УДК 517.958:532.546

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЯРКО ВЫРАЖЕННОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАРЕНБЛАТТА–ЖЕЛТОВА–КОЧИНОЙ

© 2012 Х.Г. Умаров[1]

Для модельного представления Баренблатта–Желтова–Кочиной фильтрации жидкости в трещиновато-пористой породе найден явный вид решения смешанной задачи в анизотропном полупространстве с ярко выраженной вертикальной проницаемостью сведением рассматриваемой задачи фильтрации к исследованию абстрактной начально-краевой задачи в банаховом пространстве.

Ключевые слова: фильтрация жидкости в трещиновато-пористой породе, сильно непрерывные полугруппы операторов.

Введение

Наиболее широкое применение из всего многообразия гидродинамических моделей фильтрации жидких и газообразных углеводородов в трещиновато-пористых пластах получило модельное представление Баренблатта–Желтова–Кочиной, в которой описание течения в трещиновато-пористой породе производится методами механики сплошной среды. Под значениями всех величин в точке понимаются средние значения по объемам, содержащим данную точку, размеры которых велики по сравнению с размерами отдельного блока, т. е. за элемент пласта принимается объем, содержащий большое количество блоков, и усреднение фильтрационных характеристик проводится в пределах этого элемента. Трещиновато-пористый пласт рассматривают как совмещение двух пористых сред с порами разных масштабов: среда 1 — укрупненная среда, в которой роль зерен играют пористые блоки, которые рассматриваются как непроницаемые, а роль поровых каналов — трещины, давление в этой среде p_1; среда 2 — система пористых блоков, состоящая из зерен, разделенных мелкими порами, давление в ней p_2. Таким образом, вместо одного давления жидкости в данной точке пласта рассматривается два — давление в трещинах p_1 и давление в порах блоков p_2 [1–3].

Основные положения и уравнения теории нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых пластах сформулированы в работе Г.И. Баренблатта, Ю.П. Желтова и И.Н. Кочиной [4], а затем развиты многими авторами [1–3]. Исследование

[1]Умаров Хасан Галсанович (umarov50@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений Чеченского государственного университета, 364037, Российская Федерация, г. Грозный, ул. Шерипова, 32.

течения однородной слабосжимаемой жидкости в таких средах приводит [2, с. 108] к системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ij}\frac{\partial p_1}{\partial x_i}\right) + a\,(p_2 - p_1) = 0, \\ b\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial (p_2-p_1)}{\partial t} + c\,(p_2 - p_1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c — положительные постоянные, зависящие от геометрических характеристик пласта и свойств фильтрующейся жидкости; k_{ij} — тензор проницаемости, определяемый структурой системы трещин; $p_i = p_i\,(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2$ — искомые давления в трещинах и пористых блоках соответственно.

Одним из основных параметров пласта, влияющих на фильтрацию, является проницаемость. Для нефтяных пластов-коллекторов часто характерна анизотропия, связанная либо с естественной слоистостью осадочных пород, либо с развитой системой параллельных микротрещин, вызванных напряжениями в горной породе. Так, например, в грозненских нижнемеловых залежах отмечается ярко выраженное вертикальное направление трещиноватости, которое порождает значительную неоднородность пласта по проницаемости [5, с. 201]. Для таких анизотропных залежей

$$k_{11} = k_{22} = k_0 \ll k = k_{33}, \quad k_{ij} = 0, \quad k_{ij} = 0, \tag{2}$$

поэтому фильтрационный поток в основном осуществляется "снизу–вверх" [5, с. 85].

В системе дифференциальных уравнений в частных производных перейдем к традиционным обозначениям $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, тогда, в случае анизотропного пласта (2), система (1) перепишется в виде:

$$\begin{cases} k_0 \triangle_{x,y} p_1 + k\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} + a\,(p_2 - p_1) = 0, \\ b\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial (p_2-p_1)}{\partial t} + c\,(p_2 - p_1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\triangle_{x,y} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — дифференциальный оператор Лапласа по переменным x, y. Дифференцируя по временной переменной t обе части первого уравнения из системы (3), исключая из полученного уравнения и второго из уравнений (3) производную $\partial\,(p_2 - p_1)/\partial t$ и затем исключая из уравнений полученной системы разность давлений $p_2 - p_1$, приходим к системе дифференциальных уравнений в частных производных для определения в анизотропном коллекторе (2) давлений в трещинах и пористых блоках соответственно

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{k_0}{ab}\frac{\partial \triangle_{x,y} p_1}{\partial t} - \frac{k}{ab}\frac{\partial^3 p_1}{\partial z^2 \partial t} = \frac{ck_0}{ab}\triangle_{x,y} p_1 + \frac{ck}{ab}\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}, \\ p_2 = p_1 - \frac{k_0}{ac}\triangle_{x,y} p_1 - \frac{k}{a}\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Таким образом, давление в трещинах анизотропного пласта (2) находится из уравнения

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \omega_0 \frac{\partial \triangle_{x,y} p_1}{\partial t} - \omega \frac{\partial^3 p_1}{\partial z^2 \partial t} = \chi_0 \triangle_{x,y} p_1 + \chi \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}, \tag{4}$$

где $\omega_0 = k_0/(ab)$, $\omega = k/(ab)$, $\chi_0 = ck_0/(ab)$, $\chi = ck/(ab)$.

Пренебрегая в уравнении (4) изменением по времени фильтрационного потока в "горизонтальном" направлении, из (4) выводим уравнение для определения давления в трещинах анизотропного коллектора (2)

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \omega \frac{\partial^3 p_1}{\partial z^2 \partial t} - \chi \frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} = \chi_0 \triangle_{x,y} p_1. \tag{5}$$

В анизотропном трещиновато-пористом коллекторе (2) исследуем фильтрационный поток вблизи одной стороны вертикального сечения пласта (например, плоскостью тектонического нарушения — непроницаемым сбросом) в течение достаточно малого промежутка времени, так что влияние других границ, составленных из охватывающих залежь непроницаемых горных пород, еще не сказалось или же несущественно. Тогда искомое распределение давления $p_1 = p_1(x,y,z,t) \overset{\text{def}}{=} u(x,y,z,t)$ в коллекторе-полупространстве $\overline{R}^3_{2+} = \{(x,y,z) : y \geqslant 0\}$ будет определяться начальным значением давления в момент $t = 0$ вскрытия залежи и запуска времени фильтрации:

$$p_1|_{t=0} = u|_{t=0} = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \overline{R}^3_{2+} \tag{6}$$

и краевым условием на границе пласта $y = 0$:

$$p_1|_{y=0} = u|_{y=0} = \mu(x,z,t), \quad (x,z) \in R^2, \quad t \in [0,T[, \tag{7}$$

где число T ограничивает временной промежуток рассмотрения процесса фильтрации. Начальное данное и краевое условие согласованы между собой: $\varphi(x,0,z) = \mu(x,z,0)$, $(x,z) \in R^2$.

Решением смешанной задачи Коши (5)–(7) будем называть функцию $u = u(x,y,z,t)$, непрерывную при $(x,y,z) \in \overline{R}^3_{2+}$, $t \in [0,T[$, для которой входящие в уравнение частные и смешанные производные непрерывны в области $(x,y,z) \in R^3_{2+} = \{(x,y,z) : y > 0\}$, $t \in]0,T[$; $u(x,y,z,t)$ удовлетворяет уравнению (5) при $(x,y,z) \in R^3_{2+}$, $t \in]0,T[$, и для нее выполнены условия (6) и (7).

Функции $\varphi(x,y,z)$, $\mu(x,z,t)$ и $u(x,y,z,t)$ для всех значений "параметров" (x,y,t): $(x,y) \in \overline{R}^2_+ = \{(x,y) : y \geqslant 0\}$, $t \in [0,T[$, по "пространственной" переменной $z \in R^1$ будем предполагать принадлежащими банахову пространству $C[-\infty,+\infty]$ непрерывных функций $f(z)$, для которых существуют пределы при $z \to \pm\infty$: $\|f(z)\|_{C[-\infty,+\infty]} = \sup_{z\in R^1} |f(z)|$.

В пространстве $C[-\infty,+\infty]$ оператор d^2/dz^2 с областью определения $\mathcal{D}\left(d^2/dz^2\right) = \left\{f(z) \in C[-\infty,+\infty] : f'(z), f''(z) \in C[-\infty,+\infty]\right\}$ является [6, с. 681; 7, с. 58] производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U\left(t; d^2/dz^2\right)$ класса C_0, представляющейся так называемым сингулярным интегралом Гаусса–Вейерштрасса

$$U\left(t; \frac{d^2}{dz^2}\right) f(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(z-\zeta)^2}{4t}\right) f(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\zeta^2\right) f\left(z + 2\zeta\sqrt{t}\right) d\zeta. \tag{8}$$

Положительная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора d^2/dz^2, и для резольвенты $\left(\lambda I - d^2/dz^2\right)^{-1}$, $\lambda > 0$, где I — тождественный оператор, справедливы [6, с. 664, 681–682] оценка

$$\left\| \left(\lambda I - \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-1} f(z) \right\|_{C[-\infty,+\infty]} \leqslant \frac{1}{\lambda} \|f(z)\|_{C[-\infty,+\infty]} \tag{9}$$

и представление степеней $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\left(\lambda I - \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-n} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, t^{n-1} U\left(t; \frac{d^2}{dz^2}\right) f(z)\, dt. \tag{10}$$

Введем в рассмотрение два оператора

$$B = \frac{1}{\chi_0} I - \frac{\omega}{\chi_0} \frac{d^2}{dz^2}, \qquad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}\left(\frac{d^2}{dz^2}\right)$$

и

$$A = \frac{\chi}{\omega}\left[I - \left(I - \omega \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-1}\right], \qquad \mathcal{D}(A) = C\left[-\infty, +\infty\right].$$

