

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ МЕДЛЕННЫХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАЛЯРИИ

© 2012 Е.А. Тропкина¹

В работе рассмотрена модель распространения малярии Росса-Макдональда. Произведена редукция этой модели на основе параметрического задания медленного инвариантного многообразия, в результате чего построена упрощенная модель, которая с высокой точностью описывает поведение решений исходной системы.

Ключевые слова: инвариантные многообразия, сингулярные возмущения, асимптотическое разложение.

1. Параметрическое задание инвариантного многообразия

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, \varepsilon), \quad (1.1)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = g(x, y, \varepsilon), \quad (1.2)$$

где x и y — векторы из евклидовых пространств \mathbb{R}^m и \mathbb{R}^n , $t \in (-\infty, +\infty)$ — переменная времени, ε — малый положительный параметр, f и g — вектор-функции, определенные, непрерывные по совокупности переменных и достаточно гладкие при всех $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Здесь D — некоторая область в пространстве \mathbb{R}^n .

Положив $\varepsilon = 0$ в (1.1), (1.2), получим вырожденную систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, 0), \quad (1.3)$$

$$0 = g(x, y, 0). \quad (1.4)$$

Во многих задачах невозможно найти корень уравнения $g(x, y, 0) = 0$ в явном виде, поскольку это уравнение оказывается либо трансцендентным, либо полиномом высокой степени относительно y . Зачастую решение уравнения (1.4) удается записать в параметрической форме [1]

¹Тропкина Елена Андреевна (elena_a.85@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$x = \chi_0(v), \quad y = \varphi_0(v), \quad (1.5)$$

где $v \in \mathbb{R}^m$, и имеет место тождество

$$g(\chi_0(v), \varphi_0(v), 0) = 0, \quad v \in \mathbb{R}^m. \quad (1.6)$$

В таком случае и медленные инвариантные многообразия целесообразно искать в параметрическом виде

$$x = \chi(v, \varepsilon), \quad y = \varphi(v, \varepsilon), \quad (1.7)$$

где $v \in \mathbb{R}^m$, $\chi(v, 0) = \chi_0$, $\varphi(v, 0) = \varphi_0$. Движение по медленному инвариантному многообразию описывается уравнением

$$\dot{v} = F(v, \varepsilon), \quad (1.8)$$

где функция $F(v, \varepsilon)$ будет определена ниже.

Будем искать функции χ , φ , F в виде асимптотических разложений [4]

$$\begin{aligned} \chi(v, \varepsilon) &= \chi_0(v) + \varepsilon \chi_1(v) + \dots + \varepsilon^k \chi_k(v) + \dots, \\ \varphi(v, \varepsilon) &= \varphi_0(v) + \varepsilon \varphi_1(v) + \dots + \varepsilon^k \varphi_k(v) + \dots, \\ F(v, \varepsilon) &= F_0(v) + \varepsilon F_1(v) + \dots + \varepsilon^k F_k(v) + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

с учетом (1.8) из уравнений

$$\frac{d\chi}{dv} F = f(\chi, \varphi, \varepsilon), \quad (1.10)$$

$$\frac{d\varphi}{dv} F = g(\chi, \varphi, \varepsilon). \quad (1.11)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_0}{dv} F_0 &= f(\chi_0, \varphi_0, 0), \quad g(\chi_0, \varphi_0, 0) = 0, \\ \frac{d\chi_1}{dv} F_1 &= f_x(\chi_0, \varphi_0, 0) \chi_1 + f_y(\chi_0, \varphi_0, 0) \varphi_1 + f_1, \\ \frac{d\varphi_0}{dv} F_0 &= g_x(\chi_0, \varphi_0, 0) \chi_1 + g_y(\chi_0, \varphi_0, 0) \varphi_1 + g_1. \end{aligned}$$

Здесь $f_1 = f_\varepsilon(\chi_0, \varphi_0, 0)$, $g_1 = g_\varepsilon(\chi_0, \varphi_0, 0)$.

В уравнения (1.10), (1.11) входят неизвестные функции χ , φ , F . Следовательно, в зависимости от конкретной задачи можно считать одну из этих функций или какие-либо m компонентов функций χ , φ и F известными, а все остальные находить из уравнений (1.10), (1.11). Более того, можно на разных этапах определения коэффициентов разложений (1.9) считать известными коэффициенты разложений разных функций или различные m компонентов этих коэффициентов. Если правая часть имеет заданную структуру, а значит, F можно считать известной функцией, то из уравнений (1.10), (1.11) можно найти коэффициенты разложений χ и φ . Если, например, заранее задать χ , из этих уравнений можно найти коэффициенты разложений φ и F . В случае явного задания медленного инвариантного многообразия $y = h(x, \varepsilon)$ получаем соотношения

$$v = x, \quad \chi = v, \quad \varphi = h(v, \varepsilon), \quad F = f(v, h(v, \varepsilon), \varepsilon),$$

а (1.9) принимает вид

$$\varepsilon \frac{dh}{dv} f(v, h, \varepsilon) = g(v, h, \varepsilon), \quad h = h(v, \varepsilon).$$

Если $\dim x = \dim y$ и в качестве параметра v взят y , получаем соотношение $\varphi = v$ и

$$\varepsilon \frac{d\chi}{dv} F = f(\chi, v, \varepsilon), \quad \varepsilon F = g(\chi, v, \varepsilon).$$

Отсюда, в свою очередь, получаем уравнение для χ

$$\varepsilon \frac{d\chi}{dv} g(\chi, v, \varepsilon) = f(\chi, v, \varepsilon),$$

из которого при $\det\left(\frac{d\chi_0}{dv}\right) \neq 0$ однозначно находим коэффициенты асимптотического разложения функции χ .

