УДК 517.928.4

МЕДЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СО СМЕНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

© 2012 Т.В. Симонова[1]

Данная работа является обобщением теоремы о медленных интегральных многообразиях со сменой устойчивости на случай векторной быстрой переменной. Приведены условия существования склеивающей функции. Решена задача построения интегрального многообразия со сменой устойчивости систем с векторной быстрой и медленной переменной.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, склеивающая функция, интегральное многообразие, смена устойчивости.

Введение

Теория сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений интенсивно развивается, и ее методы активно применяются для решения широкого круга задач из разнообразных областей естествознания. Это обусловлено тем, что такие системы естественным образом возникают при моделировании и исследовании объектов различной природы, для которых характерна способность совершать одновременно быстрые и медленные движения [1]. Основы теории сингулярных возмущений были заложены в работах А.Н. Тихонова. Обычное предположение теории состоит в том, что основной функциональный определитель быстрой подсистемы отличен от нуля. Однако во многих прикладных задачах это условие нарушается, и возникают различные критические ситуации, например, появляются траектории-утки. В последнее время интерес к ним существенно возрос, так как выяснился факт, что эти траектории моделируют критические явления различной природы [2].

Итак, основным объектом рассмотрения является сингулярно возмущенная система [3] обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, y, z, \varepsilon), \ \ \dot{y} = g(x, y, z, \varepsilon), \ \ \epsilon\dot{z} = p(x, y, z, \alpha, \varepsilon), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр, α — скалярный параметр, x — скалярная переменная, y и z — векторные переменные размерности n и $m+1$, соответственно. В случае $n = 0$, $m = 0$ наличие дополнительного параметра α позволяет строить решения, называемые траекториями-утками. Под траекторией-уткой можно понимать траекторию сингулярно возмущенной системы, которая проходит

[1]Симонова Татьяна Викторовна (simonovatv@mail.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

вначале по устойчивому интегральному многообразию, а затем по неустойчивому, причем оба раза проходятся расстояния порядка единицы.

Использование траекторий-уток для моделирования критических режимов позволяет решить важные задачи теории горения [4; 5]. А анализ некоторых задач вызвал необходимость доказательства новых теорем о траекториях-утках [6; 7].

Напомним, что под медленной поверхностью системы (1) понимается поверхность, описываемая уравнением

$$p(x, y, z, \alpha, 0) = 0. \tag{2}$$

Лист медленной поверхности устойчив, если собственные числа матрицы $\partial p/\partial z(x, y, \phi(x, y, \alpha), \alpha, 0)$, где $z = \phi(x, y, \alpha)$ — изолированное решение уравнения (2), имеют отрицательные вещественные части. Если хотя бы у одного из собственных чисел этой матрицы вещественная часть становится положительной, то лист теряет устойчивость. Листы медленной поверхности разделяются так называемыми поверхностями срыва, имеющими размерность вектора y, на которых

$$\det \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, \phi(x, y, \alpha), \alpha, 0) = 0.$$

В ε–окрестности устойчивого и неустойчивого листов медленной поверхности лежат устойчивое и неустойчивое медленные интегральные многообразия. Медленное интегральное многообразие представляет собой гладкую инвариантную поверхность, движение по которой осуществляется со скоростью порядка единицы.

Наличие дополнительного скалярного параметра α обеспечивает условия для того, чтобы устойчивое и неустойчивое интегральные многообразия можно было склеить в одной точке поверхности срыва. Именно через эту точку проходит траектория, которая является уткой. Из вышесказанного следует, что траектория-утка содержит одномерное медленное интегральное многообразие, склеенное из неустойчивой и устойчивой частей.

Однако в том или ином моделируемом процессе возможны возмущения, в результате которых траектория может отклониться от рассчитанной траектории-утки, проходящей через единственную точку склейки устойчивого и неустойчивого инвариантных многообразий. Таким образом склеивая устойчивое и неустойчивое медленные инвариантные многообразия в одной точке поверхности срыва, нельзя гарантировать безопасность процесса. Данную проблему можно решить, если осуществить склейку этих многообразий во всех точках поверхности срыва одновременно при помощи уже не параметра, а склеивающей функции, получив тем самым инвариантную поверхность со сменой устойчивости. При внешнем возмущении траектория решения системы уравнений в этом случае просто перейдет с одной траектории-утки на другую, также описывающую безопасный режим. В данной работе решается задача построения инвариантного многообразия со сменой устойчивости систем с быстрыми и медленными переменными.