Оператор $-B$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0:

$$U(t; -B) f(z) = \exp\left(-\frac{t}{\chi_0}\right) U\left(\frac{\omega}{\chi_0} t; \frac{d^2}{dz^2}\right) f(z) =$$

$$= \sqrt{\frac{\chi_0}{4\pi\omega t}} \exp\left(-\frac{t}{\chi_0}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\chi_0 \frac{(z-\zeta)^2}{4\omega t}\right) f(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t}{\chi_0}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\zeta^2\right) f\left(z + 2\zeta\sqrt{\frac{\omega}{\chi_0} t}\right) d\zeta \tag{11}$$

с отрицательным типом:

$$\left\| U(t; -B) \right\| \leqslant \exp\left(-\frac{t}{\chi_0}\right), t \geqslant 0.$$

Ограниченный оператор $-A$ порождает сжимающую сильно непрерывную полугруппу класса C_0. Действительно, так как

$$U(t; -A) f(z) = \exp\left(-\frac{\chi}{\omega} t\right) U\left(\frac{\chi}{\omega} t; \left(I - \omega \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-1}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\chi}{\omega} t\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m \chi^m}{m! \omega^m} \left(I - \omega \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-m},$$

то, используя оценку (9) резольвенты, получим

$$\left\| U(t; -A) \right\| \leqslant \exp\left(-\frac{\chi}{\omega} t\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m \chi^m}{m! \omega^m} \left\| \left(I - \omega \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-1} \right\|^m =$$

$$= \exp\left(-\frac{\chi}{\omega} t + \frac{\chi}{\omega} t \left\| \left(I - \omega \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-1} \right\| \right) < 1.$$

Далее для полугруппы $U(t; -A)$ справедливо представление через полугруппу Гаусса–Вейерштрасса:

$$U(t; -A) f(z) = \exp\left(-\frac{\chi}{\omega} t\right) \left[f(z) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{t^m \chi^m}{m! \omega^m} \left(I - \frac{d^2}{dz^2}\right)^{-m} f(z)\right],$$

используя формулу для степеней резольвенты (10), отсюда выводим

$$U(t; -A) f(z) = \exp\left(-\frac{\chi}{\omega} t\right) \times$$

$$\times \left[f(z) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{t^m \chi^m}{(m-1)! m! \omega^m} \int_0^{+\infty} \exp(-s)\, s^{m-1} U\left(s\omega; \frac{d^2}{dz^2}\right) f(z)\, dt\right]$$

или

$$U\left(t;-A\right)f\left(z\right)=\exp\left(-\frac{\chi}{\omega}t\right)\times$$

$$\times\left[f\left(z\right)+\sqrt{\frac{\chi}{\omega}t}\int_{0}^{+\infty}\exp\left(-s\right)I_{1}\left(2\sqrt{\frac{\chi}{\omega}ts}\right)U\left(s\omega;\frac{d^{2}}{dz^{2}}\right)f\left(z\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\right],\qquad(12)$$

где

$$\mathrm{I}_{1}\left(s\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(s/2\right)^{2k+1}}{k!\left(k+1\right)!}$$

есть модифицированная функция Бесселя.

Из представлений (11), (12) следует перестановочность полугрупп $U\left(\cdot;-B\right)$ и $U\left(\cdot;-A\right)$.

Используя операторы B, A, уравнение (5) фильтрации в анизотропной среде (2):

$$\left(I-\omega\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial t}-\chi\left(I-\omega\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}\right)^{-1}\frac{\partial^{2}u}{\partial z^{2}}\right]=\chi_{0}\triangle_{x,y}u,$$

можно переписать в абстрактной форме

$$B\left(u_{t}+Au\right)=u_{xx}+u_{yy},\quad\left(x,y\right)\in R_{+}^{2}=\left\{\left(x,y\right):y>0\right\},\quad t\in\left[0,T\right].\qquad(13)$$

Таким образом, рассматриваемая задача фильтрации может быть сведена к решению начально-краевой задачи (6)–(7) для дифференциального уравнения (13) в банаховом пространстве $C\left[-\infty,+\infty\right]$.

В последующих разделах статьи решается начально-краевая задача для дифференциального уравнения, обобщающего (13) в произвольном банаховом пространстве. Затем, конкретизируя банахово пространство и действующие в нем операторы-коэффициенты уравнения, из решения u абстрактной смешанной задачи и оценки нормы $\|u\|$ получаются решение p_1 рассматриваемой анизотропной задачи фильтрации и его оценка.

1. Постановка абстрактной краевой задачи

В банаховом пространстве E рассмотрим однородное дифференциальное уравнение с постоянными операторными коэффициентами[2]

$$B\left(u_{t}+Au\right)=\triangle_{x,y}u,\quad\left(x,y\right)\in R_{+}^{2},\quad t\in\left]0,T\right[,\qquad(14)$$

где операторы $-B$, $-A$ являются производящими операторами коммутирующих сильно непрерывных полугрупп класса C_0, причем тип полугруппы $U\left(\cdot;-B\right)$ отрицательный:

$$\|U\left(t;-B\right)\|\leqslant M\exp\left(-\beta t\right),\quad\beta>0;\qquad\|U\left(t;-A\right)\|\leqslant N\exp\left(\alpha t\right),\quad t\geqslant0.$$

Решение уравнения (14) ищется непрерывным при $(x,y,t)\in\overline{R}_{+}^{2}\times[0,T[$ и непрерывно дифференцируемым при $(x,y,t)\in R_{+}^{2}\times]0,T[$ по переменной t один раз, а по переменным x,y два раза. Кроме того, предполагается, что значения решения u принадлежат области определения $\mathcal{D}\left(A\right)$ оператора A, причем функция u_t+Au принимает значения из $\mathcal{D}\left(B\right)$.

[2]Неоднородное уравнение рассмотрено в [8].

Под смешанной краевой задачей для уравнения (14) будем понимать, как и в классическом случае, задачу нахождения решения, удовлетворяющего соответственно начальному и граничному условиям:

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{R}^2_+, \tag{15}$$

$$u|_{y=0} = \mu(x,t), \quad x \in R^1, \quad t \in [0,T[\,, \tag{16}$$

где $\varphi(x,y)$, $\mu(x,t)$ — заданные функции со значениями в банаховом пространстве E, для которых выполнено естественное условие согласования: $\varphi(x,0) = \mu(x,0)$.

2. Фундаментальное оператор-решение

Фундаментальным оператор-решением дифференциального уравнения (14) назовем операторнозначную функцию (определенную для (ξ,η), $(x,y) \in \overline{R}^2_+$; $0 < \tau < t$)

$$G(\xi,\eta,\tau;x,y,t) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} U(t-\tau;-A)\, U\left(\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)};-B\right) \times$$
$$\times \left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right] B =$$
$$= \frac{1}{4\pi(t-\tau)} U(t-\tau;-A) \times$$
$$\times U\left(\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\left[\mathrm{I} - U\left(\frac{y\eta}{t-\tau};-B\right)\right] B. \tag{17}$$

Непосредственно из определения следует:
(1^0) если e — элемент множества $\mathcal{D}(B)$, то справедлива оценка нормы

$$\|G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\, e\| \leqslant \frac{MN\,\|Be\|}{4\pi(t-\tau)} \times$$
$$\times \left[1 + M\exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t-\tau}\right)\right] \exp\left[\alpha(t-\tau) - \beta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right]; \tag{18}$$

(2^0) $G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\, e \to 0$ при $e \in \mathcal{D}(B)$, $\tau \neq t$ и y или $\eta \to 0$;
(3^0) $G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\, e \to 0$ при $e \in \mathcal{D}(B)$, $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ и $\tau \to t-0$;
(4^0) если e — элемент множества $\mathcal{D}(B^2)$, то имеет место представление

$$G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\, e = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} U(t-\tau;-A) \times$$
$$\times U\left(\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right) \int_0^{y\eta/(t-\tau)} U(s;-B)\, B^2 e\, ds$$

и оценка нормы

$$\|G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\, e\| \leqslant \frac{MN\,\|B^2 e\|}{4\pi\beta(t-\tau)} \times$$
$$\times \left[1 - \exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t-\tau}\right)\right] \exp\left[\alpha(t-\tau) - \beta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right]; \tag{19}$$

(5^0) если e — элемент множества

$$\tilde{E} = \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(BA) \cap \mathcal{D}\left(B^3\right),$$

то функция $g = G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\,e$, (ξ,η), $(x,y) \in \overline{R}^2_+$; $0 < \tau < t$, по переменным (ξ,η,τ) удовлетворяет уравнению

$$B(g_\tau - Ag) + \triangle_{\xi,\eta} g = 0, \quad (\xi,\eta), (x,y) \in R^2_+; \tau < t, \tag{20}$$

в котором $\triangle_{\xi,\eta} = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2$, а по переменным (x,y) — уравнению (14). При этом для норм частных производных функции g справедливы оценки

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \xi}\right\| \leqslant \frac{|x-\xi|\,MN\left\|B^2 e\right\|}{8\pi(t-\tau)^2} \times$$
$$\times \left[1 + M\exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t-\tau}\right)\right]\exp\left[\alpha(t-\tau) - \beta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right] \tag{21}$$

и

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \eta}\right\| \leqslant \frac{MN\left\|B^2 e\right\|}{8\pi(t-\tau)}\left[|y-\eta| + M|y+\eta|\exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t-\tau}\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left[\alpha(t-\tau) - \beta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right]. \tag{22}$$

(6^0) пусть $e \in \mathcal{D}(B)$, тогда справедлива формула (при $(x,y) \in R^2_+$, $\tau < t$)

$$\iint_{R^2_+} G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\,e d\xi d\eta =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} U(t-\tau;-A)\int_0^{y^2/[4(t-\tau)]} U(s;-B)\,B^{1/2} e\frac{ds}{\sqrt{s}}, \tag{23}$$

где положительная дробная степень оператора B, т. е. оператор B^ν, $0 < \nu < 1$, определяется по формуле [9, с. 358]

$$B^\nu e = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^{+\infty} s^{-\nu-1}\left[U(s;-B)\,e - e\right] ds, \;\; 0 < \nu < 1, \; e \in \mathcal{D}(B), \tag{24}$$

и является обратным оператором к отрицательной дробной степени оператора B, которая в этом случае может быть определена [10, с. 150] по формуле

$$B^{-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{+\infty} s^{\nu-1} U(s;-B)\,ds, \;\; \nu > 0; \tag{25}$$

(7^0) для $(x,y,t) \in R^2_+ \times]0,T[$ и для любого элемента e из банахова пространства E формула (23) допускает обобщение

$$B\iint_{R^2_+} G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\,B^{-1} e d\xi d\eta =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} U(t-\tau;-A)\,B^{1/2}\int_0^{y^2/[4(t-\tau)]} U(s;-B)\,e\frac{ds}{\sqrt{s}}. \tag{26}$$

Из равенства (26) следует предельное соотношение

$$\lim_{\tau\to t-0} B\iint_{R^2_+} G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\,B^{-1} e d\xi d\eta = e \tag{27}$$

для произвольного элемента e из банахова пространства E.

