УДК 519.642.8

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ СНИЗУ ОПЕРАТОРОВ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

© 2012 С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин[1]

Разработан численный метод нахождения значений собственных функций дискретных полуограниченных снизу операторов. Получены оценки остатков сумм рядов Рэлея–Шредингера "взвешенных" поправок теории возмущений. Произведена апробация метода на примере оператора Лапласа с возмущающей функцией комплексного переменного.

Ключевые слова: собственные значения, собственные функции, "взвешенные" поправки теории возмущений, дискретные операторы.

1. Предварительные сведения

Классическая теория регуляризованных следов активно развивалась с 1950-х годов [1]. В рамках использования имевшихся общих методов было получено большое количество теоретических результатов. С конца 70-х, вместе с сужением круга стандартно решаемых задач, в теории регуляризованных следов на первый план стали выходить задачи для дискретных операторов в частных производных, в решении которых до этого практически не было никаких результатов. Принципиальным стал поворот теории к изучению следов абстрактных операторов и приложении этих результатов к конкретным операторам математической физики. В последнее время приобретают большое значение вопросы нахождения собственных чисел и собственных функций для возмущенных самосопряженных операторов [2–4]. В.А. Садовничий и В.Е. Подольский впервые сделали теоретическое обоснование вычисления первых собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля, основанное на системе нелинейных уравнений, составленной из регуляризованных следов оператора [5]. Дальнейшее развитие метод регуляризованных следов (РС) получил в работах С.И. Кадченко (см., например [6; 7]), где были получены вычислительно эффективные формулы нахождения собственных чисел дискретных полуограниченных снизу операторов. Естественным продолжением этих работ является использование метода РС для вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов.

[1]Кадченко Сергей Иванович (`kadchenko@masu.ru`), Какушкин Сергей Николаевич (`kakushkin-sergei@mail.ru`), кафедра прикладной математики и вычислительной техники Магнитогорского государственного университета, 455000, Российская Федерация, г. Магнитогорск, пр. Ленина, 114.

Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T с однократным спектром, заданный в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения в D. Предположим, что известны собственные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора T, занумерованные в порядке возрастания их действительных величин, и ортонормированные собственные функции $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, отвечающие этим собственным числам и образующие базис в H. Обозначим количество всех собственных значений λ_n оператора T, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \frac{|\lambda_{n_0+1}+\lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0.

Пусть $P : L_2(D) \to L_2(D)$ — оператор умножения на функцию $p(x)$. Обозначим через $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственные значения оператора $T+P$, пронумерованные в порядке возрастания их действительных частей, а через $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующие им собственные функции. Если для всех $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства $q_n = \frac{2||P||}{|\lambda_{n+1}-\lambda_n|} < 1$, тогда линейный оператор $T+P$ является дискретным, и внутри окружности T_{n_0} находится одинаковое количество собственных значений операторов T и $T+P$ (см. [8, гл. 5, § 4, лемма 3]). При этом первые n_0 собственных функций оператора $T+P$ являются решениями системы нелинейных уравнений [9]:

$$\sum_{j=1}^{n_0} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{n_0} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{t} \alpha_k^{(p)}(n_0) + \varepsilon_t^{(p)}. \tag{1.1}$$

Здесь

$$\alpha_k^{(p)}(n_0) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p [K_T(z_0, z_k, \lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) d\lambda$$

есть k-тые поправки теории возмущений к "взвешенной" спектральной функции оператора $T+P$ целого порядка p; $K_T(x,y,\lambda)$ — ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T, а операция "$\circ$" вводится по правилу

$$(K \circ P \circ Q)(x,y,\lambda) = \int\limits_D K(x,z,\lambda) P_z Q(z,y,\lambda) dz.$$

Через $\varepsilon_t^{(p)} = \sum\limits_{m=t+1}^{\infty} \alpha_m^{(p)}(n_0)$, $\forall t \in N$ обозначены остатки сумм функциональных рядов Рэлея–Шредингера.