2. Математическая модель распространения малярии

Малярия — это заразная болезнь человека, возбудители которых передаются кровососущими членистоногими (насекомые и клещи). Малярию вызывает паразит *Plasmodium* (род паразитических простейших, известно около двухсот видов, из них по меньшей мере десять паразитируют на человеке, прочие паразитируют на других позвоночных. В жизненном цикле плазмодиев два хозяина: позвоночное и комар). С этим паразитом человек сталкивается после укусов зараженных комаров-самок из рода *Anopheles*.

Малярия давно стала бедствием для людей. Исключительно высокий уровень смертности в некоторых регионах привел к естественному отбору, даже ценой повышенного риска потенциально смертельной деформации эритроцитов у некоторых потомков. В частности, гены, которые обеспечивают устойчивость к малярии, когда они появляются в гетерозиготных по S-гену особях, как известно, приводят к серповидно-клеточной анемии и другим заболеваниям крови, когда они появляются в гомозиготной по S-гену форме.

Тропическая малярия является ведущей причиной смертности во всем мире, и математические модели распространения малярии имеют долгую и богатую историю, начиная с Росса [2].

Пусть u_1 и u_2 обозначают плотность неинфицированных людей генотипа AA и генотипа AS соответственно. Кроме того, пусть v_1, v_2 — плотность населения зараженных особей каждого генотипа, z — доля насекомых с плазмодием. Доля людей генотипа AS в популяции составляет $w = \frac{u_2 + v_2}{N}$, где $N = u_1 + v_1 + u_2 + v_2$ — численность населения. Частота S-гена $q = w/2$ и частота A-гена $p = 1 - q$. Предположим, что соотношение количества людей и комаров является постоянной величиной c . Обозначим через P_i долю людей, рожденных в популяции, каждого генотипа: $P_1 = p^2$, $P_2 = 2pq$.

Передача малярии между человеком и комарами регулируются основными эпидемиологическими показателями. Перечислим все переменные и параметры в таблице.

Изменения в плотности населения, связанные с определенным инфекционным статусом каждого генотипа, описываются набором из пяти обыкновенных диффе-

Таблица

Обозначение	Описание
$i = 1$	Генотип AA
$i = 2$	Генотип AS
u_i	Количество неинфицированных людей генотипа i
v_i	Количество зараженных людей генотипа i
x_i	Доля людей, которые заражены и имеют генотип i
y_i	Доля людей, которые не инфицированы и имеют генотип i
z	Доля комаров с плазмодием
w	Частота людей генотипа AS
q	Численность населения
θ_i	Вероятность человека генотипа i заразиться малярией после укуса комара
γ_i	Скорость восстановления после малярии людей генотипа i
a	Доля укусов комаров из расчета количества комаров на человека
c	Количество комаров на человека
φ_i	Вероятность приобретения комарами плазмодия после укуса человека генотипа i
δ	Средняя продолжительность жизни инфицированного комара
m	Уровень естественной смертности населения
α_i	Уровень смертности людей генотипа i , вызванный малярией
ν	Уровень смертности людей от серповидно-клеточной анемии
$b(N)$	Уровень рождаемости людей
P_1	Доля людей, рожденных с генотипом AA
P_2	Доля людей, рожденных с генотипом AS

ренциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= P_i b(N)N - m_i u_i - a\theta_i c z u_i + \gamma_i v_i, \\ \dot{v}_i &= \theta_i a c z u_i - (m_i + \gamma_i + \alpha_i) v_i, \quad i = 1, 2, \\ \dot{z} &= (1 - z)(a\varphi_1 \frac{v_1}{N} + a\varphi_2 \frac{v_2}{N}) - \delta z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $m_1 = m_0$, $m_2 = m + \nu$.

Для удобства введем новые переменные $x_i = u_i/N$, $y_i = v_i/N$, а также $w = x_2 + y_2 = 2q$, $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = 1$, $x_1 + y_1 = 1 - w$, $\beta_{hi} = a\theta_i c$, $\beta_{vi} = a\varphi_i$, $i = 1, 2$.