3. Теоремы существования и единственности решения абстрактной смешанной задачи

Сначала рассмотрим теорему единственности:

Теорема 1. Пусть решение $u(x,y,t)$ краевой задачи (14)–(16) удовлетворяет условиям

$$\|u(x,y,t)\| \leqslant \lambda_0(t)\exp\left[q\left(x^2+y^2\right)\right],$$

$$\|u_x(x,y,t)\| \leqslant \frac{\lambda_1(t)}{\sqrt{t}}\exp\left[q\left(x^2+y^2\right)\right]+\frac{\theta_1(t)}{y}\exp\left(qx^2\right),$$

$$\|u_y(x,y,t)\| \leqslant \frac{\lambda_2(t)}{\sqrt{t}}\exp\left[q\left(x^2+y^2\right)\right]+\frac{\theta_2(t)}{y^\delta}\exp\left(qx^2\right),$$

$$(x,y,t)\in R_+^2\times]0,T[,\quad \frac{1}{2}<\delta<1,\quad 0\leqslant q<\frac{\beta}{4T}, \tag{28}$$

в которых $\lambda_0(t)$, $\lambda_i(t)$, $\theta_i(t)$, $i=1,2$, $t\in[0,T[$ — непрерывные функции, тогда в каждой точке $(x,y,t)\in R_+^2\times]0,T[$ имеет место формула

$$u(x,y,t)=\frac{1}{4\pi t}U(t;-A)\times$$

$$\times B\iint_{R_+^2}U\left(\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t};-B\right)\left[\mathrm{I}-U\left(\frac{y\eta}{t};-B\right)\right]\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta+$$

$$+\frac{y}{4\pi}B\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4(t-\tau)};-B\right)\mu(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть (x,y,t) — произвольная фиксированная точка из множества $R_+^2\times]0,T[$ в трехмерном пространстве переменных (ξ,η,τ). Внутри этого множества выделим параллелепипед $\{(\xi,\eta,\tau): -s\leqslant\xi\leqslant s;\ 1/s\leqslant\eta\leqslant s;\ 1/s\leqslant\tau\leqslant t-1/s\}$ и, предполагая, что $s>\sqrt{x^2+y^2}$, рассмотрим в нем тождество

$$G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\,B^{-2}\left\{\triangle_{\xi,\eta}u(\xi,\eta,\tau)-B\left[u_\tau(\xi,\eta,\tau)+Au(\xi,\eta,\tau)\right]\right\}-$$

$$-\left\{\triangle_{\xi,\eta}G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)+B\left[G_\tau(\xi,\eta,\tau;x,y,t)-AG(\xi,\eta,\tau;x,y,t)\right]\right\}\times$$

$$\times B^{-2}u(\xi,\eta,\tau)=0, \tag{30}$$

где $G(\xi,\eta,\tau;x,y,t)$ — фундаментальное оператор-решение (17).

Проинтегрируем обе части тождества (30) по выделенному параллелепипеду, предварительно представив левую часть (30) в виде дивергенции, тогда получим

$$\int_{1/s}^{t-1/s}d\tau\left\{\int_{1/s}^{s}\times\right.$$

$$\times\left\{\left[G_\xi(s,\eta,\tau;x,y,t)\,B^{-2}u(s,\eta,\tau)-G_\xi(-s,\eta,\tau;x,y,t)\,B^{-2}u(-s,\eta,\tau)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[G(s,\eta,\tau;x,y,t)\,B^{-2}u_\xi(s,\eta,\tau)-G(-s,\eta,\tau;x,y,t)\,B^{-2}u_\xi(-s,\eta,\tau)\right]\right\}d\eta+$$

$$\left.+\int_{-s}^{s}\left[G_\eta(\xi,s,\tau;x,y,t)\,B^{-2}u(\xi,s,\tau)-G(\xi,s,\tau;x,y,t)\,B^{-2}u_\eta(\xi,s,\tau)\right]d\xi\right\}+$$

$$+\int_{1/s}^{t-1/s} d\tau \int_{-s}^{s} G\left(\xi,\frac{1}{s},\tau;x,y,t\right) B^{-2}u_\eta\left(\xi,\frac{1}{s},\tau\right) d\xi-$$

$$-\int_{1/s}^{t-1/s} d\tau \int_{-s}^{s} G_\eta\left(\xi,\frac{1}{s},\tau;x,y,t\right) B^{-2}u\left(\xi,\frac{1}{s},\tau\right) d\xi-$$

$$-\int_{-s}^{s} d\xi \int_{1/s}^{s} G\left(\xi,\eta,\frac{1}{s};x,y,t\right) B^{-1}u\left(\xi,\eta,\frac{1}{s}\right) d\eta+$$

$$+\int_{-s}^{s} d\xi \int_{1/s}^{s} G\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s};x,y,t\right) B^{-1}u\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s}\right) d\eta=0. \tag{31}$$

Используя неравенства (18), (19), (21), (22) и (28), оценим нормы первого и второго интегралов из левой части (31), обозначив их J_1 и J_2 соответственно:

I) $$\|\{J_1\| \leqslant \frac{MN}{4\pi}\int_{1/s}^{t-1/s} \exp\left[\alpha\left(t-\tau\right)\right]\left\{\int_{1/s}^{s}\left\{\frac{1+M}{2\left(t-\tau\right)}\lambda_0\left(\tau\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left[|x-s|\exp\left(qs^2-\beta\frac{\left(x-s\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)+|x+s|\exp\left(qs^2-\beta\frac{\left(x+s\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\right]\times$$

$$\times\exp\left(q\eta^2-\beta\frac{\left(y-\eta\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)+\frac{1}{\beta}\left[\frac{\lambda_1\left(\tau\right)}{\sqrt{\tau}}\exp\left(q\eta^2\right)+\frac{\theta_1\left(\tau\right)}{\eta}\right]\times$$

$$\times\left[\exp\left(qs^2-\beta\frac{\left(x-s\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)+\exp\left(qs^2-\beta\frac{\left(x+s\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\right]\exp\left(-\beta\frac{\left(y-\eta\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\Bigg\}d\eta+$$

$$+\left\{\int_{-s}^{s}\left\{\frac{|y-s|+|y+s|\,M}{2\left(t-\tau\right)}\lambda_0\left(\tau\right)\exp\left(q\left(\xi^2+s^2\right)-\beta\frac{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-s\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta}\exp\left(q\xi^2-\beta\frac{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-s\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\left[\frac{\lambda_2\left(\tau\right)}{\sqrt{\tau}}\exp\left(qs^2\right)+\frac{\theta_2\left(\tau\right)}{s^\delta}\right]\right\}d\xi\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

В силу неравенств $1/s\leqslant t-\tau\leqslant t$, $|x\pm s|\leqslant 2s$, $|y\pm s|\leqslant 2s$ и

$$\exp\left(qs^2-\beta\frac{\left(x\pm s\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{\left(s\sigma-\beta\,|x|/\sigma\right)^2}{4t}+\frac{q\beta x^2}{\sigma^2}\right),$$

$$\exp\left(q\eta^2-\beta\frac{\left(x-\eta\right)^2}{4\left(t-\tau\right)}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{\left(\eta\sigma-\beta y/\sigma\right)^2}{4t}+\frac{q\beta y^2}{\sigma^2}\right),$$

в которых $\sigma=\sqrt{\beta-4qt}$, имеем

$$\|J_1\|\leqslant\frac{MN}{2\pi}\exp\left(\frac{q\beta\left(x^2+y^2\right)}{\sigma^2}\right)\left\{s^4\exp\left(-\frac{\left(s\sigma-\beta\,|x|/\sigma\right)^2}{4t}\right)\times\right.$$

$$\times\int_0^t\left\{\left(1+M\right)\lambda_0\left(\tau\right)+\frac{1}{s\beta}\left[\theta_1\left(\tau\right)+\frac{\lambda_1\left(\tau\right)}{s\sqrt{\tau}}\right]\right\}\exp\left[\alpha\left(t-\tau\right)\right]d\tau+$$

$$+s^3 \exp\left(-\frac{(s\sigma-\beta y/\sigma)^2}{4t}\right)\times$$

$$\times\int_0^t \left\{\frac{1+M}{2}\lambda_0(\tau)+\frac{1}{s^2\beta}\left[\frac{\theta_2(\tau)}{s^\delta}+\frac{\lambda_2(\tau)}{\sqrt{\tau}}\right]\right\}\exp\left[\alpha(t-\tau)\right]d\tau\right\}.$$

II) $\|J_2\|\leqslant$

$$\leqslant\frac{MN}{4\beta\pi}\int_{1/s}^{t-1/s}\exp\left(\alpha(t-\tau)-\beta\frac{(y-1/s)^2}{4(t-\tau)}\right)\left[1-\exp\left(-\frac{\beta y}{s(t-\tau)}\right)\right]\times$$

$$\times\left[s^\delta\theta_2(\tau)+\frac{\lambda_2(\tau)}{\sqrt{\tau}}\exp\left(-\frac{q}{s^2}\right)\right]\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{-s}^{s}\exp\left(q\xi^2-\beta\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi.$$

