УДК 517.987

КРИТЕРИИ РАВНОМЕРНОЙ ИСЧЕРПЫВАЕМОСТИ СЕМЕЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ВНЕШНИХ МЕР

© 2012 Т.А. Срибная[1]

Критерии равномерной исчерпываемости доказаны для последовательности исчерпывающих внешних мер, заданных на не сигма-полном классе множеств и принимающих значения в топологической абелевой группе.

Ключевые слова: внешняя мера, равномерная исчерпываемость семейства функций множества, мультипликативный класс множеств, f_1-свойство.

Введение

Ряд значительных результатов в теории функций множества связан с такой формой равномерной непрерывности семейства мер, как равномерная исчерпываемость. В связи с этим возникает задача нахождения условий, необходимых и достаточных для равномерной исчерпываемости семейства функций множества.

Для последовательности конечных обобщенных мер, заданных на сигма-кольце множеств, критерий равномерной исчерпываемости получен Ф. Кафьеро [1]. В работе [2] критерий Ф. Кафьеро доказан для последовательности аддитивных функций, заданных и обладающих свойством исчерпываемости на сигма-кольце множеств, со значениями в топологической абелевой группе. В работах [3; 4] этот результат распространен на случай, когда функции определены на ортомодулярной решетке со свойством субсеквенциальной интерполяции, аддитивны и принимают значения в равномерной полугруппе [3] и топологической группе [4], в работе [5] — на случай, когда функции определены на сигма-ортополном частично упорядоченном множестве и принимают значения в топологическом пространстве, не наделенном никакими алгебраическими операциями.

Основными результатами данной работы являются теорема 1 и теорема 2 (обобщение критерия Кафьеро), содержащие условия, необходимые и достаточные для того, чтобы семейство функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, заданных на не сигма-полном классе множеств и принимающих значения в топологической абелевой группе, было равномерно исчерпывающим при условии, что каждая функция $\varphi \in \Phi$ является исчерпывающей.

[1]Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnaya@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1. Обозначения и основные определения

Пусть T — некоторое множество, Σ — непустой класс подмножеств множества T, $\varnothing \in \Sigma$.

Последовательность попарно непересекающихся множеств $\{E_n\} \subset \Sigma$ называют спектром. Говорят, что класс множеств Σ сигма-суммируемый, если $\varnothing \in \Sigma$, и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ справедливо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$. Пусть $G = (G, +, \Theta)$ — топологическая абелева группа, $\mathcal{H}$ — фундаментальная система окрестностей Θ в G.

Определение. Функцию множества $\varphi : \Sigma \to G$ называют k-внешней мерой, $k \in \mathbb{N}$, если $\varphi(\varnothing) = \Theta$, и для любой окрестности $V \in \mathcal{H}$ и для любых непересекающихся множеств $E, F \in \Sigma$ справедливо утверждение: если $\varphi(E) \in V$, то $\varphi(E \cup F) - \varphi(F) \in k \cdot V$, где $k \cdot V = \{v_1 + ... + v_k, v_i \in V, i = \overline{1,k}\}$.

Примерами k-внешних мер являются аддитивные функции множества ($k = 1$), внешние числовые меры, квазилипшицевые функции множества.

Для любой функции $\varphi : \Sigma \to G$ и для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\widetilde{\varphi}(E) = \{\varphi(F),\ \ F \subset E,\ \ F \in \Sigma\}.$$

Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \to G$ исчерпывающая, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(E_n) = \Theta. \tag{1.1}$$

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \to G$ равномерно исчерпывающие, если для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ соотношение (1.1) выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$.

2. Мультипликативные классы множеств с f_1-свойством

Мультипликативным классом множеств (m-классом) называют непустой класс множеств, замкнутый относительно образования разности.

Из этого определения следует, что, если $\Sigma - m$-класс, то

1) $\varnothing \in \Sigma$,

2) если $A, B \in \Sigma$, то $A \cap B \in \Sigma$,

3) если $A, B, C \in \Sigma$, причем $A \subset C$, $B \subset C$, то $A \cup B \in \Sigma$.

Говорят, что класс множеств Σ обладает f_1-свойством, если для любых последовательностей попарно непересекающихся множеств $\{E_n\}$ и $\{F_n\}$ из Σ, для которых $E_n \cap F_k = \varnothing$ при всех $n, k \in \mathbb{N}$, существуют бесконечное множество $P \subset \mathbb{N}$ и множество $F \in \Sigma$ такие, что $F_k \subset F$ при всех $k \in P$ и $F \cap E_n = F \cap F_k = \varnothing$ при $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N} \backslash P$ [6].