Правые части уравнений (1.1) выражаются через характеристики невозмущенной задачи и возмущающего оператора P, а $\alpha_k^{(p)}(n_0)$ вычисляются с помощью теории вычетов. Используя систему уравнений (1.1), можно разработать новый численный метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов в узлах дискретизации.

2. Теоретические положения метода РС

Найдем суммы рядов Рэлея–Шредингера $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n_0)$. Для этого получим аналитические формулы, позволяющие вычислять "взвешенные " поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0)$.

Теорема 2.1. Пусть все предположения, сделанные ранее относительно операторов T и $T+P$, выполнены. Если для всех $n \in N$ выполняются неравенства

$q_n < 1$, то "взвешенные" поправки теории возмущений $\alpha_k^{(p)}(n_0)$ для любых натуральных k, p и n_0 вычисляются по формулам:

$$\alpha_k^{(p)}(n_0) = -\sum_{n=1}^{n_0} \sum_{j_1,...,j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(x)\overline{v}_{j_{k+1}}(y)\times$$

$$\times r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}},$$

где

$$r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) = \begin{cases} 0, \ \forall j_m \neq n, m = \overline{1, k+1}; \\ \frac{1}{k!} \lim\limits_{\lambda\to\lambda_n} \frac{d^k}{d\lambda^k}\lambda^p, \ \ l = k+1; \\ \frac{1}{(l-1)!} \lim\limits_{\lambda\to\lambda_n} \frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}}\Big(\frac{\lambda^p}{\prod_{m=1}^{k-l+1}(\lambda-\lambda_{j_m})}\Big), \ \ 0 < l \leqslant k; \end{cases}$$

$V_{i,j} = (Pv_i, v_j)$ — скалярное произведение; l— число совпадений $j_m = n$, $m = \overline{1, k+1}$.

Доказательство. Так как оператор T дискретен и полуограничен снизу, то его резольвента $R_\lambda(T)$ является интегральным оператором [13] и его ядро $K_T(x, y, \lambda)$ имеет вид:

$$K_T(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x)\overline{v}_i(y)}{\lambda_i - \lambda}. \tag{2.1}$$

Тогда

$$\alpha_k^{(p)}(n_0) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p [K_T(z_0, z_k, \lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p K_T(z_0, z_1, \lambda) \circ P_{z_1} \circ K_T(z_1, z_2, \lambda) \circ P_{z_2} \circ ...\circ$$

$$\circ K_T(z_{k-1}, z_k, \lambda) \circ P_{z_k} \circ K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \Big[\int\limits_D \int\limits_D ... \int\limits_D K_T(z_0, z_1, \lambda) P_{z_1} K_T(z_1, z_2, \lambda) P_{z_2} \times ...$$

$$... \times K_T(z_{k-1}, z_k, \lambda) P_{z_k} K_T(z_k, z_{k+1}, \lambda) dz_1 dz_2 ... dz_k \Big] d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \Big[\int\limits_D ... \int\limits_D \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{v_{j_1}(z_0)\overline{v}_{j_1}(z_1)}{\lambda_{j_1} - \lambda} \sum_{j_2=1}^{\infty} \frac{P_{z_1} v_{j_2}(z_1)\overline{v}_{j_2}(z_2)}{\lambda_{j_2} - \lambda} \times ...$$

$$... \times \sum_{j_k=1}^{\infty} \frac{P_{z_{k-1}} v_{j_k}(z_{k-1})\overline{v}_{j_k}(z_k)}{\lambda_{j_k} - \lambda} \sum_{j_{k+1}=1}^{\infty} \frac{P_{z_k} v_{j_{k+1}}(z_k)\overline{v}_{j_{k+1}}(z_{k+1})}{\lambda_{j_{k+1}} - \lambda} dz_1 ... dz_k \Big] d\lambda =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \Big[\int\limits_D ... \int\limits_D \sum_{j_1} \frac{v_{j_1}(z_0)\overline{v}_{j_1}(z_1)}{\lambda_{j_1} - \lambda} \times$$