1. Основные результаты

1.1. Постановка задачи

Рассматриваются автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений для переменных x, y, z, которые после исключения независимой переменной времени приводятся к виду:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{dy}{dx} = Y(x,y,z_1,z_2,\varepsilon), \quad y \in R^n, \quad x \in R;\\
&\varepsilon \tfrac{dz_1}{dx} = 2x\beta(x,y)z_1 + Z_1(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) + \alpha(y,\varepsilon), \quad z_1 \in R;\\
&\varepsilon \tfrac{dz_2}{dx} = B(x,y)z_2 + Z_2(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) + \alpha(y,\varepsilon)b(x,y,\varepsilon), \quad z_2 \in R^m.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Здесь $B(x,y)$ — блочно-диагональная матрица $(m \times m)$ порядка, собственные числа $\lambda_i(x,y)$ которой удовлетворяют условию $Re\lambda_i(x,y) \leqslant -2\omega < 0$, $i = 1,2,...,m$, $b(x,y,\varepsilon)$ — векторная функция, ε — малый скалярный параметр, $\alpha(y,\varepsilon)$, $\beta(x,y)$ — скалярные функции, $Z_1(x,y,z_1,z_2,\varepsilon)$ — скалярная функция, а $Z_2(x,y,z_1,z_2,\varepsilon)$ — векторная размерность m. Функции $Y, Z_1, Z_2, \beta, \alpha, b, B$ предполагаются непрерывными и подчиняющимися неравенствам:

$$\| Y(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) \| \leqslant k, \tag{4}$$

$$|Z_1(x,y,z_1,z_2,\varepsilon)| \leqslant M(\varepsilon^2 + \varepsilon \| z \| + \| z \|^2), \tag{5}$$

$$\| Z_2(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) \| \leqslant M(\varepsilon^2 + \varepsilon \| z \| + \| z \|^2), \tag{6}$$

$$\| Y(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) - Y(x,\bar{y},\bar{z_1},\bar{z_2},\varepsilon) \| \leqslant M(\| y - \bar{y} \| + \| z - \bar{z} \|), \tag{7}$$

$$
\begin{gathered}
|Z_1(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) - Z_1(x,\bar{y},\bar{z_1},\bar{z_2},\varepsilon)| \leqslant\\
\leqslant M[(\varepsilon + \| \tilde{z} \|)||z - \bar{z}|| + (\varepsilon^2 + \varepsilon \| \tilde{z} \| + \| \tilde{z} \|^2)||y - \bar{y}||],
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
||Z_2(x,y,z_1,z_2,\varepsilon) - Z_2(x,\bar{y},\bar{z_1},\bar{z_2},\varepsilon)|| \leqslant\\
\leqslant M[(\varepsilon + \| \tilde{z} \|)||z - \bar{z}|| + (\varepsilon^2 + \varepsilon \| \tilde{z} \| + \| \tilde{z} \|^2)||y - \bar{y}||],
\end{gathered} \tag{9}
$$

где $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$, $||\tilde{z}|| = max\{||z||, ||\bar{z}||\}$,

$$|\alpha(y,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 K, \quad 0 < \beta_1 \leqslant \beta(x,y) \leqslant \beta_2 < +\infty, \quad ||b(x,y,\varepsilon)|| \leqslant \mu, \tag{10}$$

$$||B(x,y) \leqslant M||, \quad |\alpha(y,\varepsilon) - \alpha(\bar{y},\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 L||y - \bar{y}||, \tag{11}$$

$$|\beta(x,y) - \beta(x,\bar{y})| \leqslant \gamma||y - \bar{y}||, \tag{12}$$

$$||b(x,y,\varepsilon) - b(x,\bar{y},\varepsilon)|| \leqslant \nu||y - \bar{y}||, \tag{13}$$

$$||B(x,y) - B(\bar{x},\bar{y})|| \leqslant M(|x - \bar{x}| + ||y - \bar{y}||). \tag{14}$$

Здесь $k, K, M, L, \beta_1, \beta_2, \gamma, \mu, \nu$ — некоторые положительные константы. Обозначим через H полное метрическое пространство непрерывных функций

$$h(x,y,\varepsilon) = \begin{pmatrix} h_1(x,y,\varepsilon) \\ h_2(x,y,\varepsilon) \end{pmatrix}, h_1 \in R, h_2 \in R^m,$$