Тогда получим систему, эквивалентную системе (2.1), которая описывает важные эпидемиологические, демографические и генетические характеристики населения:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \beta_{h1} z (1 - w - y_1) - (m_1 + \gamma_1 + \alpha_1) y_1 - y_1 \dot{N}/N, \\ \dot{y}_2 &= \beta_{h2} z (w - y_2) - (m_2 + \gamma_2 + \alpha_2) y_2 - y_2 \dot{N}/N, \\ \dot{z} &= (1 - z)(\beta_{v1} y_1 + \beta_{v2} y_2) - \delta z, \\ \dot{w} &= P_2 b(N) - \alpha_2 y_2 - m_2 w - w \dot{N}/N, \\ \dot{N} &= N((P_1 + P_2) b(N) - m_1(1 - w) - m_2 w - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Учтем, что $P_1 + P_2 = 1 - w^2/2$, $(1 - w)P_2$, $b(N) = b(1 - N/K)$, где b — максимальная рождаемость, когда численность населения мала, K — коэффициент пропорциональности. Примем $m_i = \varepsilon \tilde{m}_i$, $\alpha_i = \varepsilon \tilde{\alpha}_i$ и $b = \varepsilon \tilde{b}$, $\tau = \varepsilon t$, где $\varepsilon > 0$ —

малый параметр. Тогда система (2.2) примет вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{dy_1}{d\tau} &= \beta_{h1}z(1 - y_1 - w) - \gamma_1 y_1 - \varepsilon y_1((\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)w + \tilde{\alpha}_1(1 - y_1) - \\
&\quad - \tilde{\alpha}_2 y_2 + (1 - \frac{w^2}{2})\tilde{b}(N)), \\
\varepsilon \frac{dy_2}{d\tau} &= \beta_{h2}z(w - y_2) - \gamma_2 y_2 - \varepsilon y_2((\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)(w - 1) - \tilde{\alpha}_1 y_1 + \\
&\quad + \tilde{\alpha}_2(1 - y_2) + (1 - \frac{w^2}{2})\tilde{b}(N)), \\
\varepsilon \frac{dz}{d\tau} &= (1 - z)(\beta_{v1}y_1 + \beta_{v2}y_2) - \delta z, \\
\frac{dw}{d\tau} &= (\frac{-1}{2}w^2(1 - \frac{w}{2})\tilde{b}(N) + (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)w(1 - w) + \tilde{\alpha}_1 w y_1 - \tilde{\alpha}_2(1 - w)y_2), \\
\frac{dN}{d\tau} &= N((1 - \frac{w^2}{2})\tilde{b}(N) - \tilde{m}_1(1 - w) - \tilde{m}_2 w - \tilde{\alpha}_1 y_1 - \tilde{\alpha}_2 y_2).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Медленная поверхность описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
0 &= \beta_{h1}z(1 - y_1 - w) - \gamma_1 y_1, \\
0 &= \beta_{h2}z(w - y_2) - \gamma_2 y_2, \\
0 &= (1 - z)(\beta_{v1}y_1 + \beta_{v2}y_2) - \delta z,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

или

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{T_{h1}z(R_2 - 1 - z(R_2 + T_{h2}))}{(1 - z)(R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))}, \\
y_2 &= \frac{T_{h2}z(1 - R_1 + z(R_1 + T_{h1}))}{(1 - z)(R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))}, \\
w &= \frac{(1 + T_{h2}z)(1 - R_1 + z(R_1 + T_{h1}))}{(1 - z)(R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $T_{hi} = \frac{\beta_{hi}}{\gamma_i}$, $T_{hi} = \frac{\beta_{hi}\beta_{vi}}{\delta\gamma_i}$.

В качестве параметров удобно выбрать переменные z , N и искать инвариантное многообразие в виде

$$\begin{aligned}
y_1 &= \tilde{y}_1(z, N, \varepsilon), \\
y_2 &= \tilde{y}_2(z, N, \varepsilon), \\
w &= \tilde{w}(z, N, \varepsilon),
\end{aligned}$$

тогда уравнения инвариантности можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial N} \frac{dN}{d\tau} &= \beta_{h1}z(1 - y_1 - w) - \gamma_1 y_1 - \varepsilon y_1((\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)w + \tilde{\alpha}_1(1 - y_1) - \\
&\quad - \tilde{\alpha}_2 y_2 + (1 - \frac{w^2}{2})\tilde{b}(N)), \\
\varepsilon \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial N} \frac{dN}{d\tau} &= \beta_{h2}z(w - y_2) - \gamma_2 y_2 - \varepsilon y_2((\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)(w - 1) - \tilde{\alpha}_1 y_1 + \\
&\quad + \tilde{\alpha}_2(1 - y_2) + (1 - \frac{w^2}{2})\tilde{b}(N)), \\
\varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \frac{dz}{d\tau} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{w}}{\partial N} \frac{dN}{d\tau} &= (\frac{-1}{2}w^2(1 - \frac{w}{2})\tilde{b}(N) + (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)w(1 - w) + \tilde{\alpha}_1 w y_1 - \\
&\quad - \tilde{\alpha}_2(1 - w)y_2),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