$$\times \prod_{m=2}^{k+1} \sum_{j_m} \frac{P_{z_{m-1}} v_{j_m}(z_{m-1})\overline{v}_{j_m}(z_m)}{\lambda_{j_m} - \lambda} dz_1 ... dz_k \Big] d\lambda =$$

$$= \sum_{j_1, j_2, ..., j_{k+1}=1}^{\infty} v_{j_1}(z_0) \overline{v}_{j_{k+1}}(z_{k+1}) (Pv_{j_1}, v_{j_2})(Pv_{j_2}, v_{j_3})...(Pv_{j_k}, v_{j_{k+1}}) \times$$

$$\times \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \frac{\lambda^p d\lambda}{(-1)^{k+1} \prod\limits_{m=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{j_m})} =$$

$$= - \sum_{j_1, ..., j_{k+1}=1}^{\infty} \Big(v_{j_1}(z_0) \overline{v}_{j_{k+1}}(z_{k+1}) r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) \prod_{m=1}^{k} V_{j_m j_{m+1}} \Big),$$

где $r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \frac{\lambda^p d\lambda}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{j_m})}$.

Здесь $V_{ij} = (Pv_i, v_j) = \int\limits_D P_z v_i(z) \overline{v}_j(z) dz$. Функция $\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{j_m})}$ в круге T_{n_0} имеет в точках λ_n, $n = \overline{1, n_0}$ полюсы кратности l — количество совпадений $j_m = n$, $m = \overline{1, k+1}$. Поэтому на основании теоремы о вычетах имеем:

$$r_k^{(p)}(n, j_1, ..., j_{k+1}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \frac{\lambda^p d\lambda}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{j_m})} = res(\lambda_n) \frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (\lambda - \lambda_{j_m})} =$$

$$= \begin{cases} 0, \ \ \forall j_m \neq n, m = \overline{1, k+1}; \\ \frac{1}{k!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^k}{d\lambda^k} \lambda^p, \ \ l = k+1; \\ \frac{1}{(l-1)!} \lim\limits_{\lambda \to \lambda_n} \frac{d^{l-1}}{d\lambda^{l-1}} \Big(\frac{\lambda^p}{\prod\limits_{m=1}^{k-l+1} (\lambda - \lambda_{j_m})} \Big), \ \ 0 < l \leqslant k. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если для некоторого натурального числа n_0 выполняются неравенства $\frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|} < 1$, то для остатков $\varepsilon_t^{(p)}(n_0)$ сумм рядов Рэлея–Шредингера оператора $T + P$ справедливы оценки:

$$|\varepsilon_t^{(p)}(n_0)| \leqslant C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} S_{n_0} ||P|| \frac{q^t}{1-q}.$$

Здесь $q = \frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}$, $S_{n_0} = \sup\limits_{\lambda_i} \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2$, $|v_i(x)| \leqslant C_0$ $\forall i = \overline{1, \infty}$.

Доказательство.

Запишем вспомогательную цепочку равенств, используя спектральное представление ядра резольвенты (2.1):

$$([K_T \circ P]^m \circ K_T)(x, y, \lambda) = \int\limits_D ... \int\limits_D K_T(x, z_1, \lambda) P_{z_1} K_T(z_1, z_2, \lambda) P_{z_2} \times ...$$

$$... \times K_T(z_{m-1}, z_m, \lambda) P_{z_m} K_T(z_m, y, \lambda) dz_1 ... dz_m =$$

$$= \int\limits_D ... \int\limits_D \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x) \overline{v}_i(z_1)}{\lambda_i - \lambda} P_{z_1} K_T(z_1, z_2, \lambda) P_{z_2} \times ...$$

$$... \times K_T(z_{m-1}, z_m, \lambda) P_{z_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{v_j(z_m)\overline{v}_j(y)}{\lambda_j - \lambda} dz_1 ... dz_m = ... =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{v_i(x) \int\limits_D \overline{v}_i(z_1) P_{z_1} [R_\lambda(T)P]^{m-1} v_j(z_1) dz_1 \overline{v}_j(y)}{(\lambda_i - \lambda)(\lambda_j - \lambda)} =$$

$$= \sum_{i,j} \frac{v_i(x)(P[R_\lambda(T)P]^{m-1} v_j, v_i)\overline{v}_j(y)}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j)}.$$

