МЕХАНИКА

УДК 539.42

# О НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, СЛЕДУЮЩЕЙ ИЗ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕНИЙ У ВЕРШИНЫ УСТАЛОСТНОЙ ТРЕЩИНЫ

© 2012 Е.М. Адылина, С.А. Игонин, Л.В. Степанова[1]

В работе получено аналитическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из проблемы определения напряженно-деформированного состояния и поля поврежденности у вершины растущей в условиях приложения периодической нагрузки трещины в среде с поврежденностью. Для решения задачи был использован метод малого параметра, позволяющий найти аналитическую зависимость собственного значения от параметров кинетического уравнения накопления повреждений.

**Ключевые слова:** нелинейная задача на собственные значения, циклическое нагружение, рост трещины в среде с поврежденностью, метод малого параметра, аналитическое решение.

## Введение

В современной нелинейной механике разрушения одним из наиболее распространенных методов анализа напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины как в линейно-упругих материалах, так в материалах с нелинейными определяющими уравнениями является метод разложения по собственным функциям, восходящий к работам М. Уильямса [1; 2], в которых впервые было использовано разложение функции напряжений Эри в ряд по степеням расстояния от кончика трещины в линейно-упругом материале. С тех пор асимптотический анализ распределения напряжений у кончика трещины стал неотъемлемой частью исследований, проводимых в механике разрушения [3; 4]. Только в самое последнее время метод разложения по собственным функциям полей напряжений и перемещений у вершины трещины или углового выреза был применен в целом ряде исследований [5–12]. В [5] предлагается новый вариант метода граничных элементов, базирующийся на асимптотическом разложении напряжений в малой окрестности углового выреза в линейно-упругом материале и применении традиционного метода граничных элементов в оставшейся области. Определение сингулярности поля напряжений в малой окрестности вершины трещины сводится к

[1]Адылина Екатерина Михайловна (kateadulina@mail.ru), Игонин Сергей Александрович (sergejiginin@yandex.ru), Степанова Лариса Валентиновна (lst@ssu.samara.ru), кафедра математического моделирования в механике Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

задаче на собственные значения. Комбинация асимптотического подхода и метода граничных элементов позволяет аккуратно и эффективно моделировать поле напряжений в элементе конструкции с угловым вырезом. Авторы в [5] отмечают, что предлагаемый ими комбинированный подход позволяет не обращаться к сгущению сетки вблизи кончика трещины в рамках метода граничных элементов. Другим существенным преимуществом данного подхода является то, что метод дает возможность найти как главный член асимптотического разложения напряжений в малой окрестности вершины трещины, так и высшие приближения посредством решения задачи на собственные значения.

В работе [6], посвященной динамическому распространению трещины в линейно-упругой среде, авторы указывают на необходимость рассмотрения всех членов асимптотического разложения, которые оказываются существенными в рамках теории слабой нелинейности. Эта теория исходит из того, что решение линейной теории упругости (даже для линейно-упругого материала) становится непригодным на некотором расстоянии $l$ от кончика трещины, где следует искать асимптотическое решение, удерживая слагаемые, которыми пренебрегают в линейной механике разрушения. Асимптотические разложения компонент тензора напряжений являются основой анализа, проведенного в [7], где рассматриваются вырезы на границе двух упругих материалов с разными свойствами (разные виды анизотропии). В этой статье показано, что в асимптотическом представлении полей напряжений и перемещений вблизи выреза следует удерживать высшие приближения, которые оказываются существенными для определения амплитуды поля напряжений. Анализ напряженно-деформированного состояния, выполненный в [8], проведен в традиционном для последних двух десятилетий ключе, когда в малой окрестности вершины трещины в материале с определяющими соотношениями Рамберга–Осгуда строятся двучленные асимптотические разложения компонент тензора напряжений и деформаций и коэффициенты второго члена разложений находятся численно с помощью конечно-элементного расчета. Тем не менее показано, что 1) необходимо удерживать высшие члены в асимптотических разложениях механических величин в окрестности вершины трещины; 2) подход, основанный на сочетании асимптотического анализа и конечно-элементного расчета, эффективен для широкого класса геометрий тел с трещинами, приложенных систем нагрузок и широкого диапазона показателя упрочнения материала. Асимптотический анализ напряжений и перемещений в окрестности углового выреза является предметом обсуждения в [9], где также были рассмотрены эффекты несингулярных членов асимптотических разложений.

Результаты асимптотического анализа [9] ясно показывают, что пренебрежение несингулярными членами асимптотических разложений может вести к значительным ошибкам в оценке параметров разрушения элементов конструкций с угловыми вырезами. Высшие приближения асимптотических разложений напряжений и перемещений вблизи кончика трещины поперечного сдвига рассматриваются Ф. Берто, П. Лаззарином и А. Котузовым [10]. В данной статье осуществлена попытка обобщения асимптотических методов, применяемых в двумерных задачах линейной механики разрушения, на пространственные задачи. В [11] авторы, опираясь на полное асимптотическое решение М. Уильямса, смогли обработать эксперименты, проведенные методами фотоупругости. На основе экспериментальных данных были вычислены коэффициенты интенсивности напряжений, которые были сопоставлены с результатами конечно-элементного решения. Экспериментальные результаты ясно показали, что высшие приближения в асимптотических разложениях механических величин могут значительно влиять на коэффициенты интенсивности напряжений. В [12] показано, что задача определения напряженно-деформированного состояния в бесконечной линейно-упругой пластине с трещиной конечной длины может быть сведена к задаче на собственные значения, которая допускает аналитическое решение и, следовательно, аналитические представления для собственных функций и собственных значений.

Таким образом, можно утверждать, что метод разложения по собственным функциям для решения задач определения напряженно-деформированного состояния у вершин трещин и угловых вырезов получил широкое распространение и является весьма эффективным: 1) данный подход позволяет получить аналитические представления полей напряжений, деформаций и перемещений у вершин трещин и угловых вырезов; 2) асимптотические разложения напряжений и деформаций достаточно просто ввести в процедуру классических численных методов (например, метода граничных элементов).

Однако если в [3] приведен подробный и исчерпывающий обзор асимптотических методов в линейной теории упругости и применения асимптотического анализа в задачах линейной механики разрушения, то анализ распределения напряжений, деформаций и перемещений вблизи вершины трещины в материале с нелинейными определяющими уравнениями представляет собой одну из фундаментальных задач механики деформируемого твердого тела и многие вопросы остаются открытыми [13].

В нелинейной механике разрушения использование метода разложения механических величин (компонент тензора напряжений, деформаций, компонент вектора перемещений, функции напряжений Эри) по собственным функциям приводит к нелинейным задачам на собственные значения [14–19]. Наиболее распространенным методом решения нелинейных задач на собственные значения остается численный анализ, опирающийся на методы Рунге–Кутты–Фельберга и метод пристрелки. Но метод пристрелки в задачах о трещинах нормального отрыва, поперечного сдвига и в случае смешанного нагружения становится многопараметрическим, и его результаты требуют дополнительного обоснования и проверки. Поэтому в последние годы уделяется пристальное внимание аналитическим методам решения нелинейных уравнений математической физики и механики в целом [20; 21] и методам решения нелинейных задач на собственные значения в частности [22–25]. Одним из перспективных методов получения аналитических оценок собственных значений является классический метод малого параметра, который к задачам, следующим из проблемы определения напряженно-деформированного состояния у вершины трещины или углового выреза, обычно не применяется. Можно также отметить широкий класс нелинейных задач на собственные значения, возникающих при построении автомодельных решений и автомодельных переменных [21; 26–28], для решения которых представляется важным наличие аналитических выражений искомых функций и степеней в автомодельных переменных.

Целью настоящей работы является аналитическое решение нелинейной задачи на собственные значения, следующей из анализа полей напряжений, деформаций и сплошности у вершины усталостной трещины с учетом процессов накопления повреждений. Оригинальная постановка задачи об усталостном подрастании трещины в среде с поврежденностью была предложена в [29]. Однако выполненный в [29] численный анализ собственных функций и значений не является верным и требует дополнительного исследования.

# 1. Постановка задачи о росте усталостной трещины с учетом процесса накопления повреждений

Пусть в линейно-упругой бесконечной плоскости распространяется полубесконечная трещина, рост которой обусловлен приложением периодической нагрузки, т. е. рассматривается медленное докритическое подрастание трещины в условиях усталостного нагружения. В полярной системе координат $r, \theta$, связанной с вершиной трещины, основные соотношения механики деформируемого твердого тела имеют вид:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2\frac{\sigma_{r\theta}}{r} = 0; \tag{1.1}$$

условие совместности деформаций

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_{rr}}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial r} + r\frac{\partial^2 (r\varepsilon_{\theta\theta})}{\partial r^2}. \tag{1.2}$$

Если учитывать процесс накопления повреждений, то определяющие уравнения изотропного линейно-упругого материала в связанной постановке имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\frac{\sigma_{ij}}{\psi} - \frac{\nu}{E}\frac{\sigma_{kk}}{\psi}\delta_{ij}, \tag{1.3}$$

где $E$ — модуль Юнга, $\nu$ — коэффициент Пуассона, $\psi$ — параметр сплошности.