из которых однозначно находим коэффициенты асимптотического разложения функций. С этой целью подставим асимптотические представления

$$\begin{aligned}
y_1 &= \tilde{y}_1(z, N, \varepsilon) = \tilde{y}_{10}(z, N) + \varepsilon \tilde{y}_{11}(z, N) + \varepsilon^2 \tilde{y}_{12}(z, N) + \varepsilon^3 \dots, \\
y_2 &= \tilde{y}_2(z, N, \varepsilon) = \tilde{y}_{20}(z, N) + \varepsilon \tilde{y}_{21}(z, N) + \varepsilon^2 \tilde{y}_{22}(z, N) + \varepsilon^3 \dots, \\
w &= \tilde{w}(z, N, \varepsilon) = \tilde{w}_0(z, N) + \varepsilon \tilde{w}_1(z, N) + \varepsilon^2 \tilde{w}_2(z, N) + \varepsilon^3 \dots
\end{aligned}$$

в уравнения (2.6) и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, найдем

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{10} &= \frac{T_{h1}z(R_2 - 1 - z(R_2 + T_{h2}))}{(1 - z)(R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))}, \\
\tilde{y}_{20} &= \frac{T_{h2}z(1 - R_1 + z(R_1 + T_{h1}))}{(1 - z)(R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))}, \\
\tilde{w}_0 &= \frac{(1 + T_{h2}z)(1 - R_1 + z(R_1 + T_{h1}))}{(1 - z)(R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{11} &= \frac{\delta AR_2 + BT_{v2}T_{h1}\gamma_1 - C(1-z)[\delta R_2 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2}T_{h1} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}] - T_{h1}C(T_{h2}z+1)}{\delta(R_2(T_{h1}z+1) - R_1(T_{h2}z+1))}, \\
 \tilde{y}_{21} &= \frac{\delta BR_1 + AT_{v1}T_{h2}\gamma_2 - C(1-z)[\delta R_1 \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + T_{v1}T_{h2} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z}] - T_{h2}C(T_{h1}z+1)}{\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))}, \\
 \tilde{w}_1 &= \frac{AT_{v1}(T_{h2}z+1) + BT_{v2}(T_{h1}z+1) - C(1-z)[T_{v1}(T_{h2}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2}(T_{h1}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}]}{z\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))} + \\
 &+ \frac{C(T_{h2}z+1)(T_{h1}z+1)}{z\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))},
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_{12} &= \frac{\delta A_1 R_2 + B_1 T_{v2} T_{h1} \gamma_1 - C_1 (1-z) [\delta R_2 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2} T_{h1} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}] - T_{h1} C_1 (T_{h2} z + 1)}{\delta(R_2(T_{h1}z+1) - R_1(T_{h2}z+1))}, \\
 \tilde{y}_{22} &= \frac{\delta B_1 R_1 + A_1 T_{v1} T_{h2} \gamma_2 - C_1 (1-z) [\delta R_1 \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + T_{v1} T_{h2} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z}] - T_{h2} C_1 (T_{h1} z + 1)}{\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))},
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