В работе [6] Ф. Фринке показал, что f_1-свойство на алгебре строго слабее:

— свойства секвенциальной полноты, введенного Р. Хейдоном [7] и используемого А. Прекупани [8];

— f-свойства, введенного и используемого А. Мольто [9];

— свойства интерполяции, введенного В. Бейдом, П. Кюртисом [10] и используемого В. Шахермауером [11].

Г. Сивер [12] показал, что свойство интерполяции строго слабее сигма-полноты.

Предложение 1. Если Σ — некоторый класс множеств, обладающий f_1-свойством, то для любого спектра $\{E_n\}$ из Σ существуют последовательность $\{P_i\}$, где P_i — бесконечное подмножество множества $\mathbb{N}, P_i \cap P_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и спектр $\{F_i\} \subset \Sigma$ такие, что $E_n \subset F_i$ при всех $n \in P_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — некоторый спектр из Σ. Представим множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел в виде счетного объединения попарно непересекающихся бесконечных множеств:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i, \;\; N_i \cap N_j = \varnothing, \;\; i \neq j.$$

Так как класс множеств Σ обладает f_1-свойством, то существуют бесконечное множество $P_1 \subset N_1$ и множество $F_1 \in \Sigma$ такие, что

$$E_n \subset F_1, \;\; n \in P_1, \;\; F_1 \cap E_n = \varnothing, \;\; n \in \bigcup_{i=2}^{\infty} N_i.$$

Аналогично найдем бесконечное множество $P_2 \subset N_2$ и множество $F_2 \in \Sigma$ такие, что

$$E_n \subset F_2, \;\; n \in P_2, \;\; F_2 \cap E_1 = \varnothing, \;\; F_2 \cap E_n = \varnothing, \;\; n \in \bigcup_{i=3}^{\infty} N_i.$$

Процесс продолжим неограниченно. Получим последовательности $\{P_i\}$, $P_i \subset \mathbb{N}$, и спектр $\{F_i\} \subset \Sigma$, удовлетворяющие условию предложения.

Лемма 1. Пусть $\Sigma - m$-класс с f_1-свойством. Если каждая функция множества $\varphi_n : \Sigma \to G$, $n \in \mathbb{N}$, исчерпывающая на Σ, то для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ существуют подспектр $\{E_{kj}\}$ и множество $E \in \Sigma$ такие, что $E_{kj} \subset E$ и

$$\widetilde{\varphi}_{k_j}(E \backslash (E_{k_1} \cup ... \cup E_{k_j})) \subset U, \;\; j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\{E_n\}$ — спектр из Σ.

Так как функция множества φ_1 исчерпывающая на Σ, то, в силу предложения 1, существуют бесконечное множество $P_1 \subset \mathbb{N}$ и множество $F_1 \in \Sigma$ такие, что $E_n \subset F_1$ при всех $n \in P_1$ и

$$\widetilde{\varphi}_1(F_1) \subset U.$$

Положим $n_1 = minP_1$. Так как функция множества φ_{n_1} исчерпывающая на Σ, то, в силу предложения 1, существуют бесконечное множество $P_2 \subset P_1$, $n_1 \notin P_2$, и множество $F_2 \in \Sigma$, $F_2 \subset F_1$ такие, что $E_n \subset F_2$ при всех $n \in P_2$ и

$$\widetilde{\varphi}_{n_1}(F_2) \subset U.$$

Положим $n_2 = minP_2$. Продолжим процесс по индукции, получим убывающую последовательность $\{P_i\}$ бесконечных подмножеств множества $\mathbb{N}$, где $n_i = minP_i \notin P_{i+1}$, и убывающую последовательность множеств $\{F_i\} \subset \Sigma$, для которых $E_n \subset F_i$ при всех $n \in P_i$ и

$$\widetilde{\varphi}_{n_i}(F_{i+1}) \subset U, \;\; i \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Покажем, что существуют последовательность номеров $\{i_j\}$ и множество $F \in \Sigma$ такие, что $E_{n_{i_j}} \subset F$ и

$$F \backslash (E_{n_{i_1}} \cup ... \cup E_{n_{i_j}}) \subset F_{i_j+1}, \;\; j \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Будем считать, что $F_i \cap E_n = \varnothing$ при всех $n < n_i$. Если это не так, то заменим F_i на $F_i \backslash (E_1 \cup ... \cup E_{n_{i-1}})$, $i \in \mathbb{N}$.

Положим

$$\mathcal{D} = F_i \backslash (F_{i+1} \cup E_{n_i}), \; i \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим два спектра $\{\mathcal{D}_i\}$ и $\{E_{n_i}\}$. Ясно, что $\mathcal{D}_k \cap E_{n_i} = \varnothing$ при всех $k, i \in \mathbb{N}$.