Для плоского деформированного состояния определяющие уравнения (1.3) принимают вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1+\nu}{E\psi}\left[(1-\nu)\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}\right], \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1+\nu}{E\psi}\left[(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}\right], \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E\psi}\sigma_{r\theta}. \tag{1.5}$$

Краевые условия следуют из условий отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = \pm\pi), \qquad \sigma_{r\theta}(r, \theta = \pm\pi). \tag{1.6}$$

Введем в рассмотрение функцию напряжений Эри, связанную с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{rr} = \Delta F - \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right), \tag{1.7}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

есть оператор Лапласа.

Следуя [29], будем искать асимптотическое решение задачи в непосредственной окрестности вершины трещины $(r \to 0)$ в виде

$$F(r, \theta) = \alpha r^{\lambda+2} f(\theta). \tag{1.8}$$

Тогда компоненты тензора напряжений представимы в форме разложения по собственным функциям

$$\sigma_{rr}(r, \theta) = \alpha r^{\lambda}\tilde{\sigma}_{rr}(\theta), \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \alpha r^{\lambda}\tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta), \quad \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \alpha r^{\lambda}\tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta), \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{rr}(\theta) &= (\lambda+2)f(\theta) + f''(\theta), \\ \tilde{\sigma}_{\theta\theta}(\theta) &= (\lambda+2)(\lambda+1)f(\theta), \\ \tilde{\sigma}_{r\theta}(\theta) &= -(\lambda+1)f'(\theta). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Асимптотическое представление параметра сплошности вблизи вершины усталостной трещины задается в виде

$$\psi(r,\theta) = \beta r^{\mu} g(\theta). \tag{1.11}$$

Асимптотика деформаций в окрестности вершины трещины определяется формулами

$$\begin{gathered} \varepsilon_{rr}(r,\theta) = \frac{1+\nu}{E}\frac{\alpha}{\beta E} r^{\lambda-\mu}\tilde{\varepsilon}_{rr}(\theta), \ \varepsilon_{\theta\theta}(r,\theta) = \frac{1+\nu}{E}\frac{\alpha}{\beta E} r^{\lambda-\mu}\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}(\theta), \\ \varepsilon_{r\theta}(r,\theta) = \frac{1+\nu}{E}\frac{\alpha}{\beta E} r^{\lambda-\mu}\tilde{\varepsilon}_{r\theta}(\theta), \end{gathered} \tag{1.12}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{\varepsilon}_{rr} = g^{-1}\left[(1-\nu)\tilde{\sigma}_{rr} - \nu\tilde{\sigma}_{\theta\theta}\right], \quad \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = g^{-1}\left[(1-\nu)\tilde{\sigma}_{\theta\theta} - \nu\tilde{\sigma}_{rr}\right], \\ \tilde{\varepsilon}_{r\theta} = g^{-1}\tilde{\sigma}_{r\theta}, \end{gathered} \tag{1.13}$$

для плоского деформированного состояния.

Условие совместности деформаций (1.2) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$2(\lambda-\mu+1)\frac{d\tilde{\varepsilon}_{r\theta}}{d\theta} = \frac{d^2\tilde{\varepsilon}_{rr}}{d\theta^2} - (\lambda-\mu)\tilde{\varepsilon}_{rr} + (\lambda-\mu+1)\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}. \tag{1.14}$$

Учитывая принятые обозначения (1.13), можно представить уравнение (1.14) в виде

$$f^{IV} - 2(1-\nu)\bar{E}f''' + \left(\bar{G} + b_1\right)f'' - 2b_2\bar{E}f' + \left(b_3 + e_1\bar{G}\right)f = 0. \tag{1.15}$$

для плоского деформированного состояния, где приняты обозначения

$$\bar{E} = g'/g, \quad \bar{G} = 2\bar{E}^2 - g''/g, \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= 2(\lambda-\mu+1)(\lambda+1) - \nu(\lambda+2)(\lambda+1) - (\lambda-\mu)\left[1-(\lambda-\mu)\nu\right], \\ b_2 &= (\lambda-\mu+1)(\lambda+1) + (1-\nu)(\lambda+2) + \nu(\lambda+2)(\lambda+1), \\ b_3 &= (\lambda-\mu)(\lambda+2)\left\{\left[\nu-(\lambda-\mu+1)(1-\nu)\right](\lambda+1) - 1 + (\lambda-\mu)\nu\right\}, \\ e_1 &= (1-\nu)(\lambda+2) - \nu(\lambda+2)(\lambda+1). \end{aligned} \tag{1.17}$$

В [29] показано, что с учетом введенных асимптотических представлений кинетическое уравнение накопления повреждений может быть представлено в форме

$$\frac{d\psi}{dN} = -c\alpha^m\beta^{-n}r^{m\lambda-\mu n}\tilde{\sigma}_e^m g^{-n}, \tag{1.18}$$

где

$$\tilde{\sigma}_e = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\tilde{\sigma}_{rr} - \tilde{\sigma}_{\theta\theta}\right)^2 + 4\tilde{\sigma}_{r\theta}^2\right]^{1/2}. \tag{1.19}$$

Проводя рассуждения, подобные выполненным в [29], можно найти, что кинетическое уравнение накопления повреждений преобразуется к равенству ($a$ — текущая длина трещины)

$$\frac{d\psi}{dN} = \beta\frac{da}{dN}r^{\mu-1}\left(g' sin\theta - \mu g\cos\theta\right), \tag{1.20}$$

откуда, сравнивая (1.18) и (1.20), легко установить, что

$$\frac{da}{dN} = c\alpha^m \beta^{-(n+1)}, \tag{1.21}$$

$$m\lambda - \mu n = \mu - 1 \quad \text{или} \quad \lambda = [\mu(n+1) - 1]/m, \tag{1.22}$$

$$g' \sin\theta - \mu g \cos\theta = -\tilde{\sigma}_e^m g^{-n}. \tag{1.23}$$

Таким образом, получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.15), (1.23) с интенсивностью напряжений, определяемой формулой (1.19).

Краевые условия задачи следуют из условий симметрии на продолжении трещины

$$f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad g'(0) = 0. \tag{1.24}$$

В силу однородности систем уравнений (1.15), (1.23) можно сформулировать условие нормировки решения

$$f(0) = 1. \tag{1.25}$$

Для функции $g(\theta)$ кинетическое уравнение дает возможность получить условие регулярности решения на продолжении линии трещины

$$g(0) = \left[\tilde{\sigma}_e^m(0)/\mu\right]^{1/(n+1)}. \tag{1.26}$$

Краевые условия на берегах трещины имеют вид:

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0. \tag{1.27}$$

## 2. Нелинейная задача на собственные значения

Система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1-\nu)f^{IV} - 2(1-\nu)\bar{E}f''' + [(1-\nu)\bar{G} + b_1]f'' - 2\bar{E}b_2 f' + \left[e_1\bar{G} + b_3\right] f = 0, \tag{2.1}$$

$$g' \sin\theta - \mu g \cos\theta = -\tilde{\sigma}_e^m g^{-n} \tag{2.2}$$

с граничными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f'''(0) = 0, \quad g'(0) = 0, \tag{2.3}$$

$$f(\theta = \pi) = 0, \quad f'(\theta = \pi) = 0 \tag{2.4}$$

и условием регулярности

$$g(0) = \left[\tilde{\sigma}_e^m(0)/\mu\right]^{1/(n+1)} \tag{2.5}$$

представляет собой нелинейную задачу на собственные значения: необходимо найти собственное значение $\mu$, при котором существует нетривиальное решение этой системы уравнений, удовлетворяющее краевым условиям задачи. Численное решение системы уравнений (2.1)–(2.2) с граничными условиями (2.3)–(2.4) было получено в [30]. Предметом дальнейшего изложения будет применение метода возмущений для построения аналитического решения сформулированной нелинейной задачи на собственные значения.

