МАТЕМАТИКА

УДК 511.334

ПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ЭТА-ПРОИЗВЕДЕНИЯ

© 2012 Г.В. Воскресенская[1]

В статье изучается структура пространств модулярных форм, содержащих мультипликативные эта-произведения. Находятся размерности и базисы, исследуется поведение функций в параболических вершинах.

Ключевые слова: пространства модулярных форм, эта-функция Дедекинда, параболические вершины.

Введение

Изучение пространств $M_k(\Gamma_0(N),\chi)$ и их подпространств $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$, состоящих из параболических форм, включает в себя разнообразные открытые проблемы. Построение базисов в явном виде является непростой задачей даже для малых размерностей.

Важную роль в этих исследованиях играет эта-функция Дедекинда, через нее, в частности, выражаются функции $E_4(z)$ и $E_6(z)$, а значит, любая функция из $M_k(SL_2(\mathbf{C})$ является η-полиномом [1–5]. Отправной точкой для исследований в этой статье является тот факт, что все пространства $S_k(\Gamma_0(N),\chi)$, в которых содержатся мультипликативные η-произведения, при минимальном N одномерны. Кроме того, мультипликативные η-произведения в каждой параболической вершине имеют порядок в точности 1.

В этой статье мы рассматриваем мультипликативные η-произведения с единичным характером. Изучаются пространства $M_k(\Gamma_0(N)$ и $S_k(\Gamma_0(N)$, которые их содержат при некоторых значениях k_0 и N_0. Описывается поведение в параболических вершинах мультипликативных η-произведений относительно больших уровней. Найденные базисы будут выписаны в таблицах 1–4.

1. Эта-произведения и эта-частные

Определение. Функция $f(z)$ называется η-частным, если она имеет вид

$$\prod_{\delta|N} \eta(\delta z)^{r_\delta}, \quad \delta \ \in \mathbf{N}, \ r_\delta \ \in \mathbf{Z}.$$

[1]Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Если при этом $r_\delta \in \mathbf{N}$, то $f(z)$ называется η-произведением.
Линейная комбинация η-частных называется η-полиномом.

Следующие две теоремы, приведенные в книге [6], позволяют определить, когда η-частное является модулярной формой, а также ее уровень, характер и порядок в параболической вершине.

Теорема 1. Пусть $f(z)$ является η-частным, $k = \frac{1}{2}\sum_{\delta|N} r_\delta \in \mathbf{Z}$.
При этом
1)
$$\sum_{\delta|N} \delta r_\delta \equiv 0(mod\ 24);$$
2)
$$\sum_{\delta|N} \frac{N}{\delta} r_\delta \equiv 0(mod\ 24),$$
тогда $f(z)$ удовлетворяет условию
$$f(z) = \left(\frac{az+b}{cz+b}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z),$$
$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \chi(d) = \left(\frac{(-1)^k\ s}{d}\right), \quad s = \prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}.$$

Формулу для характера следует понимать так: если d четное, то так $(d, N) = 1$, заменяем d на $d + N$. Если s дробное, то оно заменяется на натуральное s_1, которое получается из s домножением на квадрат натурального числа. Сделав при необходимости все нужные замены, вычисляем значение характера по свойствам символа Якоби.

Если $f(z)$ голоморфна во всех параболических вершинах группы $\Gamma_0(N)$, то $f(z) \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$, если она обращается в ноль во всех параболических вершинах, то $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi)$.

Теорема 2. Пусть $m,\ n,\ N-$натуральные числа, $n|N,\ (m,n) = 1$.
Если $f(z)$ удовлетворяет условию теоремы 1, то порядок нуля в параболической вершине $\frac{m}{n}$ равен
$$\frac{N}{24}\sum_{\delta|N} \frac{(n,\delta)^2 r_\delta}{(n, \frac{N}{n})n\delta}.$$

2. Вычисление размерностей

2.1. Формула Коэна — Остерле

В 1977 году французские ученые А. Коэн и Ж. Остерле вывели формулу, которая является основой для вычисления размерностей пространств модулярных форм [6]. В теореме 3 приведем ее формулировку. Для этого сначала вводятся обозначения.