действующих из $R \times R^n$ в R^{m+1} и удовлетворяющих неравенствам:

$$|h_1(x,y,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^{3/2} q, \tag{15}$$

$$|h_1(x,y,\varepsilon) - h_1(x,\bar{y},\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^{3/2}\delta||y - \bar{y}||, \tag{16}$$

$$|h_2(x,y,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 q, \tag{17}$$

$$|h_2(x,y,\varepsilon) - h_2(x,\bar{y},\varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2\delta||y - \bar{y}|| \tag{18}$$

с метрикой

$$\rho(h,\bar{h}) = \sup_{x,y} ||h(x,y,\varepsilon) - \bar{h}(x,y,\varepsilon)||.$$

Отметим, что в силу неравенств (15)–(18) существует некоторая константа C такая, что

$$||h(x,y,\varepsilon)|| \leqslant \varepsilon^{3/2} qC, \tag{19}$$

$$||h(x,y,\varepsilon) - h(x,\bar{y},\varepsilon)|| \leqslant \varepsilon^{3/2}\delta C||y-\bar{y}||. \tag{20}$$

На элементах пространства H зададим оператор $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$ по формулам:

$$T_1 h(x,y,\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^{\infty} e^{2\int_s^x t\beta(t,\varphi(t,x))dt/\varepsilon}[Z_1(\cdot)+\alpha(\varphi(s,x),\varepsilon)]ds, & x \geqslant 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{2\int_s^x t\beta(t,\varphi(t,x))dt/\varepsilon}[Z_1(\cdot)+\alpha(\varphi(s,x),\varepsilon)]ds, & x < 0, \end{cases}$$

$$T_2 h(x,y,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{x} W_\varphi(x,s,\varepsilon)[Z_2(\cdot)+\alpha(\varphi(s,x),\varepsilon)b(s,\varphi(s,x),\varepsilon)]ds,$$

где $Z_{1,2}(\cdot) = Z_{1,2}(s,\varphi(s,x),h_1(s,\varphi(s,x),\varepsilon),h_2(s,\varphi(s,x),\varepsilon),\varepsilon)$. $W_\varphi(x,s,\varepsilon)$ — фундаментальная матрица однородного уравнения $\varepsilon\frac{dz_2}{dx} = B(x,\varphi(s,x))z_2$, удовлетворяющая условию $W_\varphi(s,s,\varepsilon) = E$. Функция $\varphi(s,x)$ определяется следующим образом. Для произвольного элемента $h \in H$ рассматривается начальная задача:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = Y(\tau,\varphi,h_1(\tau,\varphi,\varepsilon),h_2(\tau,\varphi,\varepsilon),\varepsilon), \varphi(x) = y_0, \tag{21}$$

полученная из первого уравнения (3) подстановкой h вместо z, с переобозначением y на φ и x на s. Решение этой задачи обозначим $\varphi(s,x) = \Phi(s,x,y_0,\varepsilon \mid h)$.

При определении оператора T_1 в верхней строке записан оператор, используемый для доказательства существования неустойчивых (устойчивых влево) интегральных поверхностей, а в нижней строке — оператор, используемый при доказательстве устойчивых интегральных поверхностей [8; 9].

1.2. Вспомогательные неравенства

Для краткости записи введем следующие обозначения: $\varphi_1(s,x) = \Phi(s,x,\bar{y},\varepsilon|h)$, $\varphi_2(s,x) = \Phi(s,x,y,\varepsilon|\bar{h})$. Из (21) следуют равенства

$$\varphi(s,x) = y + \int\limits_x^s Y(\eta,\varphi(\eta,x),h_1(\eta,\varphi(\eta,x),\varepsilon),h_2(\eta,\varphi(\eta,x),\varepsilon),\varepsilon)d\eta,$$

$$\varphi_1(s,x) = \bar{y} + \int\limits_x^s Y(\eta,\varphi_1(\eta,x),h_1(\eta,\varphi_1(\eta,x),\varepsilon),h_2(\eta,\varphi_1(\eta,x),\varepsilon),\varepsilon)d\eta,$$

$$\varphi_2(s,x) = y + \int\limits_x^s Y(\eta,\varphi_2(\eta,x),\bar{h}_1(\eta,\varphi_2(\eta,x),\varepsilon),\bar{h}_2(\eta,\varphi_2(\eta,x),\varepsilon),\varepsilon)d\eta.$$