Оценим модуль $\alpha_m^{(p)}(n_0)$ с учетом последнего равенства:

$$|\alpha_m^{(p)}(n_0)| = \left| \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda^p \sum_{i,j} \frac{v_i(x)(P[R_\lambda(T)P]^{m-1} v_j, v_i)\overline{v}_j(y)}{(\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j)} d\lambda \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{T_{n_0}} |\lambda^p| \sum_{i,j} \frac{|v_i(x)||(P[R_\lambda(T)P]^{m-1} v_j, v_i)||\overline{v}_j(y)|}{|\lambda - \lambda_i||\lambda - \lambda_j|} d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi \rho_{n_0}^{p+1} \sup_{\lambda_i} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_0^2}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2 ||P||^m \Big(\frac{2}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|} \Big)^{m-1} \leqslant$$

$$\leqslant C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} ||P||^m \Big(\frac{2}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|} \Big)^{m-1} \sup_{\lambda_i} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} S_{n_0} ||P|| q^{m-1},$$

где $q = \frac{2||P||}{|\lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}|}$, $S_{n_0} = \sup\limits_{\lambda_i} \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|} \Big)^2$, $|v_i(x)| \leqslant C_0 \ \ \forall i = \overline{1, \infty}$.

Отметим, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{n_0} - \lambda_i|}$ сходится [9]. Поэтому для $\varepsilon_t^{(p)}(n_0)$ имеет место оценка

$$|\varepsilon_t^{(p)}(n_0)| \leqslant C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} S_{n_0} ||P|| \sum_{m=t+1}^{\infty} q^{m-1} = C_0^2 \rho_{n_0}^{p+1} S_{n_0} ||P|| \frac{q^t}{1-q}.$$

Теорема доказана.

Запишем систему уравнений (1.1) для $n_0 = n$ и $n_0 = n - 1$:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n), \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j^p u_j(x)\overline{u}_j(y) = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^p v_j(x)\overline{v}_j(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(n-1). \tag{2.3}$$

Вычитая из уравнения (2.2) уравнение (2.3), найдем:

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n^p} \Big(\lambda_n^p v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k^{(p)}(n) - \alpha_k^{(p)}(n-1)] \Big). \tag{2.4}$$

Полученная формула позволяет находить значения собственных функций оператора $T + P$.

Используя теоремы 2.1, 2.2 и формулу (2.4), проведем численный эксперимент по нахождению значений собственных функций возмущенного оператора Лапласа.

3. Численный эксперимент

Пусть оператор $T = -\Delta$ задан на прямоугольнике $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ с границей Γ. Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. В качестве возмущения P возьмем оператор умножения на дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p(x, y)$, определенную на прямоугольнике Π.

Рассмотрим спектральную задачу

$$(T + P)\varphi = \beta\varphi, \;\; \varphi \in D. \tag{3.1}$$

$$D = \Big\{\varphi \;\mid\; \varphi \in C^2(\Pi)\bigcap C[\Pi], \Delta\varphi \in L_2[\Pi] : \varphi\Big|_{\Gamma} = 0\Big\}.$$

Известно, что собственные числа λ_{nk} и собственные функции v_{nk} оператора T имеют вид:

$$\lambda_{nk} = \pi^2\Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\Big), \;\; v_{nk}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{k\pi y}{b}, \quad n, k \in N.$$

Система собственных функций $\{v_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2[\Pi]$. В случае, когда $\frac{a^2}{b^2}$ — иррациональное число, оператор T имеет однократные собственные числа.

Пронумеруем собственные числа $\{\lambda_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ оператора T одним индексом в порядке возрастания их действительных частей.