Пусть $\chi-$ характер Дирихле, $\chi(-1) = (-1)^k$, $f-$ его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p максимальную степень, в которой p делит N, через s_p максимальную степень, в которой p делит f.

$$\lambda(r_p, s_p, p) = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & 2s_p \leqslant r_p = 2r'+1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & 2s_p \geqslant r_p \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 2), \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \ (mod\ 4) \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \ (mod\ 3), \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \ (mod\ 3), \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \ (mod\ 3). \end{cases}$$

Теорема 3. Если k целое, χ — характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1) = (-1)^k$, то

$$dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) - dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) =$$
$$= \frac{(k-1)N}{12} \prod_{p|N} (1 + p^{-1}) - \frac{1}{2} \prod_{p|N} \lambda(r_p, s_p, p) + \nu_k \cdot \sum_{x: x^2+1 \equiv 0 (N)} + \mu_k \cdot \sum_{x: x^2+x+1 \equiv 0 (N)} .$$

Если $k > 2$, то $dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi))$. Если $k \leqslant 0$, то $dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$. Левая часть становится равна $-dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N), \chi)) = 0$.

2.2. Упрощение формулы

В огромном количестве случаев два последних слагаемых обращаются в ноль, что значительно облегчает вычисления.

Уравнение $x^2 + 1 \equiv 0 \ (mod\ N)$ не имеет решений, если N делится на 4 или на простое нечетное $p \equiv 3 \ (mod\ 4)$.

Уравнение $x^2 + x + 1 \equiv 0 \ (mod\ N)$ не имеет решений, если N делится на 2 или 9, а также на простое нечетное $p \equiv 2 \ (mod\ 3)$.

2.3. Таблицы размерностей

Пусть $S_k(\Gamma_0(N))$ — одномерное пространство, порожденное мультипликативными η-произведениями с единичным характерами. Мы выписываем их в первом столбце таблицы. Мы вычислим явно размерности пространств $S_k(\Gamma_0(2N))$, $S_k(\Gamma_0(3N))$, $S_k(\Gamma_0(pN))$, $(N, p) = 1$ и размерность пространства $M_k(\Gamma_0(N))$. Числа 2 и 3 играют в теории модулярных форм особую роль и требуют отдельного рассмотрения. Размерности записаны в соответствующие столбцы таблицы.

3. Базисы

В этом параграфе мы найдем базисы для пространств $S_k(\Gamma_0(2N))$ и $M_k(\Gamma_0(N))$ для указанных в таблице значений весов и уровней. Здесь и далее мы будем использовать общепринятый в теории эта-функций способ краткого обозначения эта-частных, когда вместо функции записывается соответствующий ей символ $\prod_{\delta|N} \delta^{r_\delta}$. Например, вместо $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$ запишем $6^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$.

Таблица 1

$f(z)$	k	N	$S_k(\Gamma_0(2N))$	$S_k(\Gamma_0(3N))$	$M_k(\Gamma_0(2N))$
$\eta^4(6z)$	2	36	5	10	12
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	3	9	8
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	3	7	6
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	3	5	8
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	3	3	4
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	2	5	4
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	4	4	6
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	2	3	2
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	3	5	5
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	3	4	2
$\eta^8(3z)$	4	9	5	6	5
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	3	8	5
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	3	3	3
$\eta^{12}(2z)$	6	4	3	7	4
$\eta^8(2z)\eta^8(z)$	8	2	2	5	3
$\eta^{24}(z)$	12	1	2	3	2