## 3. Метод малого параметра

Введем малый параметр $\varepsilon = \mu - \mu_0$, отражающий влияние нелинейности задачи (нелинейного закона накопления повреждений). Приближенное решение системы уравнений относительно двух функций $f(\theta)$ и $g(\theta)$ (2.1), (2.2) разыскивается в форме

$$\begin{aligned} &\mu = \mu_0 + \varepsilon, \\ &\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^3\lambda_3 + ..., \\ &n = 1 + \varepsilon n_1 + \varepsilon^2 n_2 + \varepsilon^3 n_3 + ..., \\ &m = 1 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \varepsilon^3 m_3 + ..., \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &f(\theta) = f_0(\theta) + \varepsilon f_1(\theta) + \varepsilon^2 f_2(\theta) + \varepsilon^3 f_3(\theta) + \dots, \\ &g(\theta) = g_0(\theta) + \varepsilon g_1(\theta) + \varepsilon^2 g_2(\theta) + \varepsilon^3 g_3(\theta) + \dots. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В силу (1.22) справедливы соотношения

$$\lambda_0 = 2\mu_0 - 1, \quad \lambda_1 = 2 + \mu_0 n_1 - m_1(2\mu_0 - 1),$$

$$\lambda_2 = n_1 + \mu_0 n_2 - m_1(2 + \mu_0 n_1) + (2\mu_0 - 1)(-m_2 + m_1^2),$$

$$\lambda_3 = \mu_0 n_3 + n_2 + (-2\mu_0 + 1)m_3 + (-\mu_0 n_1 - 2 + 2m_1\mu_0 - m_1)m_2 +$$
$$+(-\mu_0 n_1 - n_1 + 2m_2\mu_0 - m_2 + m_1\mu_0 n_1 + 2m_1 - 2m_1^2\mu_0 + m_1^2)m_1.$$

Подставим асимптотические разложения (3.1) и (3.2) в систему уравнений (3.1), (3.2). Вводя обозначения

$$\bar{E} = E_0 + \varepsilon E_1 + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon^3 E_3 + ..., \quad \bar{G} = G_0 + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \varepsilon^3 G_3 + ...,$$

$$E_0 = \frac{g_0'}{g_0}, \qquad E_1 = \frac{1}{g_0}\left(g_1' - g_0'\frac{g_1}{g_0}\right),$$

$$E_2 = \frac{1}{g_0}\left[g_2' - g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\left(\frac{g_1^2}{g_0^2} - \frac{g_2}{g_0}\right)\right],$$

$$E_3 = \frac{1}{g_0}\left\{g_3' - g_2'\frac{g_1}{g_0} + g_1'\left[\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \frac{g_2}{g_1}\right] + g_0'\left[-\frac{g_3}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3 + 2\frac{g_1}{g_0}\frac{g_2}{g_0}\right]\right\},$$

$$G_0 = 2\frac{g_0'^2}{g_0^2} - \frac{g_0''}{g_0}, \quad G_1 = \frac{4g_0'}{g_0^2}\left(g_1' - g_0'\frac{g_1}{g_0}\right) - \frac{1}{g_0}\left(g_1'' - g_0''\frac{g_1}{g_0}\right),$$

$$G_2 = 2\frac{1}{g_0^2}\left(g_1' - g_0'\frac{g_1}{g_0}\right)^2 + 4\frac{g_0'}{g_0^2}\left[g_2' - g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\left(\frac{g_1^2}{g_0^2} - \frac{g_2}{g_0}\right)\right] -$$
$$-\frac{1}{g_0}\left[g_2'' - g_1''\frac{g_1}{g_0} + g_0''\left(\frac{g_1^2}{g_0^2} - \frac{g_2}{g_0}\right)\right],$$

$$G_3 = 4\frac{g_0'}{g_0^2}\left(g_3' - g_0'\frac{g_3}{g_0}\right) - \frac{g_3''}{g_0} + \frac{g_0''g_3}{g_0^2} + 4\frac{g_0'}{g_0^2}\left[-g_2'\frac{g_1}{g_0} + g_1'\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - g_1\frac{g_2}{g_0}\right] +$$
$$+ \ 4\frac{g_0'}{g_0^2}\left[2g_0'\frac{g_1 g_2}{g_0^2} - g_0'\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3\right] + \frac{4}{g_0^2}\left(g_1' - g_0'\frac{g_1}{g_0}\right)\left\{g_2' - g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\left[\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \frac{g_2}{g_0}\right]\right\} +$$
$$+ \ g_2''\frac{g_1}{g_0^2} - \frac{g_1''}{g_0}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 + g_1''\frac{g_2}{g_0^2} + \frac{g_0''}{g_0}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3 - 2\frac{g_0''g_1 g_2}{g_0^3},$$

$$b_1 = b_1^0 + \varepsilon b_1^1 + \varepsilon^2 b_1^2 + \varepsilon^3 b_1^3 + ..., \quad b_2 = b_2^0 + \varepsilon b_2^1 + \varepsilon^2 b_2^2 + \varepsilon^3 b_2^3 + ...,$$

$$b_3 = b_3^0 + \varepsilon b_3^1 + \varepsilon^2 b_3^2 + \varepsilon^3 b_3^3 + ..., \quad e_1 = e_1^0 + \varepsilon e_1^1 + \varepsilon^2 e_1^2 + \varepsilon^3 e_1^3 + ...,$$

$$b_1^0 = 7 - 9\nu, \quad b_2^0 = 5 - 9\nu, \quad b_3^0 = 0, \quad e_1^0 = 3 - 9\nu,$$

$$
\begin{aligned}
&b_1^1 = 9 - 12\nu + 6(1-\nu)k_1, \quad k_1 = n_1 - m_1, \quad b_3^1 = 3(-3+4\nu)(k_1+1),\\
&b_1^2 = [6\mu_0 - 1 - \nu(2\mu_0+3)]\left[n_1 + n_2\mu_0 - m_1(2+n_1\mu_0) + (2\mu_0-1)(m_1^2 - m_2)\right] +\\
&+2\left[3 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]\left[2 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right] -\\
&-\nu\left[2 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]^2 + \nu\left[3 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]^3,\\
&b_1^3 = [6\mu_0 - 1\nu(2\mu_0+3)]\left[n_2 - \mu_0 n_3 - m_1(n_1 + n_2\mu_0) +\right.\\
&\left.+(2+n_1\mu_0)(m_1^2 - m_2) + (2\mu_0-1)(-m_1^3 + 2m_1m_2 - m_3)\right] +\\
&+\left\{10 + 2\nu + 4\left[n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]\right\}\left[n_1 + n_2\mu_0 - m_1(2+n_1\mu_0) +\right.\\
&\left.+(2\mu_0-1)(m_1^2 - m_2)\right],\\
&b_2^1 = 6 - 12\nu + (4-6\nu)k_1,\\
&b_2^2 = [(3\mu_0+1) + 4\nu\mu_0]\left[n_1 + n_2\mu_0 - m_1(2+n_1\mu_0) + (2\mu_0-1)(m_1^2 - m_2)\right] +\\
&+\left[3 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]\left[2 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right] +\\
&+\nu\left[2 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]^2,\\
&b_2^3 = [(3\mu_0+1) + 4\nu\mu_0]\left[n_2 - \mu_0 n_3 - m_1(n_1 + n_2\mu_0) + (2+n_1\mu_0)(m_1^2 - m_2) +\right.\\
&\left.+\ (2\mu_0-1)(-m_1^3 + 2m_1m_2 - m_3)\right] +\\
&+\left\{5 + 4\nu + 2(1+\nu)\left[n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]\right\}\left[n_1 + n_2\mu_0 - m_1(2+n_1\mu_0) +\right.\\
&\left.+(2\mu_0-1)(m_1^2 - m_2)\right],\\
&b_3^2 = (\lambda_0 - \mu_0)(\lambda_0+2)\left\{[2\nu - 3\mu_0(1-\nu)]\left[n_1 + n_2\mu_0 - m_1(2+n_1\mu_0) +\right.\right.\\
&\left.\left.+\ (2\mu_0-1)(m_1^2 - m_2)\right] - (1-\nu)\left[2 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]\left[3 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)\right]\right\} +\\
&+\left[(\lambda_1-1)(\lambda_2+2) + \lambda_1(\lambda_0-\mu_0)\right]\left\{5\nu - 8\mu_0(1-\nu)[2\nu - 3(1-\nu)\mu_0]\times\right.\\
&\left.\times[n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)]\right\} + \left[\lambda_2(\lambda_0+2) + \lambda_1(\lambda_1-1) + \lambda_2(\lambda_0-\mu_0)\right]\times\\
&\times[\nu - (1-\nu)\mu_0 - 1 + \nu(\mu_0-1)],\\
&b_3^3 = (\lambda_0-\mu_0)(\lambda_0+2)[2\nu - 3(1-\nu)\mu_0][n_2 + \mu_0 n_3 - m_1(n_1 + n_2\mu_0) +\\
&+(2+n_1\mu_0)(m_1^2 - m_2)] + (2\mu_0-1)(-m_1^3 + 2m_1m_2 - m_3)] -\\
&-(1-\nu)(\lambda_0-\mu_0)(\lambda_0+2)[5 + 2n_1\mu_0 - 2m_1(2\mu_0-1)]\times\\
&\times[n_1 + n_2\mu_0 - m_1(2+n_1\mu_0) + (2\mu_0-1)(m_1^2 - m_2)] +\\
&+[(\lambda_1-1)(\lambda_0+2) + \lambda_1(\lambda_0-\mu_0)]\left\{[2\nu - 3(1-\nu)\mu_0]\times\right.\\
&\times[n_1 + n_2\mu_0 - m_1(2+n_1\mu_0) + (2\mu_0-1)(m_1^2 - m_2)] -\\
&\left.-(1-\nu)[3 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)][2 + n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)]\right\} +\\
&+[\lambda_2(\lambda_0+2) + \lambda_1(\lambda_1-1) + \lambda_2(\lambda_0-\mu_0)]\left\{5\nu - 8\mu_0(1-\nu) +\right.\\
&\left.+[2\nu - 3(1-\nu)\mu_0][n_1\mu_0 - m_1(2\mu_0-1)]\right\} +\\
&++\left[\lambda_2(\lambda_0+2) + \lambda_2(\lambda_1-1) + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3(\lambda_0-\mu_0)\right][\nu - (1-\nu)\mu_0 - 1 + \nu(\mu_0-1)],\\
&e_1^1 = 2 - 12\nu + (1-6\nu)k_1,\\
&e_1^2 = [1 - \nu - \nu(\lambda_0+1)]\,\lambda_2 - \nu\lambda_1^2 - \nu\lambda_2(\lambda_0+2),\\
&e_1^3 = [1 - \nu - \nu(\lambda_0+1)]\,\lambda_3 - 2\nu\lambda_1\lambda_2 - \nu\lambda_3(\lambda_0+2)
\end{aligned}
$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$, из уравнения (2.1) можно найти