где $T_{vi} = \frac{\beta_{vi}}{\gamma_i}$,

$$\begin{aligned}
 A &= -(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)\tilde{w}_0\tilde{y}_{10} - \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{10} - \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{10}(1 - \tilde{y}_{10}) + \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{10}\tilde{y}_{20} - \tilde{y}_{10}\tilde{b}(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{4}), \\
 B &= -(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)(\tilde{w}_0 - 1)\tilde{y}_{20} + \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{10}\tilde{y}_{20} - \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{20}^2(1 - \tilde{y}_{20}) - \tilde{y}_{20}\tilde{b}(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{4}), \\
 \tilde{C} &= -\frac{1}{2}\tilde{b}\tilde{w}_0^2(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0}{2}) + \tilde{w}_0(1 - \tilde{w}_0)(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2) + \tilde{\alpha}_1\tilde{w}_0\tilde{y}_{10} - \tilde{\alpha}_2(1 - \tilde{w}_0)\tilde{y}_{20}, \\
 C &= \tilde{C}/(\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z}(1 - z)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} &= \frac{T_{h1}(R_2 - R_1)(R_2 - 1) - 2zT_{h1}(R_2 + T_{h2})(R_2 - R_1)}{(1-z)^2(R_2 - R_1 + z(R_2T_{h1} - R_1T_{h2}))^2} + \\
 &+ \frac{z^2T_{h1}(R_2(R_2 - R_1 - T_{h1} + T_{h2}) - T_{h1}(T_{h1}R_2 - T_{h2}R_1))}{(1-z)^2(R_2 - R_1 + z(R_2T_{h1} - R_1T_{h2}))^2}, \\
 \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} &= \frac{T_{h2}(R_2 - R_1)(1 - R_1) + 2zT_{h2}(R_1 + T_{h1})(R_2 - R_1)}{(1-z)^2(R_2 - R_1 + z(R_2T_{h1} - R_1T_{h2}))^2} + \\
 &+ \frac{z^2T_{h2}(R_1(-R_2 + R_1 + T_{h1} - T_{h2}) + T_{h1}(T_{h1}R_2 - T_{h2}R_1))}{(1-z)^2(R_2 - R_1 + z(R_2T_{h1} - R_1T_{h2}))^2}, \\
 \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} &= \frac{T_{h2}R_2 - T_{h1}R_1R_2 - R_1T_{h1} + R_2 - R_1 + R_2R_1T_{h1} + 2z[T_{h1}T_{h2}(R_2 - R_1) + R_1R_2(T_{h2} - T_{h1}) + R_2T_{h1}]}{(1-z)^2(R_2 - R_1 + z(R_2T_{h1} - R_1T_{h2}))^2} - \\
 &- \frac{2zR_1T_{h2} + z^2[-R_1T_{h1}^2 + R_2T_{h1}^2 + R_1R_2(T_{h1} - T_{h2}) + T_{h1}T_{h2}(R_2T_{h1} - R_1T_{h2})]}{(1-z)^2(R_2 - R_1 + z(R_2T_{h1} - R_1T_{h2}))^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -\frac{\partial \tilde{y}_{11}}{\partial z}(1 - z)(\beta_{v1}\tilde{y}_{11} + \beta_{v2}\tilde{y}_{21}) - \frac{\partial \tilde{y}_{11}}{\partial N}N(\tilde{b}(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{4}) - \tilde{m}_1(1 - \tilde{w}_0) - \\
 &- \tilde{m}_2\tilde{w}_0 - \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{10} - \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{20}) - (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)(\tilde{w}_1\tilde{y}_{10} + \tilde{w}_0\tilde{y}_{11}) + \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{11}(2\tilde{y}_{10} - 1) + \\
 &+ \tilde{\alpha}_2(\tilde{y}_{10}\tilde{y}_{11} + \tilde{y}_{20}\tilde{y}_{11}) - \tilde{b}(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{4})\tilde{y}_{11} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{10}\tilde{w}_0\tilde{w}_1, \\
 B_1 &= -\frac{\partial \tilde{y}_{21}}{\partial z}(1 - z)(\beta_{v1}\tilde{y}_{11} + \beta_{v2}\tilde{y}_{21}) - \frac{\partial \tilde{y}_{21}}{\partial N}N(\tilde{b}(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{4}) - \tilde{m}_1(1 - \tilde{w}_0) - \\
 &- \tilde{m}_2\tilde{w}_0 - \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{10} - \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{20}) - (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)(\tilde{w}_1\tilde{y}_{20} + \tilde{w}_0\tilde{y}_{21}) + \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{21}(2\tilde{y}_{20} - 1) + \\
 &+ \tilde{\alpha}_1(\tilde{y}_{20}\tilde{y}_{11} + \tilde{y}_{21}\tilde{y}_{10}) - \tilde{b}(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{4})\tilde{y}_{21} - \frac{1}{2}\tilde{y}_{20}\tilde{w}_0\tilde{w}_1, \\
 \tilde{C}_1 &= -\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z}(1 - z)(\beta_{v1}\tilde{y}_{11} + \beta_{v2}\tilde{y}_{21}) - \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial N}N(\tilde{b}(1 - \frac{N}{K})(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{4}) - \tilde{m}_1(1 - \tilde{w}_0) - \\
 &- \tilde{m}_2\tilde{w}_0 - \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{10} - \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{20}) - (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)\tilde{w}_1(2\tilde{w}_0 - 1) + \tilde{\alpha}_2(\tilde{y}_{20}\tilde{w}_1 - (1 - \tilde{w}_0)\tilde{y}_{10}) + \\
 &+ \tilde{\alpha}_1(\tilde{w}_0\tilde{y}_{11} + \tilde{w}_1\tilde{y}_{10}) - \frac{1}{2}\tilde{b}\tilde{w}_0(1 - \frac{N}{K})(2\tilde{w}_1 - \frac{3}{4}\tilde{w}_0\tilde{w}_1), \\
 C_1 &= \tilde{C}_1/(\frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z}(1 - z)).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{y}_{11}}{\partial z} &= \frac{\delta \frac{\partial A}{\partial z} R_2 + \frac{\partial B}{\partial z} T_{v2} T_{h1} \gamma_1 - (\frac{\partial C}{\partial z}(1-z) - C) [\delta R_2 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2} T_{h1} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + T_{h1}(T_{h2}z+1)]}{\delta(R_2(T_{h1}z+1) - R_1(T_{h2}z+1))} - \\
 &- \frac{C \left[(1-z)(\delta R_2 \frac{\partial^2 \tilde{y}_{10}}{\partial z^2} + T_{v2} T_{h1} \frac{\partial^2 \tilde{y}_{20}}{\partial z^2} + T_{h1} T_{h2}) \right]}{\delta(R_2(T_{h1}z+1) - R_1(T_{h2}z+1))} - \frac{(\delta AR_2 + BT_{v2}T_{h1}\gamma_1)(R_2T_{h1} - R_1T_{h2})}{\delta(R_2(T_{h1}z+1) - R_1(T_{h2}z+1))^2} - \\
 &- \frac{(C(1-z) [\delta R_2 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2} T_{h1} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}] + T_{h1} C(T_{h2}z+1))(R_2T_{h1} - R_1T_{h2})}{\delta(R_2(T_{h1}z+1) - R_1(T_{h2}z+1))^2}, \\
 \frac{\partial \tilde{y}_{21}}{\partial z} &= \frac{\delta \frac{\partial B}{\partial z} R_1 + \frac{\partial A}{\partial z} T_{v1} T_{h2} \gamma_2 - (\frac{\partial C}{\partial z}(1-z) - C) [\delta R_1 \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + T_{v1} T_{h2} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{h2}(T_{h1}z+1)]}{\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))} - \\
 &- \frac{C \left[(1-z)(\delta R_1 \frac{\partial^2 \tilde{y}_{20}}{\partial z^2} + T_{v1} T_{h2} \frac{\partial^2 \tilde{y}_{10}}{\partial z^2} + T_{h1} T_{h2}) \right]}{\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))} - \frac{(\delta BR_1 + AT_{v1}T_{h2}\gamma_2)(R_1T_{h2} - R_2T_{h1})}{\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))^2} - \\
