рассмотренных ранее механизмов формирования доменной структуры в НЖК-слое на высоких частотах [20], в уравнениях для осциллирующих углов  $\theta_c$  и  $\theta_s$  в системе (1.14) учтены упругие моменты Франка. Именно эти моменты в приведенном расчете определяют запаздывание вихревых потоков и осциллирующих углов от внешнего воздействия, и в конечном итоге именно они отвечают за образование доменной структуры на низких частотах. При отбрасывании упругих моментов Франка в уравнениях для осциллирующих углов (1.14) расчет не приводит к появлению ни пространственно-периодических, ни однородных стационарных искажений структура.

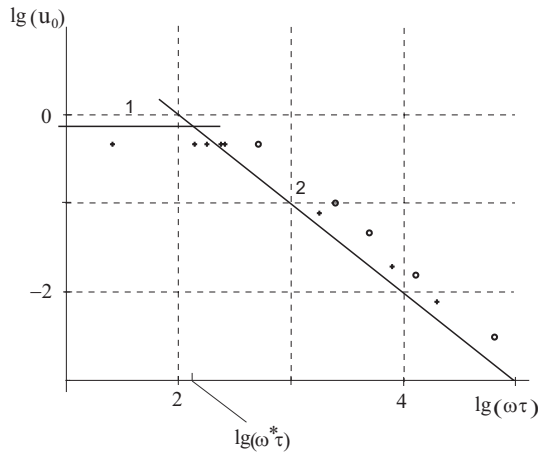


Рис. 2. Зависимость пороговой амплитуды  $u_{th}$  от скейлингового параметра  $\omega\tau$ . Экспериментальные данные  $h = 20$  мк (+),  $h = 100$  (o) мк [1; 2]

Для оценки точности расчета нами проведен двухмодовый анализ эффекта для ряда частот в диапазоне значений  $30 < \omega\tau < 100$ . Уточненное значение пороговой амплитуды при этом несколько уменьшается и равно  $u_{th} \approx 0.66$ . Отличие этих значений ( $\sim 1\%$ ) может характеризовать точность численного определения порога эффекта в одномодовом приближении.

Теоретические значения пороговой амплитуды  $u_0$  как функции логарифма  $\omega\tau$  приведены на рис. 2. Расчету для низких частот соответствует прямая 1. Результатам расчета, проведенным ранее для инерционного механизма [12], соответствует кривая 2. Там же нанесены данные эксперимента [1; 2]. Рисунок демонстрирует близость теоретических и экспериментальных результатов. Отметим, что перегиб в частотной зависимости  $u_0 = u_0(\omega\tau)$  при понижении частоты соответствует переходу от инерционного механизма образования доменов к нелинейному. Теоретическое и экспериментальное значения частоты перехода  $\omega^*$  также близки  $\omega_{theor}^* \approx 0.4 \omega_{exp}^*$ .

## Литература

- [1] Белова Г.Н., Ремизова Е.И. Акустооптический эффект в неориентированном слое нематического жидкого кристалла при его периодической сдвиговой деформации // Кристаллография. 1986. Т. 31. Вып. 3. С. 517–521.