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^0:\quad & (1-\nu)f_0^{IV} - 2(1-\nu)E_0 f_0''' + (1-\nu)G_0 f_0'' + b_1^0 f_0'' - 2E_0 b_2^0 f_0' + \\
& + e_1^0 G_0 f_0 + b_3^0 f_0 = 0, \qquad (3.3)\\
\varepsilon^1:\quad & (1-\nu)f_1^{IV} - 2(1-\nu)\left(E_1 f_0''' + E_0 f_1'''\right) + (1-\nu)\left(G_1 f_0'' + G_0 f_1''\right) + \\
& + b_1^1 f_0'' + b_1^0 f_1'' - 2\left(E_1 b_2^0 + E_0 b_2^1\right) f_0' - 2E_0 b_2^0 f_1' + \qquad (3.4)\\
& + e_1^1 G_0 f_0 + e_1^0 G_1 f_0 + e_1^0 G_0 f_1 + b_3^1 f_0 + b_3^0 f_1 = 0,\\
\varepsilon^2:\quad & (1-\nu)f_2^{IV} - 2(1-\nu)E_0 f_2''' - 2(1-\nu)E_2 f_0'' + (1-\nu)G_0 f_2'' + \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(1-\nu)G_2 f_0'' + b_1^0 f_2'' - 2E_0 b_2^0 f_2' - 2E_2 b_2^0 f_0' + e_1^0 G_0 f_2 + e_1^0 G_2 f_0 + b_3^0 f_2 = \\
&= 2(1-\nu)E_1 f_1''' - (1-\nu)G_1 f_1'' - b_1^1 f_1'' - b_1^2 f_0'' + 2\left(b_2^0 E_1 + E_0 b_2^1\right) f_1' + \\
&+2\left(b_2^2 E_0 + E_1 b_2^1\right) f_0' - \left(e_1^1 G_0 + e_1^0 G_1\right) f_1 - \left(e_1^2 G_0 + e_1^1\right) f_0 - b_3^2 f_0 - b_3^1 f_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^3: \quad &(1-\nu) f_3^{IV} - 2(1-\nu)\left(E_0 f_3''' + E_1 f_2''' + E_2 f_1''' + E_3 f_0'''\right) + \\
&+(1-\nu)\left(G_0 f_3'' + G_1 f_2'' + G_2 f_1'' + G_3 f_0''\right) + b_1^3 f_0'' + b_1^2 f_1'' + b_1^1 f_2'' + b_1^0 f_3'' - \\
&-2\left(E_0 b_2^3 + E_1 b_2^2 + E_2 b_2^1 + E_0 b_2^0\right) f_0' - 2\left(E_2 b_2^0 + E_1 b_2^1 + E_0 b_2^2\right) f_1' - \\
&-2\left(E_1 b_2^0 + E_0 b_2^1\right) f_2' - 2E_0 b_2^0 f_3' + \left(e_1^3 G_0 + e_1^2 G_1 + e_1^1 G_2 + e_1^0 G_3\right) f_0 + \\
&+\left(e_1^2 G_0 + e_1^1 G_1 + e_1^0 G_2\right) f_1 + \left(e_1^1 G_0 + e_1^0 G_1\right) f_2 + e_1^0 G_0 f_3 + \\
&+b_3^0 f_3 + b_3^1 f_2 + b_3^2 f_1 + b_3^3 f_0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Из уравнения (2.2), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, можно вывести уравнения

$$
\varepsilon^0: \quad g_0' \sin\theta - \mu_0 g_0 \cos\theta = -\sigma_e^{(0)}/g_0 \tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^1: \quad &g_1' \sin\theta - \mu_0 g_1 \cos\theta + \sigma_e^{(1)}/g_0 - \left[\sigma_e^{(0)}/g_0^2\right] g_1 = \\
&= -\sigma_e^{(0)}/g_0 \left[m_1 \ln\sigma_e^{(0)} - n_1 \ln g_0\right] + g_0 \cos\theta,
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2: \quad &g_2' \sin\theta - \mu_0 g_2 \cos\theta + \sigma_e^{(2)}/g_0 - \sigma_e^{(0)} g_2/g_0^2 = g_1 \cos\theta - \\
&-\sigma_e^{(0)} \left[\frac{1}{2} m_1^2 \left(\ln\sigma_e^{(0)}\right)^2 + m_2 \ln\sigma_e^{(0)} + m_1 \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} + \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} n_1^2 (\ln g_0)^2 - n_2 \ln g_0 - n_1 \frac{g_1}{g_0} - \frac{\sigma_e^{(1)} g_1}{\sigma_e^{(0)} g_0} - \\
&\quad \left. - m_1 n_1 \ln\sigma_e^{(0)} \ln g_0 + (m_1 \ln\sigma_e^{(0)} - n_1 \ln g_0)\left(\frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} - \frac{g_1}{g_0}\right)\right] / g_0,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

$$
\varepsilon^3: \quad g_3' \sin\theta - \mu_0 g_3 \cos\theta + \sigma_e^{(3)}/g_0 - \sigma_e^{(0)} g_3/g_0^2 = g_2 \cos\theta - \tag{3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sigma_e^{(0)} \left\{ -\frac{1}{6}(n_1 \ln g_0)^3 + n_1 n_2 (\ln g_0)^2 + n_1^2 \frac{g_1}{g_0} \ln g_0 - n_3 \ln g_0 - n_2 \frac{g_1}{g_0} - \right. \\
&-n_1 \frac{g_2}{g_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 + m_1 \ln\sigma_e^{(0)} \left[\frac{1}{2}(n_1 \ln g_0)^2 - n_2 \ln g_0 - n_1 \frac{g_1}{g_0}\right] - \\
&-n_1 \ln g_0 \left[\frac{1}{2}(m_1 \ln\sigma_e^{(0)})^2 + m_2 \ln\sigma_e^{(0)} + m_1 \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}}\right] + \\
&+\frac{1}{6}(m_1 \ln\sigma_e^{(0)})^3 + m_1 m_2 (\ln\sigma_e^{(0)})^2 + m_1^2 \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} \ln\sigma_e^{(0)} + m_3 \ln\sigma_e^{(0)} + m_2 \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} + \\
&+m_1 \frac{\sigma_e^{(2)}}{\sigma_e^{(0)}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}}\right)^2 + + \left(\frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} - \frac{g_1}{g_0}\right)\left[\frac{1}{2}(\ln g_0)^2 - n_2 \ln g_0 - n_1 \frac{g_1}{g_0}\right] + \\
&+\left(\frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} - \frac{g_1}{g_0}\right)\left[\frac{1}{2}(m_1 \ln\sigma_e^{(0)})^2 + m_2 \ln\sigma_e^{(0)} + m_1 \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} - n_1 m_1 \ln\sigma_e^{(0)} \ln g_0\right] + \\
&+\left(-n_1 \ln g_0 + m_1 \ln\sigma_e^{(0)}\right)\left[\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \frac{g_2}{g_0} - \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} \frac{g_1}{g_0} + \frac{\sigma_e^{(2)}}{\sigma_e^{(0)}}\right] - \\
&\left. -\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3 + 2\frac{g_1}{g_0}\frac{g_2}{g_0} + \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}}\frac{g_2}{g_0} - \frac{\sigma_e^{(2)}}{\sigma_e^{(0)}}\frac{g_1}{g_0} \right\},
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\sigma_e^{(0)} = \sqrt{\left(f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0\right)^2 + 4(\lambda_0+1)^2\left(f_0'\right)^2},\\
&\sigma_e^{(1)} = \{[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0]\,[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 4\lambda_1 f_0] +\\
&+4(\lambda_0+1)\left[(\lambda_0+1)f_0'f_1' + \lambda_1(f_0')^2\right]\}\,/\sigma_e^{(0)},\\
&\sigma_e^{(2)} = \frac{1}{2}\Big\{[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0]^2 + 2\,[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0]\times\\
&\times\left[f_2'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_2 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_1 - (2\lambda_2(\lambda_0+2)+\lambda_1^2)f_0\right] +\\
&+4\,[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0']^2 + 8(\lambda_0+1)f_0'\,[((\lambda_0+1)+1)f_2' + \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_0']\Big\}\,/\sigma_e^{(0)} +\\
&+\frac{1}{2}\,\{[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0]\,[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0] +\\
&+4(\lambda_0+1)f_0'\,[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0']\}\,/(\sigma_e^{(0)})^3,\\
&\sigma_e^{(3)} = \frac{1}{2\sigma_e^{(0)}}\,\{[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0]\,[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0] +\\
&+4(\lambda_0+1)f_0'\,[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0']\}^2 -\\
&-\frac{1}{2\sigma_e^{(0)}}\,\{[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0]\,[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0] +\\
&+4(\lambda_0+1)f_0'\,[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0']\}\Big\{[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0]^2 +\\
&+4\,[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0']^2 + 2\,[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0]\times\\
&\times\left[f_2'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_2 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_1 - (\lambda_2(\lambda_0+2)+\lambda_1^2+\lambda_0\lambda_2)f_0\right] +\\
&+8(\lambda_0+1)f_0'\,[(\lambda_0+1)f_2' + \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_0']\} +\\
&+\frac{1}{\sigma_e^{(0)}}\,[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0]\times\\
&\times\left[f_2'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_2 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_1 - (2\lambda_2(\lambda_0+1)+\lambda_1^2)f_0\right] +\\
&+\frac{1}{\sigma_e^{(0)}}\,[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0]\,\{f_3'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_3 - [\lambda_1(\lambda_0+2)+\lambda_0\lambda_1]\,f_2 -\\
&-\left[2\lambda_2(\lambda_0+1)+\lambda_1^2\right]f_1 - [2\lambda_3(\lambda_0+1)+2\lambda_1\lambda_2]\,f_0\} +\\
&+4\frac{1}{\sigma_e^{(0)}}\,[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0']\,[(\lambda_0+1)f_2' + \lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_0'] +\\
&+4\frac{1}{\sigma_e^{(0)}}(\lambda_0+1)f_0'\,[(\lambda_0+1)f_3' + \lambda_1 f_2' + \lambda_2 f_1' + \lambda_3 f_0'] .
\end{aligned}
\qquad (3.12)
$$