Используя неравенство $1-\exp\left(-\beta y/(s(t-\tau))\right)\leqslant\beta y/(s(t-\tau))$ и заменяя переменную интегрирования $\xi=x+2\xi_1\sqrt{t-\tau}$, выводим

$$\|J_2\|\leqslant\frac{yMN}{2\pi s^{1-\delta}}\exp\left(\frac{4q^2tx^2}{\sigma^2}\right)\times$$

$$\times\max_{\tau\in[0,t]}\left\{\exp\left(\alpha(t-\tau)\right)\left[\theta_2(\tau)+\lambda_2(\tau)\,s^{-(1/2-\delta)}\right]\right\}\times$$

$$\times\int_{1/s}^{t-1/s}\exp\left(-\beta\frac{(y-1/s)^2}{4(t-\tau)}\right)\frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\times$$

$$\times\int_{-(x+s)/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}^{(s-x)/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)}\exp\left(-\frac{\left(\xi\sigma-2q\,|x|\,\sqrt{t}/\sigma\right)^2}{4t}\right)d\xi.$$

Заменяя переменную интегрирования $1/\sqrt{t-\tau}=\tau_1$ и увеличивая промежутки интегрирования, получим

$$\|J_2\|\leqslant\frac{yMN}{\pi s^{1-\delta}}\max_{\tau\in[0,t]}\left\{\exp\left[\alpha(t-\tau)\right]\left[\theta_2(\tau)+\lambda_2(\tau)\right]\right\}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(\xi\sigma-2q\,|x|\,\sqrt{t}/\sigma\right)^2}{4t}\right)d\xi\times$$

$$\times\int_{1/t}^{+\infty}\exp\left(-\beta\frac{(y-1/s)^2\tau^2}{4}\right)d\tau\exp\left(\frac{4q^2tx^2}{\sigma^2}\right).$$

Таким образом, нормы интегралов J_1 и J_2 оцениваются сверху выражением, стремящимся к нулю при $s\to+\infty$.

В третьем J_3 и четвертом J_4 интегралах из левой части (31) можно переходить к пределу при $s\to+\infty$:

III) $\lim_{s\to+\infty}J_3=$

$$=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{8\pi}\int_{1/s}^{t-1/s}\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-s}^{s}U(t-\tau;-A)\,U\left(\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\times$$

$$\times\left[\left(y-\frac{1}{s}\right)U\left(\frac{(y-1/s)^2}{4(t-\tau)};-B\right)+\left(y+\frac{1}{s}\right)U\left(\frac{(y+1/s)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right]\times$$

$$\times u\left(\xi,\frac{1}{s},\tau\right)d\xi=\frac{y}{4\pi}\int_0^t U\left(t-\tau;-A\right)U\left(\frac{y^2}{4\left(t-\tau\right)};-B\right)\frac{d\tau}{\left(t-\tau\right)^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4\left(t-\tau\right)};-B\right)\mu\left(\xi,\tau\right)d\xi.$$

Отметим, что подынтегральная функция при $\tau=t$ особенность не имеет, более того, обращается в нуль.

IV) $\lim_{s\to+\infty}J_4=$

$$=\lim_{s\to+\infty}\frac{1}{4\pi\left(t-1/s\right)}U\left(t-\frac{1}{s};-A\right)\int_{-s}^{s}d\xi\int_{1/s}^{s}U\left(\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4\left(t-1/s\right)};-B\right)\times$$

$$\times\left[U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^2}{4\left(t-1/s\right)};-B\right)+U\left(\frac{\left(y+\eta\right)^2}{4\left(t-1/s\right)};-B\right)\right]u\left(\xi,\eta,\frac{1}{s}\right)d\eta=$$

$$=\frac{1}{4\pi t}U\left(t;-A\right)\times$$

$$\times\iint_{R^2_+}U\left(\frac{\left(x-\xi\right)^2+\left(y-\eta\right)^2}{4t};-B\right)\left[\mathrm{I}-U\left(\frac{y\eta}{t};-B\right)\right]\varphi\left(\xi,\eta\right)d\xi d\eta.$$

Наконец, используя формулу (27), покажем, что

V) $\lim_{s\to+\infty}J_5=$

$$=\lim_{s\to+\infty}\int_{-s}^{s}d\xi\int_{1/s}^{s}G\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s};x,y,t\right)B^{-1}u\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s}\right)d\eta=B^{-1}u\left(x,y,t\right).$$

Действительно, применяя формулу (25) и разбивая промежутки интегрирования, имеем

$$\left\|J_5-B^{-1}u\left(x,y,t\right)\right\|\leqslant\left\|U\left(\frac{1}{s};-A\right)B^{-1}u\left(x,y,t\right)-B^{-1}u\left(x,y,t\right)\right\|+$$

$$+N\exp\left(\frac{\alpha}{s}\right)\left\|B^{-1}u\left(x,y,t\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{sy^2/4}U\left(r;-B\right)B^{-1/2}u\left(x,y,t\right)\frac{dr}{\sqrt{r}}\right\|+$$

$$+\frac{sN}{4\pi}\exp\left(\frac{\alpha}{s}\right)\left\|\int_{x-2/\sqrt[4]{s}}^{x+2/\sqrt[4]{s}}U\left(\frac{\left(x-\xi\right)^2 s}{4};-B\right)d\xi\times\right.$$

$$\times\int_{y-2/\sqrt[4]{s}}^{y+2/\sqrt[4]{s}}\left[U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^2 s}{4};-B\right)-U\left(\frac{\left(y+\eta\right)^2 s}{4};-B\right)\right]\times$$

$$\times\left[u\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s}\right)-u\left(x,y,t\right)\right]d\eta+\int_{x-2/\sqrt[4]{s}}^{x+2/\sqrt[4]{s}}U\left(\frac{(x-\xi)^2 s}{4};-B\right)d\xi\times$$

$$\times\left(\int_{1/s}^{y-2/\sqrt[4]{s}}+\int_{y+2/\sqrt[4]{s}}^{s}\right)\left[U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^2 s}{4};-B\right)-U\left(\frac{\left(y+\eta\right)^2 s}{4};-B\right)\right]\times$$

$$\times\left[u\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s}\right)-u\left(x,y,t\right)\right]d\eta+$$

$$+\left(\int_{-s}^{x-2/\sqrt[4]{s}}+\int_{x+2/\sqrt[4]{s}}^{s}\right)U\left(\frac{\left(x-\xi\right)^{2}s}{4};-B\right)d\xi\times$$

$$\times\int_{1/s}^{s}\left[U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^{2}s}{4};-B\right)-U\left(\frac{\left(y+\eta\right)^{2}s}{4};-B\right)\right]u\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s}\right)d\eta-$$

$$-\left(\int_{-\infty}^{x-2/\sqrt[4]{s}}+\int_{x+2/\sqrt[4]{s}}^{+\infty}\right)U\left(\frac{\left(x-\xi\right)^{2}s}{4};-B\right)d\xi\times$$

$$\times\int_{1/s}^{s}\left[U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^{2}s}{4};-B\right)-U\left(\frac{\left(y+\eta\right)^{2}s}{4};-B\right)\right]u\left(\xi,\eta,t-\frac{1}{s}\right)d\eta-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{\left(x-\xi\right)^{2}s}{4};-B\right)d\xi\times$$

$$\times\left(\int_{0}^{1/s}+\int_{s}^{+\infty}\right)\left[U\left(\frac{\left(y-\eta\right)^{2}s}{4};-B\right)-U\left(\frac{\left(y+\eta\right)^{2}s}{4};-B\right)\right]u\left(x,y,t\right)d\eta\Bigg\|.$$

Откуда, заменяя переменные интегрирования и оценивая норму каждого интеграла в отдельности и обозначая $\sigma_1=\sqrt{\beta-4q/s}$, $\sigma_2=\sqrt{\beta s-4q}$, получим

$$\left\|J_5-B^{-1}u\left(x,y,t\right)\right\|\leqslant\left\|\left[U\left(\frac{1}{s};-A\right)-\mathrm{I}\right]B^{-1}u\left(x,y,t\right)\right\|+\frac{2M^{3/2}N\lambda_0\left(\tau\right)}{\pi\sqrt{\beta}}\times$$

$$\times\exp\left[\frac{\alpha}{s}+q\left(x^2+y^2\right)\right]\int_{sy^2/4}^{+\infty}\exp\left(-\beta r\right)\frac{dr}{\sqrt{r}}+\frac{M\left(1+M\right)N}{\pi}\exp\left(\frac{\alpha}{s}\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{\pi}{\beta}\max_{|\xi|,|\eta|\leqslant\sqrt[4]{s_0}}\left\|u\left(x+\frac{2}{\sqrt{s}}\xi,y+\frac{2}{\sqrt{s}}\eta,t-\frac{1}{s}\right)-u\left(x,y,t\right)\right\|+\right.$$

$$+\lambda_0\left(t-\frac{1}{s}\right)\exp\left[q\left(1+\frac{\beta}{\sigma_1^2}\right)\left(x^2+y^2\right)\right]\times$$

$$\times\left\{\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt[4]{s_0}}+\int_{\sqrt[4]{s_0}}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{-\sqrt[4]{s}}+\int_{\sqrt[4]{s}}^{+\infty}\right)\exp\left[-\left(\xi\sigma_1-\frac{2q\left|x\right|}{\sigma_2}\right)^2\right]d\xi\times\right.$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\left(\eta\sigma_1-\frac{2qy}{\sigma_2}\right)^2\right]d\eta+\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\left(\xi\sigma_1-\frac{2q\left|x\right|}{\sigma_2}\right)^2\right]d\xi\times$$

$$\times\left.\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt[4]{s_0}}+\int_{\sqrt[4]{s_0}}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{-\sqrt[4]{s}}+\int_{\sqrt[4]{s}}^{+\infty}\right)\exp\left[-\left(\eta\sigma_1-\frac{2qy}{\sigma_2}\right)^2\right]d\eta\right\}+$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\lambda_0(t)\exp\left[q\left(x^2+y^2\right)\right]\times$$

$$\times\left[\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt[4]{s_0}}+\int_{\sqrt[4]{s_0}}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{-\sqrt[4]{s}}+\int_{\sqrt[4]{s}}^{+\infty}\right)\left(\exp\left(-\beta\xi^2\right)d\xi+\exp\left(-\beta\eta^2\right)d\eta\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\int_{-\infty}^{(1/s-y)\sqrt{s}/2}+\int_{(s-y)\sqrt{s}/2}^{+\infty}\exp\left(-\beta\eta^2\right)d\eta\right)\right]\Bigg\}<\varepsilon,$$

где ε — произвольное сколь угодно малое положительное число, а s_0 и s — достаточно большие числа, причем $s_0 < s$.