- [2] Белова Г.Н., Ремизова Е.И. Особенности акустооптического взаимодействия в гомеотропно ориентированном слое нематического жидкого кристалла при его периодической сдвиговой деформации // Акуст. журн. 1985. Т. 31. Вып. 3. С. 289–295.
- [3] Белова Г.Н., Ремизова Е.И. Влияние поперечного электрического поля на акустооптический эффект в ориентированном слое нематического жидкого кристалла // Кристаллография. 1985. Т. 30. Вып. 2. С. 343–348.
- [4] Baimakova O.A., Scaldin O.A., Chuvyrov A.N. The orientational instability of nematic layer under oscillatory shear // Mol. Liq. Cryst. 1995. Vol. 265. P. 199–314.
- [5] Hogan S.J., Mullin T., Woodford P. Rectilinear low-frequency shear of homeotropically aligned nematic liquid crystals // Proc. Roy. Soc. Lond. 1993. V. 441. P. 559–573.
- [6] Krehov A.P., Kramer L. Flow-alignment instability and slow director oscillations in nematic liquid crystals under oscillatory flow // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4925–4932.
- [7] Анিকেев Д.Н., Капустина О.А. Особенности модулированных структур в жидких кристаллах, индуцированных воздействием звука // ЖЭТФ. 1996. Т. 110. Вып. 4(10). С. 1328–1338.
- [8] Тарасов О.С., Крехов А.П. Нематический жидкий кристалл в осциллирующем пуазейлевском потоке // Кристаллография. 1998. Т. 43. Вып. 3. С. 516–523.
- [9] Кожевников Е.Н. Доменная структура в планарном слое нематического жидкого кристалла в осциллирующем потоке Куэтта // Кристаллография. 2006. Т. 51. № 4. С. 717–724.
- [10] Кожевников Е.Н. Доменная структура в слое нематического жидкого кристалла в осциллирующем потоке Пуазейля // Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 4. С. 548–556.
- [11] Чабан И.А. Виброгидродинамическая неустойчивость жидких кристаллов на низких частотах // Акуст. журн. 1985. Т. 31. С. 132.
- [12] Kozhevnikov E.N. Domain structure in a normally oriented liquid crystal layer under action of low-frequency shear // Sov. Phys. JETP. 1986. Vol. 64. № 5. P. 793–796.
- [13] Кожевников Е.Н. Доменная структура в слое нематического жидкого кристалла в низкочастотном потоке Куэтта // Кристаллография. 2004. Т. 50. № 5 С. 908–914.
- [14] Krehov A.P., Börsönyi T., Tóth P., Buka Á., Kramer L. Nematic liquid crystals under oscillatory shear flow // Phys. Rep. 2000. Vol. 337. P. 171.
- [15] Де Жен П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 399 с.
- [16] Stephen M.J, Straley J.P. Physics of liquid crystals // Reviews of Modern Physics. 1974. Vol. 46. P. 617–703.
- [17] Капустина О.А., Кожевников Е.Н., Яковенко Г.Н. Оптические свойства гомеотропно ориентированного слоя нематического кристалла при эллиптической деформации // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. Вып. 3(9). С. 849–858.
- [18] Кожевников Е.Н., Кучеренко Я.В. Оптические свойства нематического жидкого кристалла при воздействии периодического сдвига и сжатия // Кристаллография. 2008. Т. 53. № 4. С. 725–732.
- [19] Кожевников Е.Н., Кучеренко Я.В. Оптические свойства жидкокристаллической ячейки при бинарном воздействии периодического сдвига и сжатия // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 10. С. 95–101.

- [20] Кожевников Е.Н. Доменная структура в слое нематического жидкого кристалла в осциллирующем потоке Куэтта // Вестник Пермского университета. 2002. Вып. 1. С. 63–70.

Поступила в редакцию 22/II/2012;  
в окончательном варианте — 22/II/2012.

## SPATIALLY MODULATED STRUCTURES IN NEMATIC LIQUID CRYSTAL UNDER OSCILLATORY COUETTE FLOW AT ULTRALOW FREQUENCIES

© 2012 E.N. Kozhevnikov<sup>3</sup> Y.V. Samoilova<sup>4</sup>

The distortion of homeotropic structure of nematic liquid crystal under the influence of periodic shear at ultralow frequencies is theoretically described. It is shown that periodic shear action results in spatially modulated structure in NLC layer. Threshold shear amplitude and spacial periodicity of new molecular orientational structure are found on the base of nonlinear nematic liquid crystal hydrodynamic equations using Galerkin method. Theoretical analysis shows that at low frequencies threshold shear amplitude does not depend on frequency and the spatial period of the order of NLC layer thickness. Theoretical results are compared with experimental data.

**Key words:** nematic liquid crystal, periodic shear, spatially modulated structure, threshold amplitude.

Paper received 22/II/2012.  
Paper accepted 22/II/2012.

---

<sup>3</sup>Kozhevnikov Evgeniy Nikolaevich ([kozhev@samsu.samara.ru](mailto:kozhev@samsu.samara.ru)), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.

<sup>4</sup>Samoilova Yana Viktorovna ([yana20002@yandex.ru](mailto:yana20002@yandex.ru)), the Dept. of Mathematics and Business Informatics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.