Решение системы уравнений (3.4), (3.7) должно удовлетворять условиям, следующим из требований отсутствия поверхностных усилий на берегах трещины:

$$f_0(\theta=\pi)=0, \quad f_0'(\theta=\pi)=0, \qquad (3.13)$$

условиям симметрии на продолжении трещины

$$f_0'(\theta=0)=0, \quad f_0'''(\theta=0)=0, \quad g_0'(\theta=0)=0 \qquad (3.14)$$

и условию регулярности решения

$$g_0(\theta=0) = \left(\sigma_e^{(0)}(\theta=0)\right)^{1/2}. \qquad (3.15)$$

Численное интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений (3.4), (3.7) с краевыми условиями (3.13)–(3.14) показывает существование области полностью поврежденного материала $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$, примыкающей к берегам трещины и занимающей левую полуплоскость, тогда как в области активного накопления повреждений $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ решение определяется формулами

$$f_0(\theta) = (\cos\theta)^3/6, \qquad g_0(\theta) = \cos\theta, \qquad \mu_0 = 1. \tag{3.16}$$

Уравнение (3.4) после раскрытия обозначений, принятых для функций $E_0, E_1, G_0, G_1$, можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
&(1-\nu)f_1^{IV} - 2(1-\nu)\frac{g_0'}{g_0}f_1''' + \left[(1-\nu)\left(2\frac{g_0'^2}{g_0^2} - \frac{g_0''}{g_0}\right) + b_1^0\right] f_1'' - \\
&-2b_2^0\frac{g_0'}{g_0}f_1' + \left[e_1^0\left(2\frac{g_0'^2}{g_0^2} - \frac{g_0''}{g_0}\right) + b_3^0\right] f_1 + \left[-(1-\nu)\frac{f_0''}{g_0} - e_1^0\frac{f_0}{g_0}\right] g_1'' + \\
&+\left[-2(1-\nu)\frac{f_0'''}{g_0} + (1-\nu)4\frac{f_0''g_0'}{g_0^2} - 2b_2^0\frac{f_0'}{g_0} + e_1^0 f_0\frac{4g_0'}{g_0^2}\right] g_1' + \\
&+\left\{(1-\nu)\left[2\frac{f_0'''g_0'}{g_0^2} - 4\frac{f_0''g_0'^2}{g_0^3} + \frac{f_0''g_0''}{g_0^2}\right] + \left[2b_2^0\frac{f_0'g_0'}{g_0^2} - 4e_1^0\frac{f_0g_0'^2}{g_0^3} + e_1^0\frac{f_0g_0''}{g_0^2}\right]\right\} g_1 = \\
&= -b_1^1 f_0'' + 2b_2^1\frac{f_0'g_0'}{g_0} - e_1^1\left(2\frac{g_0'^2}{g_0^2} - \frac{g_0''}{g_0}\right) f_0 - b_3^1 f_0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Уравнение (3.8) после ряда преобразований можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{f_0''-3f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}}\right) f_1''' + \left[\frac{f_0'''-3f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 16\frac{f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} - \frac{f_0''-3f_0}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}\left(g_0\sigma_e^{(0)}\right)'\right] f_1'' + \\
&+\left[-3\frac{f_0'''-3f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} - 3\frac{f_0''-3f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 16\frac{f_0''}{g_0\sigma_e^{(0)}} - 16\frac{(g_0\sigma_e^{(0)})'}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}f_0'\right] f_1' + \\
&+\left[-3\frac{f_0'''-3f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 3\frac{f_0''-3f_0}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}(g_0\sigma_e^{(0)})'\right] f_1 + \\
&+\sin\theta g_1'' - \left(\frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0^2}\right) g_1' + \left[\sin\theta - \left(\frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0^2}\right)'\right] g_1 = \\
&= \frac{(f_0'''-3f_0')4\lambda_1 f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 4\lambda_1\frac{f_0''-3f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}}f_0' - 16\lambda_1\frac{f_0'f_0''}{g_0\sigma_e^{(0)}} + \\
&+\frac{(f_0''-3f_0)4\lambda_1 f_0 + 8\lambda_1 f_0'^2}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}(g_0\sigma_e^{(0)})' + g_0'\cos\theta - g_0\sin\theta - \\
&-\left[\frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0}\left(m_1\ln\sigma_e^{(0)} - n_1\ln g_0\right)\right]'.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Система двух уравнений (3.17) и (3.18) – система двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая следующую структуру:

$$p_0f_1^{IV} + p_1f_1''' + p_2f_1'' + p_3f_1' + p_4f_1 + p_5g_1'' + p_6g_1' + p_7g_1 = F_1^1, \tag{3.19}$$
$$q_1f_1''' + q_2f_1'' + q_3f_1' + q_4f_1 + q_5g_1'' + q_6g_1' + q_7g_1 = F_2^1, \tag{3.20}$$

где

$$p_0 = (1-\nu), \quad p_1 = -2(1-\nu)\frac{g_0'}{g_0}, \quad p_2 = (1-\nu)\left(2\frac{g_0'^2}{g_0^2} - \frac{g_0''}{g_0}\right) + b_1^0,$$
$$p_3 = -2b_2^0\frac{g_0'}{g_0}, \quad p_4 = e_1^0\left(2\frac{g_0'^2}{g_0^2} - \frac{g_0''}{g_0}\right) + b_3^0,$$

$$p_5 = -(1-\nu)\frac{f_0''}{g_0} - e_1^0\frac{f_0}{g_0}, \quad p_6 = (1-\nu)\left[-2\frac{f_0'''}{g_0} + 4\frac{f_0''g_0'}{g_0^2}\right] - 2b_2^0\frac{f_0'}{g_0} + e_1^0 f_0\frac{4g_0'}{g_0^2},$$
$$p_7 = (1-\nu)\left[\frac{f_0'''g_0'}{g_0^2} - 4\frac{f_0''g_0'^2}{g_0^3} + \frac{f_0''g_0''}{g_0^2}\right] + 2b_2^0\frac{f_0'g_0'}{g_0^2} - 4e_1^0\frac{f_0 g_0'^2}{g_0^3} + e_1^0\frac{f_0 g_0''}{g_0^2},$$

$$q_1 = \frac{f_0''-3f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}}, \qquad q_2 = \frac{f_0'''-3f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 16\frac{f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} - \frac{f_0''-3f_0}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}\left(g_0\sigma_e^{(0)}\right)',$$
$$q_3 = -3\frac{f_0'''-3f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} - 3\frac{f_0''-3f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 16\frac{f_0''}{g_0\sigma_e^{(0)}} - 16\frac{(g_0\sigma_e^{(0)})'}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}f_0',$$
$$q_4 = -3\frac{f_0'''-3f_0'}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 3\frac{f_0''-3f_0}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}(g_0\sigma_e^{(0)})',$$
$$q_5 = \sin\theta, \qquad q_6 = -\frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0^2}, \qquad q_7 = \sin\theta - \left(\frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0^2}\right)',$$

$$\begin{aligned} F_1^1 &= -b_1^1 f_0'' + 2b_2^1\frac{f_0'g_0'}{g_0} - e_1^1\left(2\frac{g_0'^2}{g_0^2} - \frac{g_0''}{g_0}\right)f_0 - b_3^1 f_0,\\ F_2^1 &= \frac{(f_0'''-3f_0')4\lambda_1 f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}} + 4\lambda_1\frac{f_0''-3f_0}{g_0\sigma_e^{(0)}}f_0' - 16\lambda_1\frac{f_0'f_0''}{g_0\sigma_e^{(0)}} + \\ &+\frac{(f_0''-3f_0)4\lambda_1 f_0 + 8\lambda_1 f_0'^2}{g_0^2(\sigma_e^{(0)})^2}(g_0\sigma_e^{(0)})' + g_0'\cos\theta - g_0\sin\theta - \\ &-\left[\frac{\sigma_e^{(0)}}{g_0}\left(m_1\ln\sigma_e^{(0)} - n_1\ln g_0\right)\right]'. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Краевые условия, накладываемые на функции $f_1(\theta)$ и $g_1(\theta)$, следуют из условий отсутствия поверхностных усилий на границе области полностью поврежденного материала

$$f_1(\theta=\pi/2)=0, \qquad f_1'(\theta=\pi/2)=0 \qquad g_1(\theta=\pi/2)=0 \tag{3.22}$$