Итак, переходя к пределу при $s\to+\infty$ в равенстве (31) и затем, действуя на обе части предельного соотношения оператором B, получим формулу (29).

Теперь выясним, каким условиям достаточно подчинить начальное данное $\varphi(x,y)$ и краевое условие $\mu(x,t)$, чтобы формула (29) давала решение краевой задачи (14)–(16).

Теорема 2. Пусть значения начального данного $\varphi(x,y)$ и краевого условия $\mu(x,t)$ принадлежат множеству $\tilde{E}$ и справедливы оценки норм непрерывных в банаховом пространстве E функций:

$$\|AB\varphi(x,y)\|,\left\|B^3\varphi(x,y)\right\|\leqslant K\exp\left[h\left(x^2+y^2\right)\right];$$

$$\|AB\mu(x,t)\|,\left\|B^3\mu(x,t)\right\|\leqslant\lambda(t)\exp\left(hx^2\right);$$

$$K=\texttt{const},(x,y,t)\in\overline{R}_+^2\times[0,T[\,,0\leqslant h<\frac{\beta}{4T},\tag{32}$$

где $\lambda(t)$ — непрерывная функция, тогда решение $u(x,y,t)$ смешанной краевой задачи (14)–(16) в каждой точке $(x,y,t)\in R_+^2\times]0,T[$ дается формулой (29), и для него справедлива оценка нормы

$$\|u(x,y,t)\|\leqslant\left[\frac{(1+M)K}{\sigma_t}\left(1+\frac{2h\sqrt{\pi t}}{\sigma_t}|x|\right)\exp\left(\frac{\beta h}{\sigma_t^2}y^2\right)+\frac{\lambda_t}{\sqrt{\beta}}\right]\times$$

$$\times\frac{4M^3N\alpha_t}{\beta^2\sigma_t}\exp\left(\frac{\beta h}{\sigma_t^2}x^2\right),\tag{33}$$

где обозначено $\alpha_t=\max_{\tau\in[0,t]}\{1;\exp(\alpha\tau)\}$, $\lambda_t=\max_{\tau\in[0,t]}\lambda(\tau)$, $\sigma_t=\sqrt{\beta-4ht}$.

Доказательство. Покажем, что норма функции $u(x,y,t)$, определяемой формулой (29), удовлетворяет оценке (33):

$$\|u(x,y,t)\|\leqslant\frac{MN}{4\pi t}\exp(\alpha t)\iint_{R_+^2}\exp\left(-\beta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}\right)\times$$

$$\times\left[1+M\exp\left(-\beta\frac{y\eta}{t}\right)\right]\left\|B^{-2}B^3\varphi(\xi,\eta)\right\|d\xi d\eta+$$

$$+\frac{yMN}{4\pi}\int_0^t\exp\left[\alpha(t-\tau)-\beta\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\beta\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right]\left\|B^{-2}B^3\mu(\xi,\tau)\right\|d\xi.$$

Оценивая подынтегральные функции, распространяя первый интеграл на все пространство R^2 и заменяя переменные интегрирования, имеем

$$\|u(x,y,t)\| \leqslant \frac{M^3 N \alpha_t}{\beta^2 \pi} \left\{ (1+M) K \exp\left[h\left(x^2+y^2\right)\right] \times \right.$$

$$\times \iint_{R^2} \exp\left[-\sigma_t^2\left(\xi^2+\eta^2\right)+4ht\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(\xi^2+\eta^2\right)}\right] d\xi d\eta +$$

$$\left. +\lambda_t \exp\left(hx^2\right) \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \exp(-\beta s) \frac{ds}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sigma_t^2 \xi^2 + 4ht|x||\xi|\right) d\xi \right\}. \qquad (34)$$

Откуда, переходя к полярным координатам и используя неравенства

$$\int_0^{+\infty} s^m \exp\left(-as^2+bs\right) ds \leqslant 2^m \left[\frac{\Gamma((m+1)/2)}{a^{(m+1)/2}} + \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(\frac{b}{2a}\right)^m\right] \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right),$$

где $a>0$, b — действительные числа, m — натуральное число, получим оценку (33).

Покажем, что функция (29) удовлетворяет уравнению (14). Для этого, в силу того, что фундаментальное оператор-решение (17) по переменным (ξ,η,τ) удовлетворяет уравнению (20), достаточно убедиться в возможности вычисления частных производных функции $u(x,y,t)$ дифференцированием под знаком интеграла. А это следует из оценок норм частных производных:

I)

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} = -\frac{1}{8\pi t^2} U(t;-A) \iint_{R_+^2} (x-\xi) U\left(\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t};-B\right) \times$$

$$\times \left[\mathrm{I} - U\left(\frac{y\eta}{t};-B\right)\right] B^2 \varphi(\xi,\eta) d\xi d\eta - \frac{y}{8\pi} \int_0^t U(t-\tau;-A) \frac{d\tau}{(t-\tau)^3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\xi) U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4(t-\tau)};-B\right) B^2 \mu(\xi,\tau) d\xi. \qquad (35)$$

Оценим нормы подынтегральных функций

$$\|u_x(x,y,t)\| \leqslant \frac{M^2 N}{8\beta\pi} \left\{ \frac{(1+M)K}{t^2} \exp(\alpha t) \times \right.$$

$$\times \iint_{R_+^2} |x-\xi| \exp\left[-\beta \frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t} + h\left(\xi^2+\eta^2\right)\right] d\xi d\eta +$$

$$+y \int_0^t \lambda(\tau) \exp\left[\alpha(t-\tau) - \beta \frac{y^2}{4(t-\tau)}\right] \frac{d\tau}{(t-\tau)^3} \times$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\xi| \exp\left[-\beta \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} + h\xi^2\right] d\xi \right\}.$$

Распространяя первый интеграл на все пространство R^2, используя неравенство $|x-\xi| \leqslant \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ и производя замену переменных интегрирования, имеем

$$\|u_x(x,y,t)\| \leqslant \frac{2M^2 N\alpha_t}{\beta}\exp\left(hx^2\right)\times$$

$$\times\left\{\frac{(1+M)K}{\sqrt{t}}\exp\left(hy^2\right)\int_0^{+\infty} r^2\exp\left[-\sigma_t^2 r^2+4hr\sqrt{t\left(x^2+y^2\right)}\right]dr+\right.$$

$$\left.+\frac{2\lambda_t}{y\sqrt{\pi}}\int_{y^2/(4t)}^{+\infty}\exp(-\beta s)\,ds\int_0^{+\infty} r\exp\left(-\sigma_t^2 r^2+4hr|x|\sqrt{t}\right)dr\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8M^2N\alpha_t}{\beta\sigma_t^2}\exp\left(\beta h\frac{x^2}{\sigma_t^2}\right)\left\{\frac{(1+M)K\sqrt{\pi}}{2\sigma_t\sqrt{t}}\left[1+32h^2t\frac{x^2+y^2}{\sigma_t^2}\right]\exp\left(-\beta\frac{y^2}{\sigma_t^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{y\beta\sqrt{\pi}}\left[1+\frac{4ht\sqrt{\pi}}{\sigma_t}\right]\exp\left(-\beta\frac{y^2}{4t}\right)\right\}. \qquad (36)$$

II)

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} = -\frac{1}{8\pi t^2}U(t;-A)\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t};-B\right)d\xi\times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\left[(y-\eta)U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)-(y+\eta)U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right]B^2\varphi(\xi,\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B\mu(\xi,\tau)\,d\xi-$$

$$-\frac{y^2}{8\pi}\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{(t-\tau)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B^2\mu(\xi,\tau)\,d\xi. \qquad (37)$$

Оценим нормы подынтегральных функций

$$\|u_y(x,y,t)\| \leqslant \frac{MN\alpha_t}{2\pi}\left\{\frac{K}{t}\int_0^{+\infty}\exp\left(h\eta^2\right)d\eta\times\right.$$

$$\times\int_{(y-\eta)^2/(4t)}^{(y+\eta)^2/(4t)}\left(\frac{M}{2\beta\sqrt{s}}+\sqrt{s}\right)\exp(-\beta s)\,ds+$$

$$\left.+\frac{M\lambda_t}{\beta}\left[\frac{M}{\beta}\int_0^t\exp\left(-\beta\frac{y^2}{4\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau^{3/2}}+\frac{y^2}{2}\int_0^t\exp\left(-\beta\frac{y^2}{4\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau^{5/2}}\right]\right\}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\xi^2+h\Big(|x|+2|\xi|\sqrt{t}\Big)^2\right)d\xi.$$

Заменяя переменные и меняя порядок интегрирования, оценивая внутренние интегралы и увеличивая промежутки интегрирования, получим

$$\|u_y(x,y,t)\| \leqslant \frac{4MN\alpha_t}{\sqrt{\pi}\sigma_t}\left\{\frac{4K}{\sqrt{t}\sigma_t^2}\left(1+2hy\frac{\sqrt{\pi t}}{\sigma_t}\right)\left[\frac{8M}{\beta\sigma_t^2}\left(1+4hty^2\frac{\sqrt{\pi}}{\sigma_t}\right)\right]\times\right.$$

$$\times \exp\left(\beta h \frac{y^2}{\sigma_t^2}\right) + \frac{M\,(1+M)}{y\beta^2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\lambda_t\right\} \exp\left(\beta h \frac{x^2}{\sigma_t^2}\right). \tag{38}$$