Собственные числа возмущенного оператора $T + P$ можно найти, используя формулы [7]:

$$\mu_n = \lambda_n + (Pv_n, v_n) + \tilde{\delta}_1(n), n = \overline{1, n_0},$$

где для $\tilde{\delta}_1(n)$ справедливы оценки $|\tilde{\delta}_1(n)| \leqslant (2n-1)\rho_n \frac{q^2}{1-q}, \; q = \max\limits_{\lambda_n} q_n$.

В таблице приведены результаты вычисления значений первых собственных функций в узлах дискретизации спектральной задачи (3.1). В случае метода РС значения собственных функций обозначены $\widetilde{u}_n(x, y)$. В случае метода А.М. Данилевского — $\widehat{u}_n(x, y)$. Аргументы x и y изменяются от 0 до $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ с шагом 0,11. Проведенные расчеты показывают, что результаты вычислений собственных функций возмущенного оператора Лапласа методом РС и методом А.М. Данилевского хорошо согласуются.

Таблица

Значения $\widehat{u}_n$ и $\widetilde{u}_n$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленные при $a = \sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $b = 1$ и $p(x, y) = (1 + i)xy^2$

n	x	y	$\widehat{u}_n$	$\widetilde{u}_n$	$\lvert\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_n - \widetilde{u}_n}{\widehat{u}_n}\right\rvert 100\;\%$
1	$0,22$	$0,22$	$1,2277949 + 0,0044957i$	$1,2278057 - 0,0042655i$	$0,0000099$	$0,000813$
	$0,22$	$0,33$	$1,6565221 + 0,0047339i$	$1,6565321 - 0,0043272i$	$0,0000087$	$0,000531$
	$0,22$	$0,44$	$1,8884005 + 0,0035046i$	$1,8884043 - 0,0028878i$	$0,0000027$	$0,000145$
	$0,22$	$0,55$	$1,896431 + 0,0013475i$	$1,8964256 - 0,0005408i$	$0,0000058$	$0,000306$
	$0,33$	$0,22$	$1,4892400 + 0,0048573i$	$1,4892428 - 0,0048056i$	$0,0000025$	$0,000174$
	$0,33$	$0,33$	$2,0090895 + 0,0046755i$	$2,0090924 - 0,004586i$	$0,0000027$	$0,000138$
	$0,33$	$0,44$	$2,2900251 + 0,0026136i$	$2,2900265 - 0,0024607i$	$0,0000013$	$0,000058$
	$0,33$	$0,55$	$2,2993781 - 0,0005276i$	$2,2993764 + 0,0007641i$	$0,0000015$	$0,000065$
	$0,44$	$0,22$	$1,4173573 + 0,0040158i$	$1,4173494 - 0,0041988i$	$0,0000073$	$0,000521$
	$0,44$	$0,33$	$1,9119410 + 0,0033633i$	$1,9119346 - 0,0036901i$	$0,0000057$	$0,000301$