Используя последние соотношения, неравенства (7), (20) и неравенство Гронуолла — Беллмана, получаем оценки:

$$||\varphi(s,x) - \varphi_1(s,x)|| \leqslant ||y-\bar{y}||e^{D|s-x|}, \tag{22}$$

$$||\varphi(s,x) - \varphi_2(s,x)|| \leqslant \frac{\rho(h,\bar{h})}{1+\varepsilon^{3/2}\delta C}(e^{D|s-x|-1}), \tag{23}$$

где

$$D \geqslant M(1+\varepsilon^{3/2}\delta C). \tag{24}$$

1.3. Существование функции $\alpha(y,\varepsilon)$

Для произвольной, но фиксированной функции $h\in H$ рассмотрим интегро-функциональное уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\int_0^s t\beta(t,\varphi(t,0))dt/\varepsilon}[Z_1(s,\varphi(s,0),h_1(s,\varphi(s,0),\varepsilon),h_2(s,\varphi(s,0),\varepsilon),\varepsilon)+\alpha(\varphi(s,0),\varepsilon)]ds=0 \tag{25}$$

относительно функции $\alpha(y,\varepsilon)$, где $\varphi(s,0)=\Phi(s,0,y,\varepsilon|h)$. Это уравнение представляет собой условие непрерывности функции T_1h при $x=0$.
Введем обозначение

$$N(x,\varphi)=2\int\limits_x^s t\beta(t,\varphi(t,x))dt.$$

Тогда из (10) следует, что

$$\beta_1 s^2\leqslant N(0,\varphi)\leqslant\beta_2 s^2. \tag{26}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$A_\varphi\alpha(y)=Q_{h,y}. \tag{27}$$

Здесь

$$A_\varphi\alpha(y)=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi)/\varepsilon}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi)/\varepsilon}\alpha(\varphi(s,0))ds, \tag{28}$$

$$Q_{h,y}=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi)/\varepsilon}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi)/\varepsilon}\times Z_1(s,\varphi(s,0),h_1(s,\varphi(s,0),\varepsilon),h_2(s,\varphi(s,0),\varepsilon),\varepsilon)ds. \tag{29}$$

Последние выражения определяют линейный оператор $A_\varphi:\alpha(y)\to A_\varphi\alpha(y)$, который удобно представить в виде суммы двух операторов $A_\varphi=I+R_\varphi$, где I – тождественный оператор, а оператор R_φ определяется выражением:

$$R_\varphi\alpha(y)=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi)/\varepsilon}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi)/\varepsilon}[\alpha(\varphi)-\alpha(y)]ds. \tag{30}$$

В силу неравенств (4), (11), (26) справедлива оценка:

$$|R_\varphi\alpha(y)|\leqslant\sqrt{\frac{\beta_2}{\varepsilon\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta_1 s^2/\varepsilon}\varepsilon^2L\times$$

$$\times||\int\limits_0^s Y(\eta,\varphi(\eta,0),h_1(\eta,\varphi(\eta,0),\varepsilon),h_2(\eta,\varphi(\eta,0),\varepsilon),\varepsilon)d\eta||ds\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{\beta_2}{\varepsilon\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta_1 s^2/\varepsilon}\varepsilon^2L(\int\limits_0^s kd\eta)ds\leqslant\varepsilon^{5/2}\frac{Lk}{\beta_1}\sqrt{\frac{\beta_2}{\pi}}.$$

Если $\varepsilon^{5/2}\frac{Lk}{\beta_1}\sqrt{\frac{\beta_2}{\pi}}<1$, то существует линейный оператор $(I+R_\varphi)^{-1}$, и для него справедлива оценка:

$$|(I+R_\varphi)^{-1}| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon^{5/2}\frac{Lk}{\beta_1}\sqrt{\frac{\beta_2}{\pi}}}. \tag{31}$$

Тогда из (27) следует:

$$\alpha(y) = (I+R_\varphi)^{-1}Q_{h,y}.$$

Покажем, что функция $\alpha(y)$, определяемая таким образом, удовлетворяет неравенствам (10), (11). Используя (5), (19) и (26), имеем:

$$|Q_{h,y}| \leqslant \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}M(\varepsilon^2+\varepsilon^{5/2}qC+\varepsilon^3q^2C^2).$$