В силу f_1-свойства, существуют бесконечное множество номеров $P = \{i_j\}$ и множество $F \in \Sigma$, $F \subset F_1$ такие, что $E_{n_i} \subset F$ при всех $i \in P$ и $\mathcal{D}_k F = E_{n_i} F = \varnothing$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N} \setminus P$.

Заметим, что множество $F \setminus (E_{n_{i_1}} \cup ... \cup E_{n_{i_j}})$ содержится в F_1 и дизъюнктно со всеми множествами $\mathcal{D}_1, ..., \mathcal{D}_{i_j}$, $E_{n_1}, ..., E_{n_{i_j}}$.

Справедливость соотношения (2.2) вытекает теперь из равенства

$$\mathcal{D}_1 \cup ... \cup \mathcal{D}_{i_j} \cup E_{n_1} \cup ... \cup E_{n_{i_j}} = F_1 \setminus F_{i_j+1}.$$

Из (2.1) и (2.2) следует

$$\widetilde{\varphi}_{n_{i_j}}(F \setminus (E_{n_{i_1}} \cup ... \cup E_{n_{i_j}}) \subset U, \; j \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, подспектр $\{E_{n_{i_j}}\}$ и множество $F \in \Sigma$ — искомые.

3. Критерии равномерной исчерпываемости

Теорема 1. Пусть Σ — некоторый класс множеств. Пусть каждая функция множества последовательности $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n : \Sigma \to G$, исчерпывающая. Для того чтобы функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ обладали свойством равномерной исчерпываемости, необходимо и достаточно, чтобы для любой возрастающей последовательности номеров $\{p_k\}$ функции множества последовательности

$$\mu_k(E) = \varphi_{p_{k+1}}(E) - \varphi_{p_k}(E)$$

обладали свойством равномерной исчерпываемости.

Доказательство.

Достаточность. Предположим противное. Тогда существуют спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$ и окрестность $U \in \mathcal{H}$, для которых

$$\varphi_n(E_n) \notin U, \; n = 1, 2, ... \; . \tag{3.1}$$

Пусть $V \in \mathcal{H}$, $V + V \subset U$. Положим $p_1 = 1$. Так как функция φ_{p_1} исчерпывающая, то существует номер p_2, $p_2 > p_1$, для которого

$$\varphi_{p_1}(E_{p_2}) \in V. \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) следует

$$\varphi_{p_2}(E_{p_2}) - \varphi_{p_1}(E_{p_2}) \notin V.$$

Так как функция φ_{p_2} исчерпывающая, то существует номер p_3, $p_3 > p_2$, для которого

$$\varphi_{p_2}(E_{p_3}) \in V.$$

Отсюда и из (3.1) следует

$$\varphi_{p_3}(E_{p_3}) - \varphi_{p_2}(E_{p_3}) \notin V.$$

Продолжив процесс, построим подпоследовательность номеров $\{p_k\}$, для которых $p_{k+1} > p_k$ и

$$\varphi_{p_{k+1}}(E_{p_{k+1}}) - \varphi_{p_k}(E_{p_{k+1}}) \notin V, \;\; k = 1, 2, \dots \;,$$

что противоречит условию.

Так как необходимость очевидна, то теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\Sigma - m$-класс с f_1-свойством, пусть $\varphi_n : \Sigma \to G$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность исчерпывающих k-внешних мер.

Для равномерной исчерпываемости функций множества последовательности $\{\varphi_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:
(I) для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ существуют такой номер n_0 и такое множество $E_{k_0} \in \{E_n\}$, что

$$\varphi_n(E_{k_0}) \in U, \;\; n > n_0.$$

Доказательство.
Достаточность. Предположим противное. Тогда существуют окрестность $U \in \mathcal{H}$ и спектр $\{E_n\} \subset \Sigma$, для которых

$$\varphi_n(E_n) \notin U, \;\; n = 1, 2\dots \;. \tag{3.3}$$

Для спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$, в силу предложения 1, существуют такие последовательность $\{P_i\}$, где P_i — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ и $P_i \cap P_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и спектр $\{F_i\} \subset \Sigma$, что $E_n \subset F_i$ при всех $n \in P_i$, $i \in \mathbb{N}$.

Переобозначив множества спектра $\{E_n\}_{n \in P_1}$ и функции множества $\{\varphi_n\}_{n \in P_1}$, будем работать со спектром $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и последовательностью функций множества $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, являющимися, соответственно, подспектром спектра $\{E_n\}$ и подпоследовательностью последовательности φ_n. Очевидно, что $G_n \subset F_1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\nu_n(G_n) \notin U, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Для окрестности $U \in \mathcal{H}$ найдем окрестность $V \in \mathcal{H}$ такую, что $V = -V$ и $(k+1)V \subset U$.