и условий симметрии на продолжении трещины

$$f_1'(\theta=0)=0 \qquad f_1'''(\theta=0)=0, \qquad g_1'(\theta=0)=0. \tag{3.23}$$

Сведем полученную систему уравнений к системе уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$\varphi_1 = f_1, \quad \varphi_2 = f_1', \quad \varphi_3 = f_1'', \quad \varphi_4 = f_1''', \quad \varphi_5 = g_1, \quad \varphi_6 = g_1'.$$

После принятых обозначений система уравнений (3.19), (3.20) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\varphi_1' - \varphi_2 = 0,\\ &\varphi_2' - \varphi_3 = 0,\\ &\varphi_3' - \varphi_4 = 0,\\ &\varphi_4' + a_0\varphi_4 + a_1\varphi_3 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_1 + a_4\varphi_6 + a_5\varphi_5 = H_1,\\ &\varphi_5' - \varphi_6 = 0,\\ &\varphi_6' + d_0\varphi_4 + d_1\varphi_3 + d_2\varphi_2 + d_3\varphi_1 + d_4\varphi_6 + d_5\varphi_5 = H_2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Здесь приняты обозначения

$$a_0 = \frac{p_1q_5 - p_5q_1}{p_0q_5}, \qquad a_1 = \frac{p_2q_5 - p_5q_2}{p_0q_5},$$

$$
\begin{aligned}
&a_2 = \frac{p_3 q_5 - p_5 q_3}{p_0 q_5}, \qquad a_3 = \frac{p_4 q_5 - p_5 q_4}{p_0 q_5},\\
&a_4 = \frac{p_6 q_5 - p_5 q_6}{p_0 q_5}, \qquad a_5 = \frac{p_7 q_5 - p_5 q_7}{p_0 q_5},\\
&H_1 = \frac{1}{p_0}(F_1^1 - \frac{p_5}{q_5} F_2^1)
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&d_0 = q_1/q_5, \quad d_1 = q_2/q_5, \quad d_2 = q_3/q_5, \quad d_3 = q_4/q_5, \quad d_4 = q_6/q_5,\\
&d_5 = q_7/q_5, \quad H_2 = F_2^1/q_5.
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

Решение системы дифференциальных уравнений (3.24) должно удовлетворять краевым условиям

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(\pi/2) = 0, \quad \varphi_2(\pi/2) = 0, \quad \varphi_5(\pi/2) = 0,\\
&\qquad \varphi_2(0) = 0, \quad \varphi_4(0) = 0, \quad \varphi_6(0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

# 4. Вывод условия разрешимости и сопряженная краевая задача

Поскольку однородная задача, соответствующая (3.19), (3.20), имеет нетривиальное решение, неоднородная задача обладает решением, только если выполнено некоторое условие разрешимости. Для вывода условия разрешимости краевой задачи будем следовать процедуре, изложенной в [31–33], и обратимся к решению сопряженной краевой задачи. Умножим каждое из уравнений системы (3.24) на функции $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, $\psi_4$, $\psi_5$, $\psi_6$ и сложим полученные произведения. Далее проинтегрируем этот результат по углу $\theta$ в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi/2$. После указанных преобразований получим

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/2} [(\varphi_1' - \varphi_2)\psi_1 + (\varphi_2' - \varphi_3)\psi_2 + (\varphi_3' - \varphi_4)\psi_3 + (\varphi_5' - \varphi_6)\psi_5 +\\
&+(\varphi_4' + a_0\varphi_4 + a_1\varphi_3 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_1 + a_4\varphi_6 + a_5\varphi_5 - H_1)\psi_4 +\\
&+(\varphi_6' + d_0\varphi_4 + d_1\varphi_3 + d_2\varphi_2 + d_3\varphi_1 + d_4\varphi_6 + d_5\varphi_5 - H_2)\psi_6]\, d\theta = 0.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Интегрируя по частям выражение (4.1), можно преобразовать к виду:

$$
\begin{aligned}
&[\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3 + \varphi_4\psi_4 + \varphi_5\psi_5 + \varphi_6\psi_6]\,\Big|_0^{\pi/2} +\\
&+\int_0^{\pi/2} \{\varphi_1[-\psi_1' + a_3\psi_4 + d_3\psi_6] + \varphi_2[-\psi_1 - \psi_2' + a_2\psi_4 + d_2\psi_6] +\\
&+\varphi_3[-\psi_2 - \psi_3' + a_1\psi_4 + d_1\psi_6] + \varphi_4[-\psi_3 - \psi_4' + a_0\psi_4 + d_0\psi_6] +\\
&+\varphi_5[-\psi_5' + a_5\psi_4 + d_5\psi_6] + \varphi_6[-\psi_6' + a_4\psi_4 + d_4\psi_6]\}\, d\theta -\\
&-\int_0^{\pi/2} (H_1\psi_4 + H_2\psi_6) d\theta = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Из (4.2) можно получить сопряженную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\psi_1' = a_3\psi_4 + d_3\psi_6,\\
&\psi_2' = -\psi_1 + a_2\psi_4 + d_2\psi_6,\\
&\psi_3' = -\psi_2 + a_1\psi_4 + d_1\psi_6,\\
&\psi_4' = -\psi_3 + a_0\psi_4 + d_0\psi_6,\\
&\psi_5' = a_5\psi_4 + d_5\psi_6,\\
&\psi_6' = -\psi_5 + a_4\psi_4 + d_4\psi_6.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Для того чтобы получить граничные условия, которым подчинены функции $\psi_k(\theta)$, положим в соотношении (4.2) $H_k = 0$ и воспользуемся уравнениями (4.3). В результате получим

$$[\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 + \varphi_3\psi_3 + \varphi_4\psi_4 + \varphi_5\psi_5 + \varphi_6\psi_6]\,|_0^{\pi/2} = 0. \tag{4.4}$$

Учитывая граничные условия (3.27), можно получить краевые условия сопряженной задачи

$$\begin{gathered}
\psi_3(\pi/2) = 0, \quad \psi_4(\pi/2) = 0, \quad \psi_6(\pi/2) = 0,\\
\psi_1(0) = 0, \quad \psi_3(0) = 0, \quad \psi_5(0) = 0.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Численное решение сопряженной краевой задачи выполнено в системе компьютерной алгебры Mathematica 6.0 [34].

Возвращаясь к неоднородной задаче, получим условие разрешимости:

$$\int\limits_0^{\pi/2} (H_1\psi_4 + H_2\psi_6)d\theta = 0. \tag{4.6}$$

Подставляя в условие разрешимости функции $H_1$ и $H_2$, определяемые равенствами (3.21), (3.25), (3.26), можно найти, что $k_1 = n_1 - m_1 = -1$.

После определения неизвестного коэффициента асимптотического разложения $n_1 - m_1$ решение краевой задачи для системы уравнений (3.19), (3.20) имеет вид:

$$f_1(\theta) = \frac{1}{6}(\cos\theta)^3\left(\ln\cos\theta - \frac{5}{6}\right), \qquad g_1(\theta) = \cos\theta\ln\cos\theta. \tag{4.7}$$

## 5. Второе приближение

Для функций $f_2(\theta)$ и $g_2(\theta)$ можно получить систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющую аналогичную системе уравнений (3.17) и (3.18) структуру

$$p_0 f_2^{IV} + p_1 f_2''' + p_2 f_2'' + p_3 f_2' + p_4 f_2 + p_5 g_2'' + p_6 g_2' + p_7 g_2 = F_1^2, \tag{5.1}$$

$$q_1 f_2''' + q_2 f_2'' + q_3 f_2' + q_4 f_2 + q_5 g_2'' + q_6 g_2' + q_7 g_2 = F_2^2, \tag{5.2}$$