Используя последнюю оценку и неравенство (31), получим:

$$|\alpha(y)| \leqslant \frac{\sqrt{\beta_2/\beta_1}M(\varepsilon^2+\varepsilon^{5/2}qC+\varepsilon^3q^2C^2)}{1-\varepsilon^{5/2}\frac{Lk}{\beta_1}\sqrt{\frac{\beta_2}{\pi}}}. \tag{32}$$

Оценивая каждый модуль отдельно, в итоге получим:

$$|\alpha(y)-\alpha(\bar y)| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon^{5/2}\frac{Lk}{\beta_1}\sqrt{\frac{\beta_2}{\pi}}} \times [M\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(3S+\frac{14\gamma}{\beta_1}(\varepsilon^2+\varepsilon^{5/2}qC+\varepsilon^2q^3C^2))+$$

$$+\varepsilon^2L\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(3+\frac{\gamma k\sqrt{\varepsilon}}{\beta_1^{3/2}}(9+7\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1\pi}}))]||y-\bar y||. \tag{33}$$

Пусть

$$\varepsilon^{5/2}\frac{Lk}{\beta_1}\sqrt{\frac{\beta_2}{\pi}} \leqslant \frac{1}{2}, \tag{34}$$

тогда, если выполнены неравенства

$$2M\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(1+\sqrt{\varepsilon}qC+\varepsilon q^2C^2) \leqslant K, \tag{35}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\beta_1}}M(1+\varepsilon^{3/2}\delta C) < 1, \tag{36}$$

$$2M\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(3(1+\sqrt{\varepsilon}qC+\varepsilon q^2C^2+\sqrt{\varepsilon}qC(1+\sqrt{\varepsilon}qC))+$$

$$+\frac{14\gamma}{\beta_1}(1+\sqrt{\varepsilon}qC+\varepsilon q^2C^2))+2L\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(3+\frac{\gamma k\sqrt{\varepsilon}}{\beta_1^{3/2}}(9+7\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1\pi}})) \leqslant L, \tag{37}$$

то существует функция $\alpha(y,\varepsilon)$, удовлетворяющая условиям (10), (11).
Получим теперь еще одно вспомогательное неравенство. Пусть функция $\alpha(y,\varepsilon)$ – решение уравнения (25), а функция $\bar\alpha(y,\varepsilon)$ — решение уравнения (25), где вместо $h=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ подставлена функция $\bar h=\begin{pmatrix} \bar h_1 \\ \bar h_2 \end{pmatrix}$ Имеем тождества $A_\varphi\alpha(y,\varepsilon)=Q_{h,y}$ или $(I+R_\varphi)\alpha(y,\varepsilon)=Q_{h,y}$ и $\bar A_{\varphi_2}\bar\alpha(y,\varepsilon)=\bar Q_{\bar h,y}$, или $(I+\bar R_{\varphi_2})\bar\alpha(y,\varepsilon)=\bar Q_{\bar h,y}$, где

$$\bar Q_{\bar h,y} = -\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi_2)/\varepsilon}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi_2)/\varepsilon}\times$$

$$\times Z_1(s,\varphi_2(s,0),\bar h_1(s,\varphi_2(s,0),\varepsilon),\bar h_2(s,\varphi_2(s,0),\varepsilon),\varepsilon)ds, \tag{38}$$

$$\bar A_{\varphi_2}\bar\alpha(y)=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi_2)/\varepsilon}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi_2)/\varepsilon}\bar\alpha(\varphi_2(s,0))ds, \tag{39}$$

$$\bar R_{\varphi_2}\bar\alpha(y)=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi_2)/\varepsilon}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-N(0,\varphi_2)/\varepsilon}[\bar\alpha(\varphi_2)-\bar\alpha(y)]ds. \tag{40}$$

Вычитая из первого тождества второе, после элементарных преобразований получим:

$$\alpha-\bar\alpha=(I+R_\varphi)^{-1}[Q_{h,y}-\bar Q_{\bar h,y}+(\bar R_{\varphi_2}-R_\varphi)\bar\alpha]. \tag{41}$$

Оценим почленно выражения в квадратных скобках:

$$|Q_{h,y}-\bar Q_{\bar h,y}|\leqslant M\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}(2S+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}qC+\frac{14\gamma}{\beta_1}(\varepsilon^2+\varepsilon^{5/2}qC+\varepsilon^3q^2C^2))\rho(h,\bar h), \tag{42}$$

$$|(R_\varphi-\bar R_{\varphi_2})\bar\alpha(y)|\leqslant[2\varepsilon^2L\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}+\frac{\gamma Lk\sqrt{\beta_2}\varepsilon^{5/2}}{\beta_1^2}(9+7\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1\pi}})]\rho(h,\bar h). \tag{43}$$