Пусть $V_1 \in \mathcal{H}$, $(k+1)V_1 \subset V$, $V_1 = -V_1$.
Построим последовательность окрестностей нуля $\{V_n\}_{n=2}^{\infty} \subset \mathcal{H}$, $(k+1)V_n \subset V_{n-1}$.

По условию теоремы существуют такие номера p_1, N_1, что

$$\nu_n(G_{p_1}) \in V_1, \;\; n > N_1.$$

Аналогично найдем номера p_2 и N_2 такие, что $p_2 > p_1$, $p_2 > N_1$, $N_2 > N_1$ и

$$\nu_n(G_{p_2}) \in V_2, \;\; n > N_2.$$

Продолжив процесс, по индукции построим такие возрастающие последовательности номеров $\{p_k\}$, $\{N_k\}$, что $p_k > N_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$ и

$$\nu_{p_m}(G_{p_k}) \in V_k, \;\; m > k.$$

Покажем, что

$$\nu_{p_3}(G_{p_1} \cup G_{p_2}) \in V.$$

Действительно, так как

$$\nu_{p_3}(G_{p_1}) \in V_1,$$

то

$$\nu_{p_3}(G_{p_1} \cup G_{p_2}) - \nu_{p_3}(G_{p_2}) \in k \cdot V_1.$$

Учитывая, что

$$\nu_{p_3}(G_{p_2}) \in V_2,$$
$$V_2 \subset V_1,$$

получим

$$\nu_{p_3}(G_{p_1} \cup G_{p_2}) \in (k+1)V_1.$$

Таким образом

$$\nu_{p_3}(G_{p_1}) \in V,$$
$$\nu_{p_3}(G_{p_2}) \in V,$$
$$\nu_{p_3}(G_{p_1} \cup G_{p_2}) \in V.$$

Продолжив процесс неограниченно, покажем, что для $m = 2, 3, ...$ справедливо

$$\nu_{p_m}(\bigcup_{k \in I} G_{p_k}) \in V, \ \ I \subset \overline{1, m-1}.$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$\nu_m(\bigcup_{k \in I} G_k) \in V, \ \ I \subset \overline{1, m-1}, \ \ m = 2, 3, ... \ , \ \ G_k \subset F_1, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Так как ν_m, $m = 2, 3, ...$, последовательность k-внешних мер, то из (3.3) и (3.4), в силу выбора окрестности $V \in \mathcal{H}$, следует, что

$$\nu_m(G_m \cup (\bigcup_{k \in I} G_k)) \notin V, \ \ I \subset \overline{1, m-1}, \ \ m = 2, 3, ... \ . \tag{3.5}$$

Для спектра $\{G_n\} \subset \Sigma$ и окрестности $V_1 \in \mathcal{H}$, в силу леммы 1, найдем подспектр $\{G_{n_i}\}$ и множество $A_i \in \Sigma$ такие, что $G_{n_i} \subset A_1 \subset F_1$, $i \in \mathbb{N}$, и

$$\widetilde{\nu}_{n_i}(A_1 \setminus G_{n_1} \cup ... \cup G_{n_i}) \subset V_1, \ \ i \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6), в силу выбора окрестности $V_1 \in \mathcal{H}$ и определения k-внешней меры, получим

$$\nu_{n_i}(A_1) \notin V_1, \ \ i = 2, 3, ... \ .$$

Применим данный процесс к каждому из подспектров $\{E_n\}_{n \in P_i}$ спектра $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, в результате получим спектр $\{A_i\} \subset \Sigma$. Для спектра $\{A_i\} \subset \Sigma$ и окрестности $V_1 \in \mathcal{H}$ условие (I) теоремы не выполняется.

Так как необходимость условия (I) очевидна, то теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\Sigma - m$-класс с f_1-свойством, пусть $\varphi_n : \Sigma \to G$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность исчерпывающих аддитивных функций множества.

Для равномерной исчерпываемости функций множества последовательности $\{\varphi_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (I).

Замечание 1. В случае, когда $\{\varphi_n\}$ — последовательность конечных обобщенных мер, заданных на сигма-кольце, следствие 1 было доказано Ф. Кафьеро ([1], теорема 1).

В случае, когда $\{\varphi_n\}$ — последовательность исчерпывающих аддитивных функций множества, заданных на сигма-кольце, со значениями в топологической абелевой группе, следствие 1 было доказано Г. Вебером [2, следствие 4.3].