III) $$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = \frac{1}{16\pi t^3} U\,(t;-A) \iint_{R_+^2} U\left(\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) \times$$

$$\times \left\{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]\mathrm{I} - \left[(x-\xi)^2+(y+\eta)^2\right] U\left(\frac{y\eta}{t}; -B\right)\right\} \times$$

$$\times B^2 \varphi\,(\xi,\eta)\, d\xi d\eta - \frac{1}{4\pi t^2} U\,(t;-A) \iint_{R_+^2} U\left(\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t}; -B\right) \times$$

$$\times \left[\mathrm{I} - U\left(\frac{y\eta}{t}; -B\right)\right] B\varphi\,(\xi,\eta)\, d\xi d\eta -$$

$$-\frac{y}{2\pi}\int_0^t U\,(t-\tau;-A)\,\frac{d\tau}{(t-\tau)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4\,(t-\tau)}; -B\right) B\mu\,(\xi,\tau)\, d\xi +$$

$$+\frac{y}{16\pi}\int_0^t U\,(t-\tau;-A)\,\frac{d\tau}{(t-\tau)^4} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\left[(x-\xi)^2+y^2\right] U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4\,(t-\tau)}; -B\right) B^2\mu\,(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{39}$$

Оценим нормы подынтегральных функций

$$\|u_t\,(x,y,t) + Au\,(x,y,t)\| \leqslant \left\{\frac{M\,(1+M)\,K}{t^2} \times\right.$$

$$\times \iint_{R_+^2}\left(\frac{M}{\beta} + \frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)\exp\left[-\beta\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4t} + h\left(\xi^2+\eta^2\right)\right] d\xi d\eta +$$

$$+K\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\beta\frac{(x-\xi)^2}{4t} + h\xi^2\right) d\xi \times$$

$$\times \int_0^{+\infty}\exp\left(h\eta^2\right) d\eta \int_{(y-\eta)^2/(4t)}^{(y+\eta)^2/(4t)}\left(\frac{M}{\beta}+s\right)\exp\left(-\beta s\right) ds +$$

$$+\frac{yM\lambda_t}{4\beta}\int_0^t \exp\left(-\beta\frac{y^2}{4\,(t-\tau)}\right)\frac{d\tau}{(t-\tau)^3} \times$$

$$\left.\times \int_{-\infty}^{+\infty}\left[8M + \beta\frac{(x-\xi)^2+y^2}{t-\tau}\right]\exp\left(-\beta\frac{(x-\xi)^2}{4\,(t-\tau)} + h\xi^2\right) d\xi\right\}\frac{MN\alpha_t}{4\pi\beta}.$$

Увеличивая область интегрирования, меняя порядок и заменяя переменные интегрирования, получим

$$\|u_t\,(x,y,t) + Au\,(x,y,t)\| \leqslant \frac{4MNK\alpha_t}{t\sigma_t^2}\left\{\frac{M\,(1+M)}{\beta}\times\right.$$

$$\times\left[\frac{M}{\beta}\left(1+\frac{2h\sqrt{\pi t}}{\sigma_t}\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{4}{\sigma_t^2}\left(1+\frac{8\sqrt{\pi}h^3t^{3/2}}{\sigma_t}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{\sigma_t^2}\left(3+\frac{64h^4t^2}{\sigma_t^4}y^4\right)+\frac{M}{\beta}\left(\frac{1}{2}+\frac{4h^2t}{\sigma_t^2}y^2\right)\right]\Bigg\}\frac{16}{\sqrt{\pi}\sigma_t^3}\exp\left(\beta h\frac{x^2+y^2}{\sigma_t^2}\right)+$$

$$+\frac{16M^2N\alpha_t\lambda_t}{y^2\beta^{5/2}\sigma_t}\left\{\frac{4\,(M+3)}{\beta}+\frac{1}{\sigma_t^3}\left[\frac{1}{2}+\frac{4h^2t}{\sigma_t}\left(x^2+y^2\right)\right]\right\}\exp\left(\beta h\frac{x^2}{\sigma_t^2}\right). \qquad (40)$$

Таким образом, из полученных оценок частных производных (35), (37), (39) следует, что интегралы в правых частях неравенств (36), (38), (40) равномерно сходятся, и, значит, дифференцирование под знаком интеграла обосновано.

Используя формулы (35), (37), вычислим несмешанные частные производные функции $u\,(x,y,t)$ и составим значение оператора Лапласа $\triangle u\,(x,y,t)$. Сравнивая $\triangle u\,(x,y,t)$ с выражением (39), заметим, что они отличаются лишь степенью оператора B: $B^{-1}\triangle u=\triangle B^{-1}u=u_t+Au$. Откуда, используя неравенство (40), по аналогии получается оценка $\|\triangle u\,(x,y,t)\|$ и следует, что функция $u\,(x,y,t)$, определяемая формулой (29), является решением уравнения (14).

Осталось показать выполнение 1^0) начального (15) и 2^0) краевого (16) условий. Обозначим через $u_\varphi\,(x,y,t)$ и $u_\mu\,(x,y,t)$ соответственно первое и второе слагаемые в формуле (29):

$$u\,(x,y,t)=u_\varphi\,(x,y,t)+u_\mu\,(x,y,t)\,.$$

1^0) Из промежуточной оценки (34) следует, что

$$\|u_\mu\,(x,y,t)\|\leqslant\frac{M^3N\alpha_t\lambda_t}{\beta^2\pi}\exp\left(hx^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\sigma_T^2\xi^2+4h\,|x|\,\sqrt{T}\,|\xi|\right)d\xi\times$$

$$\times\int_{y^2/(4t)}^{+\infty}\exp\left(-\beta s\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}$$

и, значит, $u_\mu\,(x,y,t)\to 0$ при $t\to 0$.

Применяя формулы (25), (27), имеем

$$\|u_\varphi\,(x,y,t)-\varphi\,(x,y)\|\leqslant\|U\,(t;-A)\,\varphi\,(x,y)-\varphi\,(x,y)\|+$$

$$+\left\|\frac{1}{\sqrt{\pi}}U\,(t;-A)\int_{y^2/(4t)}^{+\infty}U\,(s;-B)\,B^{1/2}\varphi\,(x,y)\,\frac{ds}{\sqrt{s}}\right\|+$$

$$+\left\|\frac{1}{\pi}U\,(t;-A)\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\xi^2;-B\right)d\xi\times\right.$$

$$\times\int_{-y/(2\sqrt{t})}^{+\infty}\left[U\left(\eta^2;-B\right)-U\left(\left(\eta+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^2;-B\right)\right]\times$$

$$\left.\times\left[B\varphi\left(x+2\xi\sqrt{t},y+2\eta\sqrt{t}\right)-B\varphi\,(x,y)\right]d\eta\right\|.$$

Первые два слагаемых в правой части последнего неравенства стремятся к нулю при $t\to 0+$, т. е. являются бесконечно малой величиной $o\,(t)$ при $t\to 0+$.

Разбивая область интегрирования в третьем интеграле на части и оценивая нормы подынтегральных функций, для всех достаточно малых $t > 0$ имеем

$$\|u_\varphi (x,y,t) - \varphi (x,y)\| \leqslant o(t) + \frac{M^3 (1+M) N \alpha_t}{\beta^2 \pi} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\pi}{\beta} \max_{(\xi,\eta) \in \{|\xi|, |\eta| \leqslant s_0\}} \left\| B^3 \varphi \left(x + 2\xi\sqrt{t}, y + 2\eta\sqrt{t} \right) - B^3 \varphi (x,y) \right\| + \right.$$

$$+ 2K \exp\left[h \left(x^2 + y^2 \right) \right] \left[\left(\int_{-\infty}^{-s_0} + \int_{s_0}^{+\infty} \right) \exp\left(-\sigma_T^2 \xi^2 + 4h|x|\sqrt{T}|\xi| \right) d\xi \times \right.$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sigma_T^2 \eta^2 + 4h|x|\sqrt{T}|\eta| \right) d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sigma_T^2 \xi^2 + 4h|x|\sqrt{T}|\xi| \right) d\xi \times$$

$$\left. \left. \times \left(\int_{-\infty}^{-s_0} + \int_{s_0}^{+\infty} \right) \exp\left(-\sigma_T^2 \eta^2 + 4h|x|\sqrt{T}|\eta| \right) d\eta \right] \right\} < \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое, а s_0 — достаточно большое положительные числа.

2^0) Проверке выполнения для функции $u(x,y,t)$ краевого условия (16) предпошлем оценку

$$\|u_\varphi (x,y,t)\| = \left\| \frac{1}{4\pi t} U(t; -A) \int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{(x-\xi)^2}{4t}; -B \right) d\xi \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^{+\infty} d\eta \int_{(y-\eta)^2/(4t)}^{(y+\eta)^2/(4t)} U(s; -B) B^2 \varphi (\xi, \eta)\, ds \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^2 N K}{\beta\sqrt{\pi t}} \exp\left[\alpha t + h\left(x^2 + y^2 \right) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\sigma_T^2 \xi^2 + 4h|x|\sqrt{T}|\xi| \right) d\xi \times$$

$$\times \left(2\sqrt{t} \int_0^{y^2/(4t)} \sqrt{s} + y \int_{y^2/(4t)}^{+\infty} \right) \exp\left(-\sigma_T^2 s + 4hy\sqrt{Ts} \right) ds.$$

Откуда следует, что $u_\varphi (x,y,t) \to 0$ при $y \to 0+$.