Таблица 2

k	N	$S_k(\Gamma_0(pN))$	$S_l(\Gamma_0(N))$
2	36	$6p-5$	$6l-12$
2	32	$4p-3$	$4l-8$
2	27	$3p-2$	$3l-6$
2	24	$4p-3$	$4l-8$
2	20	$3p-2$	$3l-6$
2	15	$2p-1$	$2l-4$
2	14	$2p-1$	$2l-4$
2	11	p	$l-2$
4	9	$3p-1$	$l-3$
4	8	$3p-1$	$l-3$
4	6	$3p-1$	$l-3$
4	5	$\frac{3p-1}{2}, p\equiv 1(4);\quad \frac{3p-3}{2}, p\equiv 3(4)$	$\frac{l-2}{2}, l\equiv 0(4);\quad \frac{l-6}{2}, l\equiv 2(4)$
6	4	$\frac{5p-1}{2}$	$\frac{l-4}{2}$
6	3	$\frac{5p+1}{3}, p\equiv 1(3)$ $\frac{5p-1}{3}, p\equiv 2(3)$	$\frac{l-4}{3}, l\equiv 1(3)$ $\frac{l-5}{3}, l\equiv 2(3)$ $\frac{l-3}{3}, l\equiv 0(3)$
8	2	$\frac{7p+1}{4}, p\equiv 1(4)$ $\frac{7p-1}{4}, p\equiv 3(4)$	$\frac{l-6}{4}, l\equiv 2(4);\quad \frac{l-4}{3}, l\equiv 0(4)$
12	1	$\frac{11p+13}{12}, p\equiv 1(12)$ $3, p=3$ $\frac{11p+5}{12}, p\equiv 5(12)$ $\frac{11p+7}{12}, p\equiv 7(12)$	$\left[\frac{l}{12}\right],\quad l\not\equiv 2(12)$ $\left[\frac{l}{12}\right]-1, l\equiv 2(12)$

3.1. Базисы $S_k(\Gamma_0(2N))$

Эти функции удовлетворяют условию теоремы 1, можно вычислить их порядки в параболических вершинах по теореме 2. Они являются параболическими фор-

Таблица 3

k	$2N$	Базис
2	72	$6^4;\ 12^4;\ 12\cdot 6\cdot 4\cdot 2;\ 36\cdot 18\cdot 12\cdot 6;\ 2^{-2}\cdot 4^4\cdot 6^2$
2	64	$4^2\cdot 8^2;\ 8^2\cdot 16^2;\ 2^{-2}\cdot 4^5\cdot 8$
2	54	$3^2\cdot 9^2;\ 6^2\cdot 18^2;\ 1\cdot 2^4\cdot 3^{-3}\cdot 6\cdot 18;\ 3\cdot 9\cdot 18^{-3}\cdot 27^4\cdot 54$
2	48	$12\cdot 6\cdot 4\cdot 2;\ 24\cdot 12\cdot 8\cdot 4;\ 3^4\cdot 4^{-2}\cdot 6^{-2}\cdot 8^4$
2	40	$10^2\cdot 2^2;\ 20^2\cdot 4^2;\ 2^{-1}\cdot 4^4\cdot 10$
2	30	$15\cdot 5\cdot 3\cdot 1;\ 30\cdot 10\cdot 6\cdot 2;\ 1^3\cdot 3^2\cdot 5^{-3}\cdot 15^2$
2	28	$14\cdot 7\cdot 2\cdot 1;\ 28\cdot 14\cdot 4\cdot 2$
2	22	$1^2\cdot 11^2;\ 2^2\cdot 22^2$
4	18	$3^8;\ 6^8;\ 1^3\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-2}\cdot 6^{10}\cdot 9^3\cdot 18^{-3};\ 1^{-3}\cdot 2^3\cdot 3^{10}\cdot 6^{-2}\cdot 9^{-3}\cdot 18^3$
4	16	$2^4\cdot 4^4;\ 4^4\cdot 8^4; 2^{-4}\cdot 8^{-4}\cdot 4^{16}$
4	12	$1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 6^2;\ 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 12^2;\ 2\cdot 4\cdot 6^9\cdot 12^{-3}$
4	10	$1^4\cdot 5^4;\ 2^4\cdot 10^4;\ 1^{-1}\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 10^{-1}$
6	8	$2^{12};\ 4^{12}; 1^{12}\cdot 2^{-12}\cdot 4^{12}$
6	6	$1^6\cdot 3^6;\ 2^6\cdot 6^6;\ 1^{-3}\cdot 2^9\cdot 3^9\cdot 6^{-3}$
8	4	$1^8\cdot 2^8;\ 2^8\cdot 4^8$
12	2	$1^{24};\ 2^{24}$

мами. Линейную независимость можно доказать, рассматривая первые коэффициенты рядов Фурье или анализируя поведение в параболических вершинах.