 &- \frac{(C(1-z) [\delta R_1 \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + T_{v1} T_{h2} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z}] - T_{h2} C(T_{h1}z+1))(R_1T_{h2} - R_2T_{h1})}{\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial z} &= \frac{\frac{\partial A}{\partial z} T_{v1}(T_{h2}z+1) + \frac{\partial B}{\partial z} T_{v2}(T_{h1}z+1) - \frac{\partial C}{\partial z} (1-z) [T_{v1}(T_{h2}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2}(T_{h1}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}]}{z\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))} + \\ &+ \frac{-\frac{\partial C}{\partial z} (T_{h2}z+1)(T_{h1}z+1) + AT_{v1} + BT_{v2} + C(T_{v1}(T_{h2}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2}(T_{h1}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}) + CT_{h1}(T_{h2}z+1)}{z\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))} + \\ &- C(1-z) \left(T_{v1}(T_{h2}z+1) \frac{\partial^2 \tilde{y}_{10}}{\partial z^2} + T_{v2}(T_{h1}z+1) \frac{\partial^2 \tilde{y}_{20}}{\partial z^2} + T_{v1}T_{h2} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2}T_{h1} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} \right) + CT_{h2}(T_{h1}z+1) \\ &+ \frac{z\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))}{z^2\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))^2} + \\ &+ \frac{(AT_{v1}(T_{h2}z+1) + BT_{v2}(T_{h1}z+1))(R_1(2T_{h2}z+1) - R_2(2T_{h1}z+1))}{z^2\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))^2} + \\ &+ \frac{(-C(1-z) [T_{v1}(T_{h2}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2}(T_{h1}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}] + C(T_{h2}z+1)(T_{h1}z+1))(R_1(2T_{h2}z+1) - R_2(2T_{h1}z+1))}{z^2\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{y}_{11}}{\partial N} &= \frac{\delta \frac{\partial \tilde{A}}{\partial N} R_2 + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial N} T_{v2} T_{h1} \gamma_1 - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial N} (1-z) [\delta R_2 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2} T_{h1} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}] - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial N} T_{h1}(T_{h2}z+1)}{\delta(R_2(T_{h1}z+1) - R_1(T_{h2}z+1))}, \\ \frac{\partial \tilde{y}_{21}}{\partial N} &= \frac{\delta \frac{\partial \tilde{B}}{\partial N} R_1 + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial N} T_{v1} T_{h2} \gamma_2 - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial N} (1-z) [\delta R_1 \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + T_{v1} T_{h2} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z}] - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial N} T_{h2}(T_{h1}z+1)}{\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))}, \\ \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial N} &= \frac{\frac{\partial \tilde{A}}{\partial N} T_{v1}(T_{h2}z+1) + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial N} T_{v2}(T_{h1}z+1) - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial N} (1-z) [T_{v1}(T_{h2}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + T_{v2}(T_{h1}z+1) \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z}]}{z\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))} + \\ &+ \frac{\frac{\partial \tilde{C}}{\partial N} (T_{h2}z+1)(T_{h1}z+1)}{z\delta(R_1(T_{h2}z+1) - R_2(T_{h1}z+1))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{y}_{10}}{\partial z^2} &= \frac{2T_{h1}(R_2 - R_1) \{ [(R_1 T_{h2} - R_2 T_{h1})(R_2 - 1) - (T_{h2} + 1)(R_2 - R_1)] + 3z(R_2 - 1)(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}) \}}{(1-z)^3 (R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))^3} + \\ &+ \frac{2T_{h1}(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}) \{ -3z^2(R_2 - R_1)(R_2 + T_{h2}) + z^3 [R_2(R_2 - R_1 + T_{h2} - T_{h1}) + T_{h2}(R_1 T_{h2} - R_2 T_{h1})] \}}{(1-z)^3 (R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))^3}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{y}_{20}}{\partial z^2} &= \frac{2T_{h2}(R_2 - R_1) \{ [(R_1 T_{h2} - R_2 T_{h1})(1 - R_1) + (T_{h1} + 1)(R_2 - R_1)] + 3z(1 - R_1)(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}) \}}{(1-z)^3 (R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))^3} + \\ &+ \frac{2T_{h2}(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}) \{ 3z^2(R_2 - R_1)(R_1 + T_{h1}) + z^3 [R_1(-R_2 + R_1 + T_{h1} - T_{h2}) + T_{h1}(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2})] \}}{(1-z)^3 (R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))^3}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial z^2} &= \frac{2(R_2 - R_1)^2 (T_{h2} + 1)(T_{h1} + 1) + 2(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}) [(T_{h1} + 1)(R_1 - R_2) + (1 - R_2)R_1 (T_{h1} - T_{h2})]}{(1-z)^3 (R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))^3} + \\ &+ \frac{6(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}) [z((R_2 - R_1)(1 + T_{h1}) - R_1(1 - R_1)(T_{h1} - T_{h2})) + z^2(R_2 T_{h1}(1 - R_1 + T_{h2}) - R_1 T_{h2})]}{(1-z)^3 (R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))^3} + \\ &+ \frac{2(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}) [3z^2 R_1 T_{h2} (R_2 - T_{h1}) + z^3 (R_1 R_2 (T_{h1} - T_{h2}) + R_2 T_{h1}^2 - R_1 T_{h2}^2 - T_{h1} T_{h2} R_1 R_2 + T_{h2}^2 R_1^2)]}{(1-z)^3 (R_2 - R_1 + z(R_2 T_{h1} - R_1 T_{h2}))^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} &= -(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2) \left(\frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} \tilde{w}_0 + \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial z^2} \tilde{y}_{10} \right) - \tilde{\alpha}_1 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} (1 - 2\tilde{y}_{10}) + \tilde{\alpha}_2 (\tilde{y}_{10} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + \tilde{y}_{20} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z}) + \\ &+ \tilde{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right) \left(\frac{1}{2} \tilde{y}_{10} \tilde{w}_0 \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} - \left(1 - \frac{\tilde{w}_0}{4} \right) \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= -(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2) \left(\frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} (\tilde{w}_0 - 1) + \frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial z^2} \tilde{y}_{20} \right) - \tilde{\alpha}_2 \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} (1 - 2\tilde{y}_{20}) + \tilde{\alpha}_1 (\tilde{y}_{10} \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} + \\ &+ \tilde{y}_{20} \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z}) + \tilde{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right) \left(\frac{1}{2} \tilde{y}_{20} \tilde{w}_0 \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} - \left(1 - \frac{\tilde{w}_0}{4} \right) \frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= -\tilde{b} \left(1 - \frac{N}{K} \right) \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} \tilde{w}_0 \left(1 - \frac{3}{4} \tilde{w}_0 \right) + (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2) \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} (1 - 2\tilde{w}_0) + \tilde{\alpha}_1 (\tilde{w}_0 \frac{\partial \tilde{y}_{10}}{\partial z} + \tilde{y}_{10} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z}) - \\ &- \tilde{\alpha}_2 \left(\frac{\partial \tilde{y}_{20}}{\partial z} (1 - \tilde{w}_0) - \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} \tilde{y}_{20} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial z} &= \left(\frac{\partial \tilde{C}}{\partial z} \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} - \tilde{C} \left(\frac{\partial^2 \tilde{w}_0}{\partial z^2} (1 - z) + \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} \right) \right) / \left(\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} (1 - z) \right)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial N} &= \frac{\tilde{b}}{K} \left(1 - \frac{\tilde{w}_0}{4} \right), \\ \frac{\partial B}{\partial N} &= \frac{\tilde{b}}{K} \left(1 - \frac{\tilde{w}_0}{4} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial N} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{b}}{K} \tilde{w}_0^2 \left(1 - \frac{\tilde{w}_0}{2} \right), \\ \frac{\partial C}{\partial N} &= \frac{\partial \tilde{C}}{\partial N} / \left(\frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial z} (1 - z) \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, построено первое приближение инвариантного многообразия