где приняты обозначения

$$F_1^2 = 2(1-\nu) f_0''' \frac{1}{g_0}\left(-g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\frac{g_1^2}{g_0^2}\right) - 2(1-\nu) f_0'' \frac{1}{g_0^2}\left(g_1' - g_0'\frac{g_1}{g_0}\right)^2 -$$

$$-(1-\nu) f_0'' 4\frac{g_0'}{g_0^2}\left(-g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\frac{g_1^2}{g_0^2}\right) + (1-\nu) f_0'' \frac{1}{g_0}\left(-g_1''\frac{g_1}{g_0} + g_0''\frac{g_1^2}{g_0^2}\right) +$$

$$+2b_2^0 f_0' \frac{1}{g_0}\left(-g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\frac{g_1^2}{g_0^2}\right) - 2e_1^0 f_0 \frac{1}{g_0^2}\left(g_1' - g_0'\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \tag{5.3}$$

$$-4e_1^0 f_0 \frac{g_0'}{g_0}\left(-g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\frac{g_1^2}{g_0^2}\right) + e_1^0 f_0 \frac{1}{g_0}\left(-g_1''\frac{g_1}{g_0} + g_0''\frac{g_1^2}{g_0^2}\right) +$$

$$+2(1-\nu)E_1 f_1''' - (1-\nu)G_1 f_1'' - b_1^1 f_1'' - b_1^2 f_0'' - b_1^2 f_0'' +$$

$$+2\left(b_2^0 E_1 + b_2^1 E_0\right) f_1' + 2\left(b_2^1 E_1 + b_2^2 E_0\right) f_0' - (e_1^1 G_0 + e_1^0 G_1) f_1 -$$

$$-(e_1^2 G_0 + e_1^1 G_1) f_0 - b_3^2 f_0 - b_3^1 f_1,$$

$$F_2^2 = \left[\frac{g_0'}{2g_0^2 \sigma_e^{(0)}} + \frac{(\sigma_e^{(0)})'}{2g_0(\sigma_e^{(0)})^2}\right]\Big\{\left[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0\right]^2 +$$

$$+4\left[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0'\right]^2 - 2\left[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0\right] \times$$

$$\times \left[(2\lambda_2(\lambda_0+1) + \lambda_1^2)f_0 + 2\lambda_1(\lambda_+1)f_1\right] + +8(\lambda_0+1)f_0'(\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_0')\} -$$

$$-\frac{1}{2g_1\sigma_e^{(0)}}\{2\left[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0\right] \times$$

$$\times \left[f_1''' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1' - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0'\right] +$$

$$+8\left[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0'\right]\left[(\lambda_0+1)f_1'' + \lambda_1 f_0''\right] -$$

$$-2\left[f_0''' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0'\right]\left[(2\lambda_2(\lambda_0+1) + \lambda_1^2)f_0 + 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_1\right] - \tag{5.4}$$

$$-2\left[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0\right]\left[(2\lambda_2(\lambda_0+1) + \lambda_1^2)f_0' + 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_1'\right] +$$

$$+8(\lambda_0+1)f_0''(\lambda_1 f_1' + \lambda_2 f_0') + 8(\lambda_0+1)f_0'(\lambda_1 f_1'' + \lambda_2 f_0'')\} -$$

$$-\frac{g_0'\omega_1^2}{2g_0^2(\sigma_e^{(0)})^3} + \frac{1}{2g_0}\left(\frac{\omega_1^2}{(\sigma_e^{(0)})^3}\right)' + g_1'\cos\theta - g_1\sin\theta -$$

$$-\left\{\frac{1}{2}m_1^2(\ln\sigma_e^{(0)})^2 + m_2\ln\sigma_e^{(0)} + m_1\frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} + \frac{1}{2}n_1^2(\ln g_0)^2 - n_2\ln g_0 -\right.$$

$$-n_1\frac{g_1}{g_0} - m_1 n_1 \ln\sigma_e^{(0)}\ln g_0 + \left(m_1\ln\sigma_e^{(0)} - n_1\ln g_0\right)\left(\frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}} - \frac{g_1}{g_0}\right) -$$

$$\left.-\frac{\sigma_e^{(1)}}{\sigma_e^{(0)}}\frac{g_1}{g_0} + \frac{g_1^2}{g_0^2}\right\}',$$

$$\omega_1 = \left[f_0'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_0\right]\left[f_1'' - \lambda_0(\lambda_0+2)f_1 - 2\lambda_1(\lambda_0+1)f_0\right] +$$

$$+4(\lambda_0+1)f_0'\left[(\lambda_0+1)f_1' + \lambda_1 f_0'\right].$$

Краевые условия следуют из условий отсутствия поверхностных усилий на границе области полностью поврежденного материала

$$f_2(\theta = \pi/2) = 0, \qquad f_2'(\theta = \pi/2) = 0 \qquad g_2(\theta = \pi/2) = 0 \tag{5.5}$$

и условий симметрии на продолжении трещины

$$f_2'(\theta = 0) = 0 \qquad f_2'''(\theta = 0) = 0, \qquad g_2'(\theta = 0) = 0. \tag{5.6}$$

Краевая задача для системы уравнений (5.1), (5.2) подобна краевой задаче относительно функций $f_1(\theta), g_1(\theta)$, рассмотренной выше. В силу чего условие разрешимости имеет аналогичный вид, за исключением функций $F_1^2, F_2^2$. Формулируя условие разрешимости краевой задачи для функций $f_2(\theta), g_2(\theta)$ в виде (4.6) и заменяя $F_1^1$ на $F_1^2$, а $F_2^1$ на $F_2^2$ соответственно:

$$\int\limits_0^{\pi/2} (H_1\psi_4 + H_2\psi_6)\, d\theta = 0, \quad \text{где} \quad H_1 = (F_1^2 - p_5 F_2^2/q_5)/p_0,\ H_2 = F_2^2/q_5, \tag{5.7}$$

можно найти разность $n_2 - m_2 = 1$. Таким образом, справедливо следующее асимптотическое разложение

$$n - m = -\varepsilon + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Решение краевой задачи для системы уравнений (5.1), (5.2) с краевыми условиями (5.5), (5.6) имеет вид:

$$f_2(\theta) = \frac{1}{12}\cos^3\theta(\ln\cos\theta)^2 - \frac{5}{36}\cos^3\theta\ln\cos\theta + \frac{19}{216}\cos^3\theta,\ g_2(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta(\ln\cos\theta)^2.$$

## 6. Третье приближение. Определение коэффициента $n_3 - m_3$ в асимптотических разложениях параметров кинетического уравнения

Для функций $f_3(\theta)$ и $g_3(\theta)$ получается аналогичная (3.17) и (3.18) система двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$p_0 f_3^{IV} + p_1 f_3''' + p_2 f_3'' + p_3 f_3' + p_4 f_3 + p_5 g_3'' + p_6 g_3' + p_7 g_3 = F_1^3, \tag{6.1}$$

$$q_1 f_3''' + q_2 f_3'' + q_3 f_3' + q_4 f_3 + q_5 g_3'' + q_6 g_3' + q_7 g_3 = F_2^3, \tag{6.2}$$

где приняты обозначения

$$\begin{gathered}
F_1^3 = \left[2(1-\nu)\frac{f_0'''}{g_0} + 2b_2^0\frac{f_0}{g_0}\right]\left\{-g_2'\frac{g_1}{g_0} + g_1'\left[\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \frac{g_2}{g_0}\right] - g_0'\left[\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3 - 2\frac{g_1}{g_0}\frac{g_2}{g_0}\right]\right\} - \\
- \left[(1-\nu)f_0'' - e_1^0 f_0\right]\left\{4\frac{g_0'}{g_0^2}\left[-g_2'\frac{g_1}{g_0} + g_1'\left[\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \frac{g_2}{g_0}\right] - g_0'\left[\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3 - 2\frac{g_1}{g_0}\frac{g_2}{g_0}\right]\right] + \right. \\
+4\frac{1}{g_0^2}\left(g_1' - g_0'\frac{g_1}{g_0}\right)\left[g_2' - g_1'\frac{g_1}{g_0} + g_0'\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - g_0'\frac{g_2}{g_0}\right] + g_2''\frac{g_1}{g_0^2} - \frac{g_1''}{g_0}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 + g_1''\frac{g_2}{g_0^2} + \\
\left. + \frac{g_0''}{g_0}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3 - 2\frac{g_0'' g_1 g_2}{g_0^3}\right\} + 2(1-\nu)\left(E_1 f_2''' + E_2 f_1'''\right) - (1-\nu)\left(G_1 f_2'' + G_2 f_1''\right) - \\
-b_1^3 f_0'' - b_1^2 f_1'' - b_1^1 f_2'' + 2f_0'\left(E_0 b_2^3 + E_1 b_2^2 + E_2 b_2^1\right) + 2f_1'\left(E_2 b_2^0 + E_1 b_2^1 + E_0 b_2^2\right) + \\
+2f_2'\left(E_1 b_2^0 + E_0 b_2^1\right) - \left(e_1^3 G_0 + e_1^2 G_1 + e_1^1 G_2\right) f_0 - \left(e_1^2 G_0 + e_1^1 G_1 + e_1^0 G_2\right) f_1 - \\
- \left(e_1^1 G_0 + e_1^0 G_1\right) f_2 - b_3^1 f_2 - b_3^2 f_1 - b_3^3 f_0.
\end{gathered}$$

Функция $F_2^3$ не приводится из-за громоздкости выражения. Краевые условия следуют из условий отсутствия поверхностных усилий на границе области полностью поврежденного материала

$$f_3(\theta = \pi/2) = 0, \qquad f_3'(\theta = \pi/2) = 0 \qquad g_3(\theta = \pi/2) = 0 \tag{6.3}$$

и условий симметрии на продолжении трещины

$$f_3'(\theta = 0) = 0 \qquad f_3'''(\theta = 0) = 0, \qquad g_3'(\theta = 0) = 0. \tag{6.4}$$

Формулируя условие разрешимости краевой задачи (6.1)–(6.4), получаем одно алгебраическое уравнение относительно разности $n_3 - m_3$ и находим $n_3 - m_3 = -1$.