Пусть $X = (X, |\cdot|)$ — нормированное пространство. Функция множества φ, $\varphi : \Sigma \to X$, называется квазилипшицевой, если существует число N такое, что для любых непересекающихся множеств E, $F \in \Sigma$, $E \cup F \in \Sigma$ справедливо

$$|\varphi(E \cup F) - \varphi(F)| \leqslant N|\varphi(E)|.$$

Следствие 2. Пусть Σ – m-класс с f_1-свойством, X — нормированное пространство, пусть $\varphi_n : \Sigma \to X$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность исчерпывающих квазилипшицевых функций множества.

Для того чтобы функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ были равномерно исчерпывающими, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ и для любого спектра $\{E_n\} \subset \Sigma$ существовали такой номер n_0 и такое множество $E_{k_0} \in \{E_n\}$, что

$$|\varphi_n(E_{k_0})| < \varepsilon, n > n_0.$$

Замечание 2. Теорема 2, а также следствия 1, 2 справедливы и в том случае, когда Σ — сигма-суммируемый класс множеств.

Действительно, пусть функции множества последовательности $\{\varphi_n\}$ заданы на сигма-суммируемом классе множеств Σ и удовлетворяют условию (I) теоремы 2, тогда для произвольного спектра $\{E_n\}$ из Σ класс множеств

$$\mathcal{A} = \{\varnothing,\ E \in \Sigma :\ E = \bigcup_{n \in J} E_n,\ J \subset \mathbb{N}\}$$

является сигма-алгеброй (и тем более m-классом с f_1-свойством), на которой функции множества $\varphi_n : \mathcal{A} \to G$ удовлетворяют условию (I), а это значит, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_k(E_n) = \Theta$$

равномерно относительно $k = 1, 2, \dots$.

Литература

[1] Cafiero F. Sulle famigli di funzione additive d'insieme uniformente continyl // Rend. Accad. Naz. Lincei. 1952. V. 181. № 12. P. 155–162.

[2] Weber H. Compactness in spaces of group-valued contents, the Vitali-Hahn-Saks theorem and Nikodym's boundness theorem // Rocky Mountain J. Math. 1986. V. 16. № 2. P. 253–275.

[3] Andrea A.B., Lucia P. The Brooks-Jewett Theorem on an Orthomodular Lattice // Journ. of Math. Anal. and Appl. 1991. V. 154. P. 507–522.

[4] Lucia P., Traynor T. Non commutative groupvalued measures on an orthomodular poset // Math. Japonica. 1994. V. 40. № 2. P. 309–315.

[5] Срибная Т.А. Критерий Кафьеро на ортомодулярном частично упорядоченном множестве // Вестник СамГУ. 2002. № 4(26). С. 23–30.

[6] Friniche F.I. The Vitali-Hahn-Saks theorem for Boolean algebras with the subsequential interpolation property // Proc. Amer. Math. Soc. 1984. V. 92. № 3. P. 362–366.

[7] Haydon R. Anon-reflexive Grothendich Space that does not contain l_∞ // Israel J. Math. 1981. V. 40. № 1. P. 65–73.

[8] Precupanu A.M. On cetrain Nikodym type theorem for multimeasures // An. st. Univ. "Al. I. Cuza"Iasi, s. I. Mat. 1989. V. 35. P. 93–100.

[9] Molto A. On the Vitali-Hahn-Saks theorem // Proc. Royal. Soc. 1981. Sect. A90. P. 163–173.

[10] Bade W.G., Curtis P.S. The Wedderburn decomposition of commutative Banach algebras // Amer. J. Math. 1960. V. 82. № 4. P. 851–856.

[11] Schachermayer W. On some classical measure-theoretic theorems for non-sigma-complete Boolean algebras // Dissertation Math. 1982. V. 214. P. 1–33.

[12] Seever G.L. Measures on F-spase // Frans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 133. P. 267–280.

Поступила в редакцию 5/*III*/2012;
в окончательном варианте — /*III*/2012.

UNIFORM EXHAUSTIVITY CRITERIA OF A FAMILY OF VECTOR OUTER MEASURES

© 2012 T.A. Sribnaya[2]

The uniform exhaustivity criteria are proved for a sequence of exhaustive outer measures defined on the non-sigma-complete class of sets and taking values in an Abelian topological group.

Key words: outer measure, uniform exhaustivity of a family of set functions, multiplicative class of sets, f_1-property.

Paper received 5/*III*/2012.
Paper accepted 5/*III*/2012.

[2]Sribnaya Tatyana Arcadievna (sribnaya@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.