Заменяя в $u_\mu (x,y,t)$ переменные интегрирования, имеем

$$\|u_\mu (x,y,t) - \mu (x,t)\| \leqslant \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y/\left(2\sqrt{t}\right)} U\left(s^2; -B \right) B^{1/2} \mu (x,t)\, ds \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/\left(2\sqrt{t}\right)}^{+\infty} \left[U\left(\frac{y^2}{4s^2}; -A \right) - \mathrm{I} \right] U\left(s^2; -B \right) B^{1/2} \mu (x,t)\, ds \right\| +$$

$$+ \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{y/\left(2\sqrt{t}\right)}^{+\infty} U\left(\frac{y^2}{4s^2}; -A \right) U\left(s^2; -B \right) ds \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\xi^2; -B \right) \left[B\mu \left(x + \frac{y}{s}\xi, t - \frac{y^2}{4s^2} \right) - B\mu (x,t) \right] d\xi \right\|.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой бесконечно малую величину $o(y)$ при $y \to 0+$. В остальных интегралах разбиваем область интегрирования на части и оцениваем нормы подынтегральных функций, тогда для всех достаточно малых $y > 0$ имеем

$$\|u_\mu(x,y,t) - \mu(x,t)\| \leqslant o(y) + \frac{2(N+1)\alpha_t}{\sqrt{\pi}} \left\|B^{1/2}\mu(x,t)\right\| \int_0^{1/s_0} \exp\left(-\beta s^2\right) ds +$$

$$+\frac{1}{\beta} \max_{s\in[1/s_0,s_0]} \left\|U\left(\frac{y^2}{4s^2};-A\right) B^{1/2}\mu(x,t) - B^{1/2}\mu(x,t)\right\| +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[N\exp\left(-\alpha\frac{y^2}{4s_0^2}\right)+1\right]\left\|B^{1/2}\mu(x,t)\right\| \int_{s_0}^{+\infty} \exp\left(-\beta s^2\right) ds +$$

$$+\frac{M^3 N\alpha_t}{\beta^2}\left\{\frac{\lambda_t}{\sqrt{\pi}}\exp\left(hx^2\right)\left[\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\sigma_T^2\xi^2 + 4h|x|\sqrt{T}|\xi|\right)d\xi\times\right.\right.$$

$$\times\left(\int_0^{1/s_0} + \int_{s_0}^{+\infty}\right)\exp\left(-\beta s^2\right) ds +$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left(\int_{-\infty}^{-s_0} + \int_{s_0}^{+\infty}\right)\exp\left(-\sigma_T^2\xi^2 + 4h|x|\sqrt{T}|\xi|\right)d\xi\right] +$$

$$\left.+\frac{1}{\beta}\max_{s\in[1/s_0,s_0]}\left\|B^3\mu\left(x+\frac{y}{s}\xi, t-\frac{y^2}{4s^2}\right) - B^3\mu(x,t)\right\|\right\} < \varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое, а s_0 — достаточно большое положительные числа.

4. Абстрактная краевая задача без начального условия

Предположим, что в смешанной задаче (14)–(16) переменная t меняется на бесконечном промежутке, т. е. $T = +\infty$, а начальное данное задается в плоскости $t = t_0$. Тогда постоянные q и h, которые в п. 4 удовлетворяли условию $0 \leqslant q, h < \beta/(4T)$, будут равны нулю. Другими словами, если раньше допускался рост по $\sqrt{x^2+y^2}$ норм начально-краевых данных $\varphi(x,y)$, $\mu(x,t)$ и решения $u(x,y,t)$, то теперь нормы этих функций равномерно ограничены по переменным $(x,y) \in \overline{R}_+^2$. В рассматриваемом случае формула (29), определяющая решение $u(x,y,t)$, примет вид

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) + w(x,y,t), \tag{41}$$

где

$$v(x,y,t) = \frac{1}{4\pi(t-t_0)} U(t-t_0;-A) \iint_{R_+^2} U\left(\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)};-B\right)\times$$

$$\times\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-t_0)};-B\right) - U\left(\frac{(y+\eta)^2}{4(t-t_0)};-B\right)\right] Bu(\xi,\eta,t_0)\, d\xi d\eta$$

и

$$w(x,y,t)=\frac{y}{4\pi}\int_0^t U(t-\tau;-A)\,U\left(\frac{y^2}{4(t-\tau)};-B\right)\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)};-B\right)Bu(\xi,0,\tau)\,d\xi.$$

В настоящем параграфе предположим, что тип полугруппы, порождаемой оператором $-A$, неположительный:

$$\|U(\tau;-A)\|\leqslant N,\quad \tau\geqslant 0, \tag{42}$$

и что решение $u(x,y,t)$ подчинено условию

$$\left\|B^2u(x,y,t)\right\|\leqslant H=\mathtt{const}\quad (x,y,t)\in\overline{R}^2_+\times[t_0,+\infty[\,. \tag{43}$$

Предполагая, что $t_0<0<t-t_0$, имеем

1)

$$\|v(x,y,t)\|\leqslant\frac{MNH}{4\pi(t-t_0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\beta\frac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)}\right)d\xi\int_0^{+\infty}d\eta\times$$

$$\times\int_{(y-\eta)^2/[4(t-t_0)]}^{(y+\eta)^2/[4(t-t_0)]}\exp(-\beta s)\,ds\leqslant\frac{yMNH}{\beta\sqrt{\beta\pi(t-t_0)}};$$

2)

$$\|w(x,y,t)\|\leqslant\frac{yM^2NH}{2\beta\sqrt{\beta\pi}}\int_{y/\left(2\sqrt{t-t_0}\right)}^{+\infty}\exp\left(-\beta s^2\right)ds\leqslant\frac{M^2NH}{\beta^2}.$$

Таким образом, при выполнении условий (42), (43), переходя в (41) к пределу при $t_0\to-\infty$, для всех $(x,y,t)\in R^3_+$ получим формулу

$$u(x,y,t)=\frac{y}{4\pi}\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4(t-\tau)};-B\right)B\mu(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{44}$$

доказывающую единственность решения краевой задачи без начального условия:

$$B(u_t+Au)=\triangle_2u,\quad (x,y)\in R^2_+,\quad t>-\infty, \tag{45}$$

$$u|_{y=0}=\mu(x,t),\quad x\in R^1,\quad t>-\infty. \tag{46}$$

Теорема 3. Пусть значения граничного условия (x,t) принадлежат множеству $\tilde{E}$, и справедливы оценки норм непрерывных функций

$$\|AB(x,t)\|,\left\|B^3(x,t)\right\|\leqslant P=\mathtt{const},\quad x\in R^1,\quad t>-\infty,$$

тогда ограниченное по норме решение $u(x,y,t)$ краевой задачи без начального условия (45), (46) дается формулой (44), и для него имеет место оценка нормы

$$\|u(x,y,t)\|\leqslant\frac{M^3NP}{2\beta^3},\ (x,y)\in R^2_+,\ t>-\infty. \tag{47}$$

Доказательство. Заменяя во внутреннем интеграле из правой части неравенства

$$\|u(x,y,t)\|\leqslant\frac{yM^3NP}{4\pi\beta}\int_{-\infty}^{t}\exp\left(-\beta\frac{y^2}{4(t-\tau)}\right)\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\beta \frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi$$

переменную интегрирования и затем вычисляя полученный интеграл, имеем

$$\|u(x,y,t)\| \leqslant \frac{yM^3NP}{4\pi\beta^{5/2}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\beta \frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Откуда, в свою очередь, заменяя $y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right) = s$ и используя значение получающегося табличного интеграла, выводим оценку (47).

Рассмотрим выражение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = \frac{y}{16\pi} \int_{-\infty}^{t} U(t-\tau; -A) \frac{d\tau}{(t-\tau)^4} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(x-\xi)^2 + y^2\right] U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B^2 \mu(\xi,\tau)\, d\xi -$$

$$-\frac{y}{2\pi} \int_{-\infty}^{t} U(t-\tau; -A) \frac{d\tau}{(t-\tau)^3} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{(x-\xi)^2+y^2}{4(t-\tau)}; -B\right) B\mu(\xi,\tau)\, d\xi$$

и оценим его норму:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial t} + Au\right\| \leqslant \frac{yM^2NP}{2\sqrt{\pi}\beta^{3/2}} \left\{\frac{y^2}{4} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\beta \frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{7/2}} +\right.$$

$$\left. +\beta^{-1} \left[\frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} + 2M\right] \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\beta \frac{y^2}{4(t-\tau)}\right) \frac{d\tau}{(t-\tau)^{5/2}}\right\}.$$

Отсюда, заменяя переменную интегрирования $s = y/\left(2\sqrt{t-\tau}\right)$, получим

$$\|u_t + Au\| \leqslant \frac{M^2NP}{y^2\beta^{5/2}} \left(\frac{5}{4} + 4M\right).$$

Несобственные интегралы, входящие в выражение $u_t + Au$, отличаются от несобственных интегралов из $u_{xx} + u_{yy}$ лишь степенью оператора B:

$$u_t + Au = B^{-1}\Delta_2 u = \Delta_2 B^{-1} u. \tag{48}$$

Поэтому оценка $\|\Delta_2 u\|$ получается аналогично оценке $\|u_t + Au\|$, причем из соотношения (48) следует, что функция (44) является решением уравнения (45).

Выполнение граничного условия (46) следует из того, что для всех достаточно малых $y > 0$ имеем

$$\|u(x,y,t) - \mu(x,t)\| = \left\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} U\left(s^2; -B\right) \left[U\left(\frac{y^2}{4s^2}; -A\right) - \mathrm{I}\right] B\mu(x,t)\, ds + \right.$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} U\left(\frac{y^2}{4s^2}; -A\right) U\left(s^2; -B\right) ds \times$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[B\mu\left(x + \frac{y}{s}\xi, t - \frac{y^2}{4s^2}\right) - B\mu(x,t)\right] d\xi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M^3N}{\sqrt{\pi}\beta^{5/2}}\left\{\max_{s\in[1/s_0,s_0],|\xi|\leqslant s_0}\left\|B^3\mu\left(x+\frac{y}{s}\xi,t-\frac{y^2}{4s^2}\right)-B^3\mu\left(x,t\right)\right\|+\right.$$

$$\left.+P\left[2\left(\int_0^{1/s_0}+\int_{s_0}^{+\infty}\right)\exp\left(-\beta s^2\right)ds+\left(\int_{-\infty}^{-s_0}+\int_{s_0}^{+\infty}\right)\exp\left(-\beta s^2\right)ds\right]\right\}+$$

$$+\frac{2M}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\beta}}\max_{s\in[1/s_0,s_0]}\left\|U\left(\frac{y^2}{4s^2};-A\right)B^{1/2}\mu\left(x,t\right)-B^{1/2}\mu\left(x,t\right)\right\|+\right.$$

$$\left.+\left(N+1\right)\left\|B^{1/2}\mu\left(x,t\right)\right\|\left(\int_0^{1/s_0}+\int_{s_0}^{+\infty}\right)\exp\left(-\beta s^2\right)ds\right\}<\varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое, а s_0 — достаточно большое положительные числа.