$$\begin{aligned} y_1 &= \tilde{y}_{10} + \varepsilon \tilde{y}_{11} + O(\varepsilon^2), \\ y_2 &= \tilde{y}_{20} + \varepsilon \tilde{y}_{21} + O(\varepsilon^2), \\ w &= \tilde{w}_0 + \varepsilon \tilde{w}_1 + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

движение по которому описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= (1-z)(\beta_{v1}\tilde{y}_{11} + \beta_{v2}\tilde{y}_{21}) + \varepsilon(1-z)(\beta_{v1}\tilde{y}_{12} + \beta_{v2}\tilde{y}_{22}) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dN}{d\tau} &= N[(1 - \frac{\tilde{w}_0^2}{A})\tilde{b}(1 - N/K) - \tilde{m}_1(1 - \tilde{w}_0) - \tilde{m}_2\tilde{w}_0 - \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{10} - \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{20}] + \\ &+ N\varepsilon[-\frac{1}{2}\tilde{w}_0\tilde{w}_1\tilde{b}(1 - N/K) + \tilde{m}_1\tilde{w}_1 - \tilde{m}_2\tilde{w}_1 - \tilde{\alpha}_1\tilde{y}_{11} - \tilde{\alpha}_2\tilde{y}_{21}] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где функции $\tilde{y}_{10}, \tilde{y}_{11}, \tilde{y}_{12}, \tilde{y}_{20}, \tilde{y}_{21}, \tilde{y}_{22}, \tilde{w}_0, \tilde{w}_1$ определены в (2.7), (2.8) и (2.9).