Окончание таблицы

n	x	y	$\widehat{u}_n$	$\widetilde{u}_n$	$\lvert\widehat{u}_n-\widetilde{u}_n\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_n-\widetilde{u}_n}{\widetilde{u}_n}\right\rvert \times$ $\times 100\%$
1	$0,44$	$0,44$	$2,1789915+0,0008194i$	$2,1789898-0,0012814i$	$0,0000014$	$0,000068$
	$0,44$	$0,55$	$2,1874983-0,0027052i$	$2,1875019+0,0021727i$	$0,0000029$	$0,000136$
	$0,55$	$0,22$	$1,0284621+0,0025431i$	$1,02845-0,00281783i$	$0,0000114$	$0,001115$
	$0,55$	$0,33$	$1,3872356+0,0017766i$	$1,3872254-0,0022656i$	$0,0000095$	$0,000685$
	$0,55$	$0,44$	$1,5808143-0,0004246i$	$1,5808112-0,0002822i$	$0,0000032$	$0,000201$
	$0,55$	$0,55$	$1,5867458-0,003309i$	$1,5867515+0,0024593i$	$0,0000042$	$0,000262$
2	$0,22$	$0,22$	$1,8850059+0,0004272i$	$1,88500701+0,0004706i$	$0,0000012$	$0,000063$
	$0,22$	$0,33$	$1,6784847+0,0034971i$	$1,67826304+0,0037777i$	$0,000221$	$0,013171$
	$0,22$	$0,44$	$0,6994813+0,0070236i$	$0,69948269+0,7156526i$	$0,0000027$	$0,00039$
	$0,22$	$0,55$	$-0,6018627+0,0085762i$	$-0,6018597+0,0085335i$	$0,0000036$	$0,000597$
	$0,33$	$0,22$	$2,2870274+0,0004618i$	$2,2870278+0,0004908i$	$0,0000003$	$0,000015$
	$0,33$	$0,33$	$2,0366146+0,004053i$	$2,0363444+0,0043579i$	$0,0002695$	$0,013235$
	$0,33$	$0,44$	$0,8494149+0,0077875i$	$0,8494154+0,0078879i$	$0,0000014$	$0,000168$
	$0,33$	$0,55$	$-0,7284031+0,008672i$	$-0,7284013+0,0086151i$	$0,0000025$	$0,000337$
	$0,44$	$0,22$	$2.1772798+0,0003818i$	$2,1772789+0,0003854i$	$0,0000008$	$0,000037$
	$0,44$	$0,33$	$1.9390401+0,0036649i$	$1.9387817+0,0039191i$	$0,0002579$	$0,013303$
	$0,44$	$0,44$	$0,8094209+0,0066661i$	$0,8094202+0,0067014i$	$0,0000004$	$0,000047$
	$0,44$	$0,55$	$-0,6915945+0,006490381i$	$-0,6915942+0,0064204i$	$0,0000009$	$0,000132$
	$0,55$	$0,22$	$1,5802695+0,0002418i$	$1,5802682+0,0002298i$	$0,0000013$	$0,00008$
	$0,55$	$0,33$	$1,4074509+0,0025418i$	$1,4072626+0,0027042i$	$0,000188$	$0,013359$
	$0,55$	$0,44$	$0,5879461+0,0043815i$	$0,5879449+0,0043715i$	$0,0000012$	$0,000211$
	$0,55$	$0,55$	$-0,5008262+0,0036323i$	$-0,5008267+0,0035652i$	$0,00000002$	$0,000004$
3	$0,22$	$0,22$	$1,4187905-0,0051851i$	$1,4188759-0,0057146i$	$0,0000874$	$0,0061611$
	$0,22$	$0,33$	$1,9129145-0,0040801i$	$1,9129666-0,0047342i$	$0,0000535$	$0,0027981$
	$0,22$	$0,44$	$2,1788502-0,0005046i$	$2,1790041-0,001328i$	$0,0001542$	$0,007076$
	$0,22$	$0,55$	$2,1863271+0,0039513i$	$2,1866724+0,0029744i$	$0,0003437$	$0,01572$
	$0,33$	$0,22$	$0,4113426-0,0021685i$	$0,4111416-0,0025359i$	$0,0001989$	$0,048372$
	$0,33$	$0,33$	$0,5535044-0,0010144i$	$0,5534391-0,0016927i$	$0,0000637$	$0,011504$
	$0,33$	$0,44$	$0,629121+0,0013327i$	$0,6284397+0,0012098i$	$0,0006816$	$0,108455$
	$0,33$	$0,55$	$0,630164+0,0036967i$	$0,6292143+0,0039061i$	$0,0009484$	$0,1507218$
	$0,44$	$0,22$	$-0,9427961+0,0021345i$	$-0,9427938+0,0015746i$	$0,0000034$	$0,000365$
	$0,44$	$0,33$	$-1,2733068+0,0030433i$	$-1,2733446+0,0023681i$	$0,0000363$	$0,0028558$
	$0,44$	$0,44$	$-1,4529489+0,0032497i$	$-1,4532817+0,0028594i$	$0,0003319$	$0,022847$
	$0,44$	$0,55$	$-1,4601338+0,0024015i$	$-1,4608663+0,0025289i$	$0,0007327$	$0,050182$
	$0,55$	$0,22$	$-1,4993769+0,0041142i$	$-1,4992294+0,0035299i$	$0,0001489$	$0,0099374$
	$0,55$	$0,33$	$-2,0238185+0,0046577i$	$-2,0238457+0,0041449i$	$0,0000261$	$0,001288$
	$0,55$	$0,44$	$-2,3079068+0,0035688i$	$-2,307408+0,0025263i$	$0,0005001$	$0,0216738$
	$0,55$	$0,44$	$-2,3181168+0,0010602i$	$-2,3172614-0,0002723i$	$0,0008556$	$0,036923$

