УДК 511.3

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

© 2012 А.Е. Коротков[1]

В работе приводится доказательство алгебраичности значений радиальных производных в точке $z = 1$ для одного класса степенных рядов.

Ключевые слова: ряд Дирихле, степенной ряд, радиальная производная.

1. Постановка задачи

Рассмотрим класс степенных рядов:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

с алгебраическими, периодическими коэффициентами, имеющими ограниченную сумматорную функцию:

$$\sum_{n \leqslant N} a_n = O(1). \tag{1.2}$$

Пусть

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \qquad g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

ряды вида (1.1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (1.2). Будем рассматривать степенные ряды, являющиеся результатом их произведения по Дирихле:

$$g(z) = g_1(z) \circ g_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \sum_{k \cdot l = n} a_k \cdot b_l. \tag{1.3}$$

Для таких рядов справедливо утверждение:

Основная теорема. Степенные ряды вида (1.3) имеют конечные радиальные производные в точке $z = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$

являющиеся алгебраическими числами.

[1]Коротков Александр Евгеньевич (korotkovae@info.sgu.ru), кафедра компьютерной алгебры и теории чисел Саратовского государственного университета, 410012, Российская Федерация, г. Саратов, ул. Астраханская, 83.

2. Доказательство

Предварительно докажем несколько утверждений.

Лемма 2.1. Пусть $g_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $g_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ — степенные ряды с периодическими коэффициентами, для которых $\sum_{n\leqslant x} a_n = O(1)$ и $\sum_{n\leqslant x} b_n = O(1)$. Тогда у степенного ряда

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n, \qquad c_n = \sum_{k\cdot l=n} a_k \cdot b_l$$

существуют конечные радиальные производные вида

$$\lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Доказательство. Сначала докажем ограниченность функции $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ в некоторой окрестности единицы ($x < 1$). Это равносильно тому, что существует n_0 такое, что при $n > n_0$ и любом натуральном p для всех $x : 1 - \delta < x < 1$ выполняется оценка

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} c_k x^k \right| < M, \tag{2.1}$$

где константа M не зависит от n, p и x.

По условию леммы, существуют n_1, n_2 и величина δ_1 такие, что при $n > n_1$, $m > n_2$, $x : 1 - \delta_1 < x < 1$ и при любых натуральных p_1, p_2 выполняются оценки

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p_1} a_k x^k \right| < M_1, \qquad \left| \sum_{l=m}^{m+p_2} b_l x^l \right| < M_2,$$

из которых следуют оценки вида:

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p_1} \sum_{l=m}^{m+p_2} a_k b_l x^{k+l} \right| < M_1 \cdot M_2. \tag{2.2}$$

Заметим, что оценки (2.2) равносильны тому, что

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p_1} \sum_{l=m}^{m+p_2} a_k b_l x^{k\cdot l} \right| < M, \tag{2.3}$$

где $n > n_3$, $m > n_4$.

Запишем сумму, стоящую в левой части неравенства (2.3), в виде

$$\sum_{k=n}^{n+p_1} \sum_{l=m}^{m+p_2} a_k b_l x^{k+l} x^{k\cdot l-(k+l)}. \tag{2.4}$$

Так как степенные ряды $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g(x)$ абсолютно сходятся при $x < 1$, то в выражении, стоящем в левой части неравенства (2.2), и в выражении (2.4) можно произвольно менять местами слагаемые.

Расположим в сумме (2.4) слагаемые в порядке неубывания показателей степеней $n \cdot l - (k + l)$ и применим к этой сумме следующую оценку:

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \lambda_n a_n \right| \leqslant \lambda_1 \cdot \max_{N_1 \leqslant N} \left| \sum_{n=1}^{N_1} a_n \right|, \qquad 0 < \lambda_N \leqslant \lambda_{N-1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1.$$

В итоге получаем оценку (2.3) и, следовательно, оценку (2.1), которая обеспечивает ограниченность функции $g(x)$ в левой окрестности единицы.

Далее, учитывая, что $g'(x) = g_1'(x) \circ g_2'(x)$, и повторив весь ход приведенных выше рассуждений, получим ограниченность производных функции $g(x)$ в некоторой левой окрестности единицы $(x < 1)$.

Отсюда следует существование конечных радиальных производных вида

$$\lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x).$$

Действительно, если $g(x) = O(1)$ и $g'(x) = O(1)$ в некоторой окрестности единицы, то существует предел вида

$$\lim_{x\to 1-0} g(x).$$

Это следует из фундаментальности последовательности $g(x_n)$, где $x_n \to 1$, $(x_n < 1)$.

Тем самым утверждение леммы 2.1 полностью доказано.

Лемма 2.2. Пусть у функции $g(x)$ существуют конечные радиальные производные вида $\alpha_n = \lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и пусть $\hat{\alpha}_n = \lim_{x\to 0+0} g^{(n)}(e^{-x})$. Тогда α_n — алгебраические числа тогда и только тогда, когда $\hat{\alpha}_n$ — алгебраические.