Ниже приведены иллюстрации компонент решения задач (2.3), (2.10) и (2.11) на плоскости $(t, z(t))$ и $(t, N(t))$ соответственно при $\varepsilon = 0, 1$ (рис. 2.1) и при $\varepsilon = 0, 01$ (рис. 2.2)

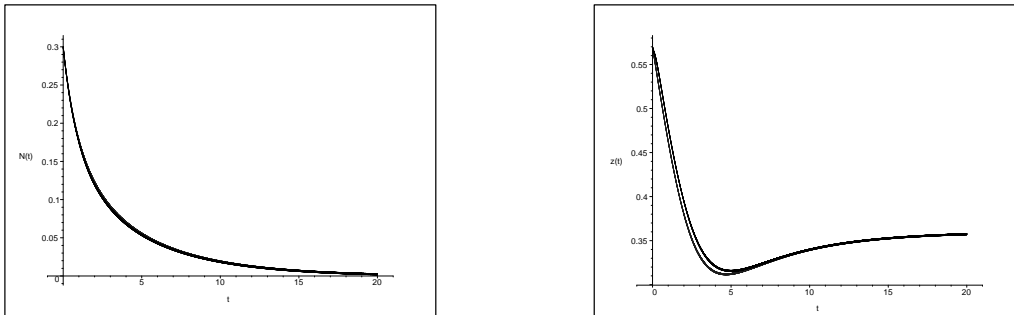


Рис. 2.1. Проекция компонент решения задачи (2.3) и задачи (2.10), (2.11) на плоскости $(t, z(t))$ и $(t, N(t))$ соответственно при $\varepsilon = 0, 1$

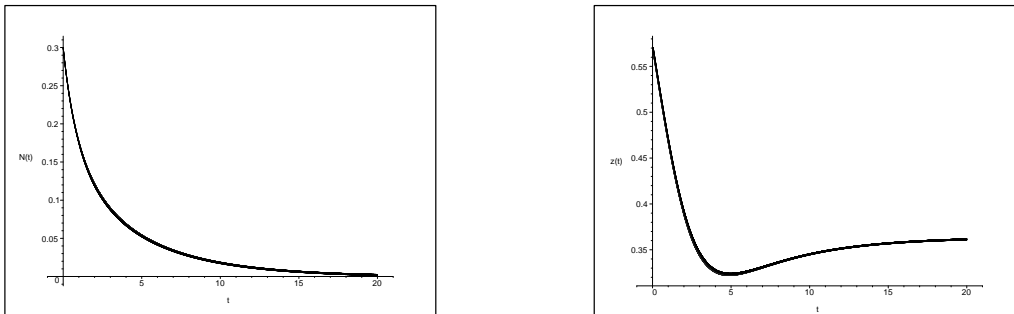


Рис. 2.2. Проекция компонент решения задачи (2.3) и задачи (2.10), (2.11) на плоскости $(t, z(t))$ и $(t, N(t))$ соответственно при $\varepsilon = 0, 01$

В итоге произведена редукция динамической модели. В результате получена упрощенная модель, которая описывает поведение решения пятимерной сингулярно возмущенной системы (2.3).

Литература

- [1] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике М.: Физматлит, 2010. 319 с.
- [2] Ross R. The Prevention of Malaria. London: John Murray, 1911.
- [3] Feng Z., Smith D.L., McKenzie F.E., Levin S.A. Coupling ecology and evolution: malaria and the S-gene across time scales // Mathematical Biosciences. 2004. № 189.

- [4] Sobolev V.A. Decomposition of control systems with singular perturbations // Proc. 10th Congr. IFAC. Munich, 1987. V. 8. P. 172–176.
- [5] Гольдштейн В. М., Соболев В. А. Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние, 1988.
- [6] McKenzie F.E. Why model malaria? // Parasitol. Today. 2000. № 16. P. 511.
- [7] Кононенко Л.И., Соболев В.А. Асимптотическое разложение медленных интегральных многообразий // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35. № 6. С. 1264.
- [8] Соболев В.А., Тропкина Е.А. Асимптотические разложения медленных инвариантных многообразий и редукция моделей химической кинетики // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 1. С. 81–96

Поступила в редакцию 15/VII/2012;
в окончательном варианте — 15/VII/2012.

PARAMETERIZATION OF SLOW INVARIANT MANIFOLDS IN THE MODEL OF THE SPREAD OF MALARIA

© 2012 Е.А. Тропкина²

In the paper the Ross Macdonald model of the distribution of malaria is considered. The order reduction of this model on the basis of parametric slow invariant manifolds is realized. As a result a simplified model which describes with a high accuracy the behavior of the solution of the original system is obtained.

Key words: invariant manifolds, singular perturbation, asymptotic expansion.

Paper received 15/VII/2012.
Paper accepted 15/VII/2012.

²Tropkina Elena Andreevna (elena_a.85@mail.ru), the Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.