3.2. Базисы $M_k(\Gamma_0(N))$

Таблица 4

k	N	Базис $M_k(\Gamma_0(N))$
2	36	$6^4;\ 2^{-4}\cdot 4^8;\ 1^8\cdot 2^{-4};\ 1^3\cdot 3^{-2}\cdot 9^3;$ $6^{-4}\cdot 12^8;\ 3^8\cdot 6^{-4};\ 18^{-4}\cdot 36^8;\ 9^8\cdot 18^{-4};$ $1^4\cdot 2^{-2}\cdot 3^4\cdot 6^{-2};\ 6^{-2}\cdot 12^4\cdot 18^{-2}\cdot 36^4;\ 2^3\cdot 6^{-2}\cdot 18^3;\ 4^3\cdot 12^{-2}\cdot 36^3$
2	32	$2^{-4}\cdot 4^8;\ 4^{-4}\cdot 8^8;\ 8^{-4}\cdot 16^8;\ 16^{-4}\cdot 32^8;$ $1^8\cdot 2^{-4};\ 2^8\cdot 4^{-4};\ 4^8\cdot 8^{-4};\ 8^8\cdot 16^{-4}$
2	27	$1^3\cdot 3^{-2}\cdot 9^3;\ 1^6\cdot 3^{-2};\ 3^{-2}\cdot 9^6;\ 3^6\cdot 9^{-2};\ 9^{-2}\cdot 27^6;\ 3^2\cdot 9^2$
2	24	$2^4\cdot 4^{-8};\ 1^8\cdot 2^{-4};\ 2^8\cdot 4^{-4};\ 4^4\cdot 8^{-8};$ $3^8\cdot 6^{-4};\ 6^4\cdot 12^{-8};\ 12^4\cdot 24^{-8};\ 6^8\cdot 12^{-4}$
2	20	$2^{-4}\cdot 4^8;\ 1^8\cdot 2^{-4};\ 10^{-4}\cdot 20^8;\ 5^8\cdot 10^{-4};\ 1^4\cdot 2^{-2}\cdot 5^4\cdot 10^{-2};\ 2^2\cdot 10^2$
2	15	$1\cdot 3\cdot 5\cdot 15;\ 1^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4\cdot 15^{-2};\ 1^2\cdot 3^{-6}\cdot 5^8;\ 3^8\cdot 5^{-6}\cdot 15^2$
2	14	$1^4\cdot 2^{-2}\cdot 7^4\cdot 14^{-2};\ 1^{-2}\cdot 2^4\cdot 7^{-2}\cdot 14^4;\ 1^{14}\cdot 7^6\cdot 2^{-16};\ 1\cdot 2\cdot 7\cdot 14;$
2	11	$1+\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{d\mid n} d)q^n;\ 1^2\cdot 11^2$
4	9	$1^6\cdot 3^{-4}\cdot 9^6;\ 3^{-4}\cdot 9^{12};\ 1^{12}\cdot 3^{-4};\ 1^3\cdot 3^{-4}\cdot 9^9;\ 1^9\cdot 3^{-4}\cdot 9^3$
4	8	$2^{-4}\cdot 4^8;\ 4^{-4}\cdot 8^8;\ 1^8\cdot 2^{-4};\ 2^8\cdot 4^{-4};\ 2^4\cdot 4^4$
4	6	$1^{-4}\cdot 2^8\cdot 3^{-4}\cdot 6^8;\ 1^8\cdot 2^{-4}\cdot 3^8\cdot 6^{-4};\ 1^4\cdot 2^{16}\cdot 3^{-12};\ 2^{12}\cdot 3^{-8}\cdot 6^4;\ 1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 6^2$
4	5	$1^4\cdot 5^4;\ 1^{-2}\cdot 5^{10}$
6	4	$2^{-12}\cdot 4^{24};\ 1^{24}\cdot 2^{-12};\ 1^{16}\cdot 2^{-12}\cdot 4^8;\ 1^8\cdot 2^{-12}\cdot 4^{16}$
6	3	$1^6\cdot 3^6;\ 1^{-6}\cdot 3^{18};\ 1^{18}\cdot 3^{-6}$
8	2	$1^8\cdot 2^8;\ 1^{-16}\cdot 2^{32};\ 1^{32}\cdot 2^{-16}$
12	1	$1^{24}; (E_6(z))^2$

4. Теорема о структуре $S_k(\Gamma_0(N))$, $N = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9$

Теорема 4. Пусть k четное, $k \geqslant k_0$, $N = 4, 6, 8, 9$, тогда любой элемент из $S_k(\Gamma_0(N))$ является однородным многочленом степени $\frac{k}{2}$ от функций $G_1, ..., G_s$, делящимся на мультипликативное η-произведение $F(z)$.