Заключение

В статье разработан новый метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов, который хорошо согласуется с известными численными методами Данилевского и Крылова. Численные расчеты показывают, что метод РС на порядок вычислительно эффективнее, чем известные численные методы.

Литература

[1] Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов // Успехи математических наук. 2006. Т. 61. Вып. 5 (371). С. 89–156.

[2] Свиридюк Г.А., Баязитова А.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе // Вестн. СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2009. № 1(18). С. 6–17.

[3] Свиридюк Г.А., Загребина С.А., Пивоварова П.О. Устойчивость уравнений Хоффа на графе // Вестн. СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2010. № 1(15). С. 6–15.

[4] Свиридюк Г.А., Сукачева Т.Г. Быстро-медленная динамика вязкоупругих сред //ДАН СССР. 1989. Т. 308. № 4. С. 791—794.

[5] Садовничий В.А., Подольский В.Е. О вычислении первых собственных значений оператора Штурма — Лиувилля // ДАН. 1996. Т. 346. № 2. С. 162–164.

[6] Кадченко С.И. Новый метод вычисления собственных чисел спектральной задачи Орра — Зоммерфельда // Электромагнитные волны и электронные системы. 2000. Т. 5. № 6. С. 4–10.

[7] Кадченко С.И., Рязанова Л.С. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов //Вестник ЮУрГУ. Сер.: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 17(234). Вып. 8. С. 46–51.

[8] Садовничий В.А. Теория операторов: учеб. для вузов с углубленным изучением математики. 5-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2004. 384 с.

[9] Садовничий В.А., Дубровский В.В. Замечание об одном новом методе вычисления собственных значений и собственных функций дискретных операторов // Тр. семинара И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ. 1994. Вып. 17. С. 244–248.

[10] Дубровский В.В., Седов А.И. Оценка разности спектральных функций операторов типа Лежандра // Фундаментальная и прикладная математика. 2000. Т. 6. № 4. С. 1075–1082

[11] Дубровский В.В., Седов А.И. Оценка разности спектральных функций операторов типа Гегенбауэра по норме L_q // Известия высших учебных заведений. Сер.: Математика. 1999. № 8(447). С. 20–25.

[12] Дубровский В.В., Седов А.И. Оценка разности спектральных функций самосопряженных операторов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2000. Т. 5. № 5. С. 10–13.

[13] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

Поступила в редакцию $19/I/2012$;
в окончательном варианте — $19/I/2012$.

THE CALCULATING OF MEANINGS OF EIGEN FUNCTIONS OF DISCRETE SEMIBOUNDED FROM BELOW OPERATORS VIA METHOD OF REGULARIZED TRACES

© 2012 S.I. Kadchenko, S.N. Kakushkin[2]

The numerical method of finding of meanings of eigenfunctions of discrete semibounded from below operator is developed. Estimates of residuals of sums of series of Reley–Schrodinger of the "weighed" corrections of the perturbation theory are gained. Approbation of the method on the example of Laplace operator with perturbed function of complex variable is produced.

Key words: eigen values, eigen functions, "weighted" corrections of perturbation theory, discrete operators.

Paper received 19/I/2012.
Paper accepted 19/I/2012.

[2]Kadchenko Sergey Ivanovich (kadchenko@masu.ru), Kakushkin Sergey Nikolaevich (kakushkin-sergei@mail.ru), the Dept. of Applied Mathematics and Calculating Technics, Magnitogorsk State University, Magnitogorsk, 455000, Russian Federation.