Доказательство.

$$\alpha_0 = \hat{\alpha}_0,$$

$$\alpha_1 = \lim_{x\to 0+0} \left(g^{(n)}\left(e^{-x}\right)\right)' = -\hat{\alpha}_1,$$

$$\alpha_2 = \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_1,$$

$$\ldots$$

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} d_{n,k}\hat{\alpha}_n,$$

где $d_{n,k}$ — целые числа для всех n и k.

Из выражения для произвольного n сразу следует утверждение леммы 2.2.

Лемма 2.3. Пусть $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/n^s$ — ряд Дирихле с периодическими алгебраическими коэффициентами, удовлетворяющими условию (1.2). Тогда $f(s)$ продолжается регулярным образом на всю комплексную плоскость, и $f(-k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ являются алгебраическими числами.

Доказательство. Рассмотрим соответствующий степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n.$$

Пусть d — период последовательности коэффициентов. Тогда

$$g(z) = \sum_{k=1}^{d} a_k z^k \sum_{m=0}^{\infty} z^{dm} = \frac{P_d(z)}{1 - z^d} = \frac{P_{d-1}(z)}{1 + z + \cdots + z^{d-1}}.$$

Таким образом, $g(z)$ — рациональная функция с алгебраическими коэффициентами, регулярная в точке $z = 1$.

Следовательно, существуют радиальные производные $\alpha_n = \lim_{x\to 1-0} g^{(n)}(x)$, которые являются алгебраическими числами. В силу леммы 2.2 $\hat{\alpha}_n = \lim_{x\to 0+0} g^{(n)}(e^{-x})$ также алгебраические.

Рассмотрим известное преобразование Меллина [1]:

$$f(s)\,\Gamma(s) = \int_0^{\infty} g\left(e^{-x}\right) x^{s-1} dx, \qquad \sigma > \sigma_0. \tag{2.5}$$

Запишем это равенство в виде

$$f(s)\,\Gamma(s) = \int_0^{\rho} g\left(e^{-x}\right) x^{s-1} dx + \int_{\rho}^{\infty} g\left(e^{-x}\right) x^{s-1} dx. \tag{2.6}$$

Для любого $\rho \geqslant \rho_0 > 0$ второй интеграл в правой части выражения (2.6) равномерно сходится в любой полосе $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_0$, следовательно, по теореме Вейерштрасса [2] он определяет целую функцию.

В первом интеграле равенства (2.6) разложим $g\left(e^{-x}\right)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$\int_0^{\rho} g\left(e^{-x}\right) x^{s-1} dx = \int_0^{\rho} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{\alpha}_k}{k!} x^{k+s-1} + O\left(x^{n+1}\right) x^{s-1}\right] dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{\hat{\alpha}_k}{k!\,(k+s)} \rho^{k+s} + \varphi(s).$$

Таким образом, в силу произвольности n, получаем продолжимость $f(s)$ регулярным образом на всю комплексную плоскость.

Возьмем вычет от обеих частей (2.5) в точках $s = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Имеем

$$\operatorname*{Res}_{s=-k} f(s)\,\Gamma(s) = \frac{\hat{\alpha}_k}{k!}.$$

Используя тот факт, что $Res_{s=-k}\,\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}$, а $f(s)$ голоморфна в окрестностях точек $s = -k$, получаем

$$\hat{\alpha}_k = (-1)^k f(-k).$$

Из данного соотношения следует, что $f(-k)$ — алгебраические числа, что заканчивает доказательство леммы 2.3.

Лемма 2.4. Пусть степенной ряд $g(x)$ имеет вид (1.3), а $f(s)$ — соответствующий ему ряд Дирихле с теми же коэффициентами.

Тогда

$$\hat{\alpha}_k = \lim_{x \to 0+0} g^{(k)}\left(e^{-x}\right) = (-1)^k f(-k)$$

являются алгебраическими числами.

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные в лемме 2.3, получаем

$$\hat{\alpha}_k = (-1)^k f(-k),$$

где $f(-k) = f_1(-k) \cdot f_2(-k)$, а $f_1(s)$ и $f_2(s)$ — ряды Дирихле с периодическими алгебраическими коэффициентами, имеющими ограниченную сумматорную функцию. По лемме 2.3 $f_1(-k)$ и $f_2(-k)$ — алгебраические числа, следовательно, и $\hat{\alpha}_k$ — алгебраические.

Тем самым утверждение леммы 2.4 полностью доказано.

Доказательство основной теоремы. Утверждение основной теоремы непосредственно следует из лемм 2.1, 2.2, 2.4.

Литература

[1] Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 511 с.
[2] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.

Поступила в редакцию 22/*III*/2012;
в окончательном варианте — 22/*III*/2012.

ABOUT THE BOUNDARY BEHAVIOR OF A CLASS OF POWER SERIES

© 2012 A.E. Korotkov[2]

In the paper we prove the algebraic values of the radial derivatives at point $z = 1$ for a class of power series.

Key words: Dirichlet's series, power series, radial derivative

Paper received 22/*III*/2012.
Paper accepted 22/*III*/2012.

[2]Korotkov Alexander Evgenyevich (`korotkovae@info.sgu.ru`), the Dept. of Computing Algebra and Number Theory, Saratov State University, Saratov, 410012, Russian Federation.