Функции $G_i(z) \in M_2(\Gamma_0(N))$, k_0, $F(z)$ указаны в табл. 5.

Таблица 5

k_0	N	G_i	$F(z)$
6	4	$2^{-4} \cdot 4^8;\ 1^{-8} \cdot 2^{20} \cdot 4^{-8}$	$2^{12} = G_1 G_2^2 - 16 G_1^2 G_2$
4	6	$1^{-2} \cdot 2^4 \cdot 3^2 \cdot 6^4; 1^4 \cdot 2^{-2} \cdot 3^4 \cdot 6^{-2}; 1^2 \cdot 2^8 \cdot 3^{-6}$	$6^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = G_1 G_2$
4	8	$2^{-4} \cdot 4^8; 2^8 \cdot 4^{-4}; 4^{-4} \cdot 8^8;$	$4^4 \cdot 2^4 = G_1 G_2$
4	9	$1^3 \cdot 3^{-2} \cdot 9^3; 1^{-3} \cdot 3^{10} \cdot 9^{-3}; 3^{-2} \cdot 9^6$	$3^8 = G_1 G_2$

Доказательство.

1. Докажем по индукции, что для данных весов и уровней элемент пространства $M_k(\Gamma_0(N)$ является однородным многочленом от $G_1, ..., G_s$ степени $\frac{k}{2}$. Для $M_2(\Gamma_0(N)$ это выполняется. В $M_2(\Gamma_0(N)$ имеется модулярная форма $g(z)$, не обращающаяся в ноль ни в одной параболической вершине. Например, $G_1 + G_2$.

Пусть $f(z) \in M_k(\Gamma_0(N)$, тогда

$\frac{f(z)}{g(z)} \in M_{k-2}(\Gamma_0(N)$.

Поэтому $f(z) = g(z) f_1(z), g(z)$, $f_1(z)-$ однородные многочлены от $G_1, ..., G_s$.

2. Далее, пусть $h(z) \in S_k(\Gamma_0(N)$. Если $k = k_0$, то $h(z)$ пропорциональна $F(z)$. Выражения для $F(z)$ приведены в четвертом столбце таблицы.

Пусть $k > k_0$. В этом случае $\frac{h(z)}{F(z)} \in M_{k-k_0}(\Gamma_0(N)$, так как $F(z)$ в каждой параболической вершине имеет ноль первого порядка, $h(z) = F(z) h_1(z)$, $h_1(z)$ — однородный многочлен от $G_1, ..., G_s$.

Заметим, что при переходе от $f(z)$ к $f_1(z)$линейно независимые формы могут переходить в линейно зависимые. При переходе от $h(z)$ к $h_1(z)$ линейная зависимость и независимость сохраняются. При рассматриваемых уровнях $dim\ \ S_k(\Gamma_0(N)) = dim\ \ M_{k-k_0}(\Gamma_0(N))$.

Доказательство того, что все G_i принадлежат $M_2(\Gamma_0(N))$ и их линейной независимости, проводится в соответствии с теоремами 1 и 2.

Теорема 5. Пусть $N = 2, 3, 5,\quad k = 4l, 3l, 2l$ соответственно, тогда любой элемент из $S_k(\Gamma_0(N), \chi^l)$ является однородным многочленом от функций G_1, G_2, делящимся на мультипликативное η-произведение $F(z)$.

Функции $G_i(z)$, χ, $F(z)$ указаны в следующей таблице.

Минимальное возможное значение l равно 1.

k	N	χ	G_i	$F(z)$
$4l$	2	1	$1^{-8} \cdot 2^{16};\ 2^{-8} \cdot 1^{16}$	$1^8 \cdot 2^8 = G_1 G_2$
$3l$	3	$\left(\frac{3}{\cdot}\right)$	$1^{-3} \cdot 3^9; 1^9 \cdot 3^{-3}$	$1^6 \cdot 3^6 = G_1 G_2$
$2l$	5	$\left(\frac{5}{\cdot}\right)$	$1^{-1} \cdot 5^5; 1^5 \cdot 5^{-1}$	$1^4 \cdot 5^4 = G_1 G_2$

Доказательство.