Таким образом, если выполнены неравенства (34) и (36), из (42) и (43) получим

$$\rho(\alpha,\bar\alpha)\leqslant 2\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}[M(2S+\varepsilon+\varepsilon^{3/2}qC+\frac{14\gamma}{\beta_1}(\varepsilon^2+\varepsilon^{5/2}qC+\varepsilon^3q^2C^2))+$$

$$+2\varepsilon^2L+\frac{\gamma Lk\varepsilon^{5/2}}{\beta_1^{3/2}}(9+7\sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1\pi}})]\rho(h,\bar h)=P\cdot\rho(h,\bar h). \tag{44}$$

1.4. Существование медленного многообразия

Найдем условия, при которых оператор $Th(x,y,\varepsilon)$ действует в пространстве H. Пусть для определенности $x\leqslant 0$. Тогда из (5), (10), (19), (26) следует:

$$|T_1h(x,y,\varepsilon)|\leqslant\frac{\varepsilon^{3/2}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta_1}}(K+M(1+\sqrt{\varepsilon}qC+\varepsilon q^2C^2)). \tag{45}$$

Далее

$$|T_1h(x,y,\varepsilon)-T_1h(x,\bar y,\varepsilon)|\leqslant\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon\beta_1}}[3/2(MS+\varepsilon^2L)+$$

$$+\frac{7\gamma}{2\beta_1}(M(\varepsilon^2+\varepsilon^{5/2}qC+\varepsilon^3q^2C^2)+\varepsilon^2K)]||y-\bar y||. \tag{46}$$

Таким образом, при выполнении неравенств

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta_1}}(K+M(1+\sqrt{\varepsilon}qC+\varepsilon q^2C^2))\leqslant q, \tag{47}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\beta_1}}[\frac{3}{2}(M(1+\sqrt{\varepsilon}qC+\varepsilon q^2C^2+\sqrt{\varepsilon}\delta C(1+\sqrt{\varepsilon}qC))+L)+$$

$$+\frac{7\gamma}{2\beta_1}(M(1+\sqrt{\varepsilon}qC+\varepsilon q^2C^2)+K)]\leqslant\delta \tag{48}$$

$T_1h(x,y,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (15), (16).

Теперь получим условия, при которых оператор $T_2h(x,y,\varepsilon)$ удовлетворяет неравенствам (17), (18). Используя (6), (10), (19), а также известную оценку

$$||W_\varphi(x,s,\varepsilon)|| \leqslant \Omega e^{-\omega(x-s)/\varepsilon}, \quad x \geqslant s, \quad \Omega > 1, \tag{49}$$

получаем

$$||T_2(x,y,\varepsilon)|| \leqslant \frac{\Omega}{\omega}(M(\varepsilon^2 + \varepsilon^{3/2}qC + \varepsilon^3 q^2C^2) + \varepsilon^2 K\mu). \tag{50}$$

Далее

$$||T_2h(x,y,\varepsilon) - T_2h(x,\bar{y},\varepsilon)|| \leqslant [\frac{\Omega(MS + \mu\varepsilon^2 L + \nu\varepsilon^2 K)}{\omega - \varepsilon M(1+\varepsilon^{3/2}\delta C)} +$$

$$+\frac{4\Omega^2 M}{\omega^2}(M(\varepsilon^2 + \varepsilon^{5/2}qC + \varepsilon^3 q^2 C^2) + \varepsilon^2 K\mu)]||y-\bar{y}||. \tag{51}$$

Таким образом, при выполнении неравенств

$$\frac{\Omega}{\omega}(M(1+\sqrt{\varepsilon}qC + \varepsilon q^2C^2) + K\mu) \leqslant q, \tag{52}$$

$$\frac{\Omega(M(1+\sqrt{\varepsilon}qC + \varepsilon q^2C^2 + \sqrt{\varepsilon}\delta C(1+\sqrt{\varepsilon}qC)) + \mu L + \nu K)}{\omega - \varepsilon M(1+\varepsilon^{3/2}\delta C)} +$$

$$+\frac{4\Omega^2 M}{\omega^2}(M(1+\sqrt{\varepsilon}qC + \varepsilon q^2C^2) + K\mu) \leqslant \delta \tag{53}$$

$T_2h(x,y,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям (17), (18).
Следовательно при выполнении условий (47), (48), (52), (53) оператор T действует в пространстве H. Ясно, что при достаточно малых значениях параметра ε существуют положительные числа q и δ, не зависящие от ε, для которых эти неравенства имеют место.