5. Оценка и явный вид решения задачи фильтрации

Пусть выполнены условия

$$\left\|\frac{\partial^{2m}\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial z^{2m}}\right\|_{C[-\infty,+\infty]}=\sup_{z\in R^1}\left|\frac{\partial^{2m}\varphi\left(x,y,z\right)}{\partial z^{2m}}\right|\leqslant K_0\exp\left[h\left(x^2+y^2\right)\right],$$

$$\left\|\frac{\partial^{2m}\mu\left(x,z,t\right)}{\partial z^{2m}}\right\|_{C[-\infty,+\infty]}\leqslant\lambda_0\left(t\right)\exp\left(hx^2\right),\tag{49}$$

в которых $m=\overline{0,3}$, $K_0=\mathtt{const}$ $(x,y)\in\overline{R}^2_+$, $t\in[0,T[$, $4hT\chi_0<1$, а $\lambda_0\left(t\right)$ — непрерывная функция. Тогда выполняются условия (32) теоремы 2, например, с постоянной

$$K=\frac{\chi\chi_0^2+\left(1+\omega\right)^3}{\chi_0^3}K_0$$

и непрерывной функцией

$$\lambda\left(t\right)=\frac{K}{K_0}\lambda_0\left(t\right)$$

и, значит, по формуле (29), используя представления (11), (12), можно выписать решение $p_1\left(x,y,z,t\right)$ задачи (5)–(7):

$$p_1\left(x,y,z,t\right)=\frac{1}{4t\pi^{3/2}}\exp\left(-\frac{\chi}{\omega}t\right)\iint_{R^2_+}\exp\left(-\frac{\left(x-\xi\right)^2}{4t\chi_0}\right)\times$$

$$\times\left\{\exp\left(-\frac{\left(y-\eta\right)^2}{4t\chi_0}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\zeta^2\right)\left(B\varphi\right)\left(\xi,\eta,z+2\zeta\sqrt{\Omega_-}\right)d\zeta+\right.\right.$$

$$+\sqrt{\frac{\chi}{\omega}t}\int_0^{+\infty}\exp\left(-s\right)\mathrm{I}_1\left(2\sqrt{\frac{\chi}{\omega}ts}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\times$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\zeta^2\right)\left(B\varphi\right)\left(\xi,\eta,z+2\zeta\sqrt{\omega s+\Omega_-}\right)d\zeta\right]-$$

$$- \exp\left(-\frac{(y+\eta)^2}{4t\chi_0}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\zeta^2\right)(B\varphi)\left(\xi,\eta,z+2\zeta\sqrt{\Omega_+}\right)d\zeta+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{\chi}{\omega}t}\int_0^{+\infty}\exp\left(-s\right)\mathrm{I}_1\left(2\sqrt{\frac{\chi}{\omega}ts}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\times$$

$$\left.\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\zeta^2\right)(B\varphi)\left(\xi,\eta,z+2\zeta\sqrt{\omega s+\Omega_+}\right)d\zeta\right]\right\}d\xi d\eta+$$

$$+\frac{y}{4\pi^{3/2}}\int_0^t\exp\left(-\frac{\chi}{\omega}\tau-\frac{y^2}{4\tau\chi_0}\right)\frac{d\tau}{\tau^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau\chi_0}\right)\times$$

$$\times\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\zeta^2\right)(B\mu)\left(\xi,z+2\zeta\sqrt{\Omega_+|_{\eta=0,t=\tau}},t-\tau\right)d\zeta+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{\chi}{\omega}\tau}\int_0^{+\infty}\exp\left(-s\right)\mathrm{I}_1\left(2\sqrt{\frac{\chi}{\omega}\tau s}\right)\frac{ds}{\sqrt{s}}\times$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\zeta^2\right)(B\mu)\left(\xi,z+2\zeta\sqrt{\omega s+\Omega_+|_{\eta=0,t=\tau}},t-\tau\right)d\zeta\right]d\xi, \tag{50}$$

где обозначено

$$(Bf)(\cdot,z)=\frac{f(\cdot,z)-\omega f_{zz}(\cdot,z)}{\chi_0}$$

и

$$\Omega_\pm=\omega\frac{(x-\xi)^2+(y\pm\eta)^2}{4t\chi_0}.$$

Для этого решения для всех $(x,y,z,t)\in\overline{R}^3_{2+}\times[0,T[$ справедлива оценка

$$\|p_1(x,y,z,t)\|_{C[-\infty,+\infty]}=\sup_{z\in R^1}|p_1(x,y,z,t)|\leqslant 4K_0\frac{\chi\chi_0^2+(1+\omega)^3}{1-4ht\chi_0}\times$$

$$\times\left[2\left(1+\frac{4h\sqrt{\pi t\chi_0}}{\sqrt{1-4ht\chi_0}}|x|\right)\exp\left(\frac{hy^2}{1-4ht\chi_0}\right)+\sqrt{1-4ht\chi_0}\max_{\tau\in[0,t]}\lambda_0(\tau)\right]\times$$

$$\times\exp\left(\frac{hx^2}{1-4ht\chi_0}\right). \tag{51}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. Пусть выполнены условия (49), тогда единственное решение начально-краевой задачи (5)–(7) — давление $p_1(x,y,z,t)$ в трещинах анизотропного коллектора (2) дается в явном виде формулой (50), и для него справедлива оценка (51).

Если рассматривается задача фильтрации без начального условия:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}-\omega\frac{\partial^3 p_1}{\partial z^2\partial t}-\chi\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}=\chi_0\Delta_2 p_1,\ \ (x,y.z)\in R^3_{2+},\ t>-\infty, \tag{52}$$

$$p_1|_{y=0}=\mu(x,z,t),\ \ (x,z)\in R^2,\ t>-\infty, \tag{53}$$

то оценка решения и его явный вид значительно упрощаются. Действительно, пусть граничная функция подчиняется условиям

$$\left\| \frac{\partial^{2m} \mu(x,z,t)}{\partial z^{2m}} \right\|_{C[-\infty,+\infty]} \leqslant P_0 = \texttt{const} \quad (x,y) \in R_+^2, t > -\infty, m = \overline{0,3}, \tag{54}$$

тогда выполняются требования теоремы 3, и, значит, ограниченное решение краевой задачи без начального условия дается формулой

$$p_1(x,y,z,t) = \frac{y}{4\pi^{3/2}} \int_0^t \exp\left(-\frac{\chi}{\omega}\tau - \frac{y^2}{4\tau\chi_0}\right) \frac{d\tau}{\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4\tau\chi_0}\right) \times$$
$$\times \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\zeta^2\right) (B\mu) \left(\xi, z + 2\zeta\sqrt{\Omega_+|_{\eta=0,t=\tau}}, t-\tau\right) d\zeta + \right.$$
$$+ \sqrt{\frac{\chi}{\omega}\tau} \int_0^{+\infty} \exp(-s)\, \mathrm{I}_1\left(2\sqrt{\frac{\chi}{\omega}\tau s}\right) \frac{ds}{\sqrt{s}} \times$$
$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\zeta^2\right) (B\mu) \left(\xi, z + 2\zeta\sqrt{\omega s + \Omega_+|_{\eta=0,t=\tau}}, t-\tau\right) d\zeta \right] \Bigg\} d\xi, \tag{55}$$

и для него справедлива оценка

$$\|p_1(x,y,z,t)\| \leqslant P_0 \frac{\chi\chi_0^2 + (1+\omega)^3}{2}. \tag{56}$$

Итак, имеет место

Теорема 5. Пусть выполнены условия (54), тогда единственное решение задачи фильтрации без начального условия (52)–(53) дается в явном виде формулой (55), и для него справедлива оценка (56).

Литература

[1] Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / отв. ред. П.Я. Кочина. М.: Наука, 1969. 546 с.

[2] Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.

[3] Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. М.: Недра, 1993. 416 с.

[4] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.

[5] Майдебор В.Н. Особенности разработки нефтяных месторождений с трещиноватыми коллекторами. М.: Недра, 1980. 288 с.

[6] Данфорд Н., Щварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Иностр. лит., 1962. 896 с.

[7] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

[8] Умаров Х.Г. Смешанная задача в банаховом пространстве для аналога уравнения диффузии, не разрешенного относительно производной по времени // Известия вузов. Сер.: Математика. 1992. № 4. С. 100–103.

[9] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

[10] Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А. Красносельский [и др.]. М.: Наука, 1966. 500 с.

Поступила в редакцию 19/I/2012;
в окончательном варианте — 19/I/2012.

EXPLICIT SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM IN ANISOTROPIC SEMISPACE WITH BRIGHTLY EXPRESSED VERTICAL PERMEABILITY FOR BARENBLATT–ZHELTOV–KOCHINA EQUATION

© 2012 Kh.G. Umarov[3]

For Barenblatt–Zheltov–Kochina model presentation of filtering of liquids in fissured-porous rocks the explicit solution of the mixed problem in anisotropic semispace with brightly expressed vertical permeability is found by reduction of the considered problem of filtering to the solution of the abstract initial boundary-value problem in Banach space.

Key words: filtering of liquids in fissured-porous rocks, strongly continuous semi-groups of operators.

Paper received 19/I/2012.
Paper accepted 19/I/2012.

[3]Umarov Khasan Galsanovich (`umarov50@mail.ru`), Dept. of Differential Equations, Chechen State University, Grozny, 364037, Russian Federation.