Доказательство проводится аналогично с использованием того факта, что если $f_1(z) \in M_{k_1}(\Gamma_0(N), \chi_1)$ и$f_2(z) \in M_{k_2}(\Gamma_0(N), \chi_2)$, то $f_1(z) f_2(z) \in M_{k_1+k_2}(\Gamma_0(N), \chi_1 \chi_2)$.

5. Теорема о порядках в параболических точках

Теорема 6. Пусть $s = \frac{m}{n}$ — параболическая вершина, $f(z)-\eta$-частное, порядок f в s равен $\alpha(n)$, $f(z) \in M_k(\Gamma_0(N), \chi)$ для некоторого уровня N и характера χ.

Тогда $f(z) \in M_k(\Gamma_0(MN), \chi)$, порядок $f(z)$ в параболической вершине $s_1 = \frac{m}{n}$ равен $\beta(n)$.

Тогда

1) в ∞ порядки совпадают;
2) $\beta(0) = M\ \alpha(0)$;
3) если $n|N$, $(n, M) = 1$, то $\beta(n) = M\ \alpha(n)$;
4) если $n|M$, $(n, N) = 1$, то $\beta(n) = \frac{HOK(n, \frac{M}{n})}{n}\ \alpha(1)$;
5) если $(n, N) = n_1 > 1$, $(n, M) = n_2 > 1$, то $\beta(n) = \frac{HOK(n, \frac{MN}{n})}{HOK(n,N)}\ \alpha(n_1)$.

Доказательство.

Свойство 1 очевидно, так как разложение Фурье не меняется.

Докажем свойство 5, свойства 2–4 — его частные случаи. При этом параболическая вершина $0 = \frac{0}{1}$, $n = 1$.

$$\beta(n) = \frac{MN}{24(n, \frac{MN}{n})n} \sum_{\delta|N} \frac{(n, \delta)^2 r_\delta}{\delta} = \frac{MN}{24(n, \frac{MN}{n})\frac{n}{(n,N)})n_1} \sum_{\delta|N} \frac{(n_1, \delta)^2 r_\delta}{\delta} =$$

$$= \frac{M(n, N)}{n(n, \frac{MN}{n})}\alpha(n_1) = \frac{M \cdot N(n, N)}{n \cdot N(n, \frac{MN}{n})}\alpha(n_1) = \frac{HOK(n, \frac{MN}{n})}{HOK(n, N)}\ \alpha(n_1).$$

Литература

[1] Biagioli A.J.F. The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function // Acta Arithm. 1990. LIV. 4. P. 273–300.

[2] Dummit D., Kisilevsky H., MacKay J. Multiplicative products of η-functions // Contemp. Math. 1985. V. 45. P. 89–98.

[3] Martin Y. Multiplicative eta-quotients // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. P. 4825–4856.

[4] Mason G. Finite groups and Hecke operators // Math.Ann. 1989. V. 283. P. 381–409.

[5] Newman M. Construction and application of a certain class of modular forms // Proc. L.M.S. 1956. V. 7. P. 334–350.

[6] Ono K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series. Providence: Amer. Math. Soc., 2004. 216 p.

[7] Voskresenskaya G.V. One special class of modular forms and group representations // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. 1999. V. 11. P. 247–262.

Поступила в редакцию 22/III/2012;
в окончательном варианте — 22/III/2012.

THE SPACES THAT CONTAIN MULTIPLICATIVE ETA-FUNCTIONS

 G.V. Voskresenskaya[2]

In the article we study the structure of the spaces of modular forms that contain the multiplicative eta-functions.We find dimensions and basises. We also study the behavior of the functions in cusps.

Key words: spaces of modular forms, Dedekind eta-function, cusps.

Paper received 22/*III*/2012.
Paper accepted 22/*III*/2012.

[2]Voskresenskaya Galina Valentinovna (`galvosk@mail.ru`), Dept.of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.