Покажем, что оператор T сжимающий. Для этого с учетом (8), (10), (11), (19), (20), (44) получим следующие оценки:

$$|T_1h(x,y,\varepsilon) - T_1\bar{h}(x,y,\varepsilon)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon\beta_1}}[MS + \varepsilon^2 L + \frac{M}{2}(\varepsilon + \varepsilon^{3/2}qC) + \frac{P}{2} +$$

$$+\frac{7\gamma}{2\beta_1}(M(\varepsilon^2 + \varepsilon^{5/2}qC + \varepsilon^3q^2C^2) + \varepsilon^2 K)]\rho(h,\bar{h}). \tag{54}$$

$$||T_2h(x,y,\varepsilon) - T_2\bar{h}(x,y,\varepsilon)|| \leqslant [\frac{\varepsilon M\Omega(MS + \varepsilon^2\mu L + \varepsilon^2\nu K)}{\omega(\omega - \varepsilon M(1+\varepsilon^{3/2}\delta C))} + \frac{\Omega(M(\varepsilon + \varepsilon^{3/2}qC) + \mu P)}{\omega} +$$

$$+(M(\varepsilon^2 + \varepsilon^{5/2}qC + \varepsilon^3q^2C^2) + \varepsilon^2 K\mu)\frac{2\Omega^2 M}{\omega^2(1+\varepsilon^{3/2}\delta C)}]\rho(h,\bar{h}). \tag{55}$$

Так как после выбора независящих от ε констант q и δ величины $S = O(\varepsilon^2)$ и $P = O(\varepsilon^2)$, то из неравенств (54) и (55) следует, что при достаточно малых значениях ε оператор T является сжимающим.
Подведя итог, отметим, что полученные выше условия обеспечивают в силу принципа сжатия существование и единственность неподвижной точки оператора T в пространстве H.
Таким образом, доказана
Теорема. Пусть выполняются условия (4)–(14). Тогда существуют такие числа q, δ, K, L, $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ существуют функция $\alpha(y,\varepsilon)$, удовлетворяющая условиям (10), (11), и соответствующее ей медленное интегральное многообразие $z = h(x,y,\varepsilon)$, удовлетворяющее условиям (19)–(20).

Литература

[1] Теория бифуркаций / В.И. Арнольд [и др.]. // Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1986. Т. 5. С. 5–218.

[2] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Редукция моделей и критические явления в макрокинетике. М.: Физматлит, 2010. 320 с.

[3] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

[4] Щепакина Е.А. Притягивающе-отталкивающие интегральные поверхности в задачах горения // Математическое моделирование. 2002. № 14:3. С. 30–42.

[5] Щепакина Е.А. Сингулярные возмущения в задаче моделирования безопасных режимов горения // Математическое моделирование. 2003. № 15:8. С. 113–117.

[6] Горелов Г.Н., Соболев В.А., Щепакина Е.А. Сингулярно возмущенные модели горения. Самара: СамВен, 1999. 185 с.

[7] Соболев В.А., Щепакина Е.А. Интегральные поверхности со сменой устойчивости // Известия РАЕН. Сер.: МММИУ. 1997. Т. 1. № 3. С. 151–175.

[8] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1975. 512 с.

[9] Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.

Поступила в редакцию 22/*IX*/2011;
в окончательном варианте — 22/*IX*/2011.

SLOW INTEGRAL MANIFOLDS WITH A CHANGE OF STABILITY

 T.V. Simonova[2]

The paper is devoted to the investigation of slow integral manifolds with a change of stability in the case of vector fast variable. The existence conditions of the gluing function are given. The problem of construction of the integral manifold with a change of stability for systems with vector fast and slow variables is solved.

Key words: singular perturbations, clutching function, integral manifold, change of stability.

Paper received 22/*IX*/2011.
Paper accepted 22/*IX*/2011.

[2]Simonova Tatyana Viktorovna (simonovatv@mail.ru), the Dept. of Differential Equations and Control Theory, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.