Решение краевой задачи, определяющей третье приближение, имеет вид:

$$f_3(\theta) = \cos^3\theta\left(\frac{1}{36}(\ln\cos\theta)^3 - \frac{5}{72}(\ln\cos\theta)^2 + \frac{19}{216}\ln\cos\theta - \frac{65}{1296}\right),$$

$$g_3(\theta) = \frac{1}{6}\cos\theta(\ln\cos\theta)^3.$$

Поэтому асимптотическое разложение для $n - m$ задается равенством

$$n - m = -\varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \tag{6.5}$$

Вычисляя аппроксимацию Паде [35; 36] для полученного прямого разложения Пуанкаре, легко найти, что

$$n - m = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Исключая малый параметр $\varepsilon = \mu - \mu_0$, найдем аналитическое выражение для собственного значения

$$n - m = \frac{1-\mu}{\mu} \quad \text{или} \quad \mu = \frac{1}{1+n-m}. \tag{6.6}$$

Рассматривая асимптотические выражения для функций $f_k(\theta)$ и $g_k(\theta)$, можно увидеть закономерности, в соответствии с которыми получаются эти функции, что позволяет выписать решение исходной задачи в замкнутой форме:

$$f(\theta) = \cos^{\mu+2}\theta/((\lambda+2)(\lambda+1)), \qquad g(\theta) = \cos^{\mu}\theta. \tag{6.7}$$

## Выводы

Для решения задачи определения напряженно-деформированного состояния и поля сплошности у растущей в условиях циклического нагружения трещины был использован метод разложения по собственным функциям. Метод разложения по собственным функциям редуцирует задачу к нелинейной задаче на собственные значения, для решения которой был применен метод малого параметра. Обычно в механике разрушения для построения решения нелинейных задач на собственные значения прибегают к численному интегрированию уравнений задачи, что может привести к ошибочным результатам. Для преодоления указанных сложностей для решения нелинейной задачи на собственные значения в ходе применения метода возмущений построены четырехчленные асимптотические разложения искомых функций. В статье приводятся аккуратные выражения для искомых функций вплоть до слагаемых порядка $O(\varepsilon^4)$, где $\varepsilon = \mu - \mu_0$ — разность между собственными значениями, отвечающими нелинейной и линейной задачам. Показано, что процедура метода малого параметра позволяет найти аналитическую зависимость собственного значения задачи от параметров кинетического уравнения. Оказалось, что метод малого параметра в отличие от численного решения системы нелинейных дифференциальных уравнений, одно из которых является сингулярно возмущенным, дает возможность нахождения аналитических выражений для собственных значений и соответствующих им собственных функций. Следовательно, в задачах нелинейной механики разрушения при использовании метода разложения по собственным функциям метод малого параметра, наряду с применением численных процедур, является эффективным подходом оценки собственных значений в нелинейных задачах на собственные значения. Рассмотренная в настоящей работе задача об усталостном росте трещины в среде с поврежденностью и найденное с помощью метода малого параметра выражение (6.6) демонстрирует эффективность данного подхода.

## Литература


[1] Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions // ASME. J. Appl. Mech. 1952. V. 74. P. 526–528.

[2] Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // ASME. J. Appl. Mech. 1957. V. 24. P. 109–114.

[3] Carpinteri A., Paggi M. Asymptotic analysis in Linear Elasticity: From the pioneering studies by Wieghardt and Irwin until today. Engineering Fracture Mechanics. 2009. V. 76. P. 1771–1784.

[4] Li J., Recho N. Methodes asymptotiques en mecanique de la rupture. Paris: Hermes Science Publications, 2002. 262 p.

[5] Niu Z., Cheng C., Ye J., Recho N. A new boundary element approach of modelling singular stress fields of plane V-notch problems // International Journal of Solids and Structures. 2009. V. 46. P. 2999–3008.

[6] Bouchbinder E., Livne A., Fineberg J. The $1/r$ singularity in weakly nonlinear fracture mechanics // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2009. V. 57. P. 1568–1577.

[7] Niu Z., Cheng C., Ye J., Recho N. Evaluation of the stress singularities of plane V-nothches in bonded dissimilar materials // Applied Mathematical Modelling. 2009. V. 33. P. 1776–1792.

[8] Ding P., Wang X. Solutions of the second elastic-plastic fracture mechanics parameter in test specimens // Engn. Fracture Mechanics. 2010. V. 77. P. 3462–3480.

[9] Ayatollahi M.R., Dehgany M., Nejati M. Fracture analysis of V-notched components – Effects of first non-singular stress term // International Journal of Solids and Structures. 2011. V. 48. P. 1579–1589.

[10] Berto F., Lazzarin P., Kotousov A. On higher order terms and out-of plane singular mode // Mechanics of Materials. 2011. V. 43. P. 332–341.

[11] Ayatollahi M.R., Nejati M. Experimental evaluation of stress field around the sharp notches using photoelasticity // Materials and Design. 2011. V. 32. P. 561–569.

[12] Hello G., Tahar M.B., Roelandt J.M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. 2012. V. 49. P. 556–566.

[13] Бьюи Х.Д. Механика разрушения: обратные задачи и решения. М.: Физматлит, 2011. 412 с.

[14] Астафьев В.И., Григорова Т.В., Пастухов В.А. Влияние поврежденности материала на напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины при ползучести // ФХММ. 1992. Т. 28. № 1. С. 5–11.

[15] Астафьев В.И., Григорова Т.В. Распределение напряжений и поврежденности у вершины растущей в процессе ползучести трещины // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1995. № 3. С. 160–166.

[16] Murakami S. Mechanical modeling of material damage // J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 2. P. 280–286.
[17] Murakami S., Liu Y., Mizuno M. Computational methods for creep fracture analysis by damage mechanics // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2000. V. 183. P. 15–33.
[18] Murakami S., Hirano T., Liu Y. Asymptotic fields of stress and damage of a mode I creep crack in steady — state growth // Int. J. Solids Struct. 2000. V. 37. P. 6203–6220.
[19] Mou Y., Han R.P.S. Influence of damage in the vicinity of a macrocrack tip // Engng. Fracture Mechanics. 1996. V. 55. № 4. P. 617–632.
[20] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
[21] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
[22] Liao S. Beyond Perturbation. Introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton; London; New York; Washington: Charman and Hall, 2004. 336 p.
[23] Степанова Л.В. Математические методы механики разрушения. М: Физматлит, 2009. 336 с.
[24] Степанова Л.В. О методах решения задач на собственные значения, возникающих в нелинейной механике разрушения // Вестник Нижегородского университета. 2011. № 4. Ч. 4. С. 1786–1788.
[25] Федина М.Е., Адылина Е.М. Собственные значения в задаче о трещине // Дифференциальные уравнения и их приложения: тез. докл. конференции "СамДифф-2011". Самара: Универс групп, 2011. С. 122–123.
[26] Баренблатт Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2009. 216 с.
[27] Sadchev P.L. Self-similarity and beyond. Exact solutions of nonlinear problems. Boca Raton; London; New York; Washington: Charman and Hall. 2000. 315 p.
[28] Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математичекой физики. Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2010. 368 с.
[29] Zhao J., Zhao X. The asymptotic study of fatigue crack growth based on damage mechanics // Engn. Fracture Mechanics. 1995. V. 50. № 1. P. 131–141.
[30] Степанова Л.В. Уточненный расчет напряженно-деформироавнного состояния у вершины трещины в условиях циклического нагружения в среде с поврежденностью // Вестник СамГУ. 2011. № 2(83). С. 105–115.
[31] Найфе А.Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
[32] Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. New York: John Wiley and Sons, 1995. 704 p.
[33] Nayfeh A.H., Pai P.F. Linear and Nonlinear Structural Mechanics. New York: John Wiley and Sons, 2004. 754 p.
[34] Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. 744 с.
[35] Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
[36] Андриянов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика: путь к целостной простоте. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 304 с.

Поступила в редакцию 22/*II*/2012;
в окончательном варианте — 22/*II*/2012.

# ABOUT A NON-LINEAR TASK ON EIGENVALUES INCURRING FROM THE ANALYSIS OF TENSIONS AT THE FATIGUE CRACK TIP

© 2012 E.M. Adylina, S.A. Igonin, L.V. Stepanova[2]

An analytical solution of the nonlinear eigenvalue problem arising from the fatigue crack growth problem in a damaged medium in coupled formulation is obtained. The perturbation technique is used. The method allows to find the analytical dependence of eigenvalue on parameters of the kinetic equation of the damage evolution law.

**Key words:** nonlinear eigenvalue problem, cyclic loading, crack growth in a damaged medium, perturbation method, analytical solution.

Paper received 22/$II$/2012.
Paper accepted 22/$II$/2012.

[2]Adylina Ekaterina Mihailovna (kateadulina@mail.ru), Igonin Sergey Alexandrovich (sergejiginin@yandex.ru), Stepanova Larisa Valentinovna (lst@ssu.samara.ru), the Dept. of Mathematical Modelling in Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.